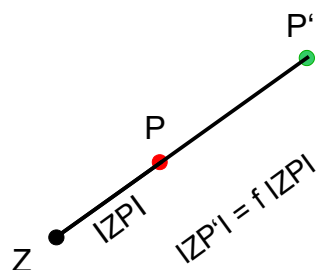


Definition der zentrischen Streckung $S_{Z;f}$

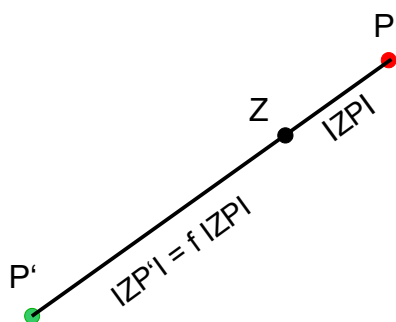
Gegeben sei ein Punkt Z in der Ebene und eine Zahl $f \in \mathbb{R}$, $f \neq 0$.

Jedem Punkt P der Ebene wird ein Bildpunkt P' wie folgt zugeordnet :

Falls $f > 0$:



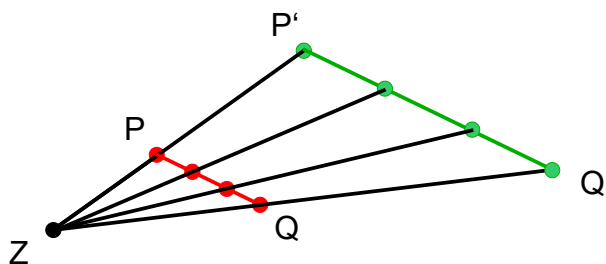
Falls $f < 0$:



Die Abbildung heißt **zentrische Streckung** mit **Zentrum** Z und **Streckfaktor** f .

Beispiel :

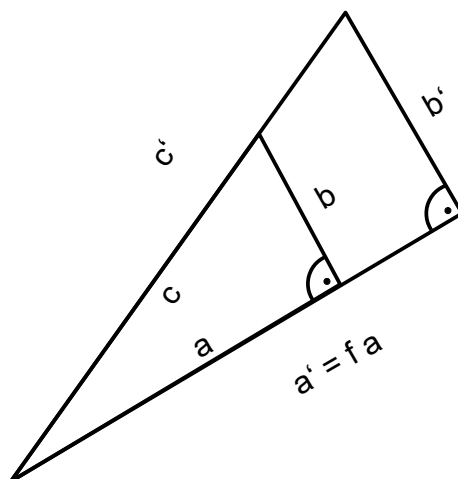
Bildet man die Strecke $\overline{PQ}$ punktweise ab, so hat man den Eindruck, dass das Bild von $\overline{PQ}$ die Strecke $\overline{P'Q'}$ parallel zu $\overline{PQ}$ ist.



Welche Beziehung zwischen Strecke und Bildstrecke besteht muss jedoch genauer untersucht werden !

(I)

Ausgangsfigur ist zunächst folgende einfache Figur aus den rechtwinkligen Dreiecken Δabc , $\Delta a'b'c'$:



Die Seiten b , b' sind **parallel**. Über den Zusammenhang der Längen von b , b' ist nichts ausgesagt .

Flächenbetrachtung :

$$\frac{ba}{2} + \frac{b'+b}{2} (a'-a) = \frac{b'a'}{2}$$

$$ba + (b'+b)(a'-a) = b'a'$$

$$ba + b'a' - b'a + ba' - ba = b'a'$$

$$- b'a + ba' = 0$$

$$ba' = b'a$$

$$b \frac{a'}{a} = b'$$

$$b' = \frac{a'}{a} b$$

$$\boxed{b' = f b}$$

$$c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$c' = \sqrt{(fa)^2 + (fb)^2}$$

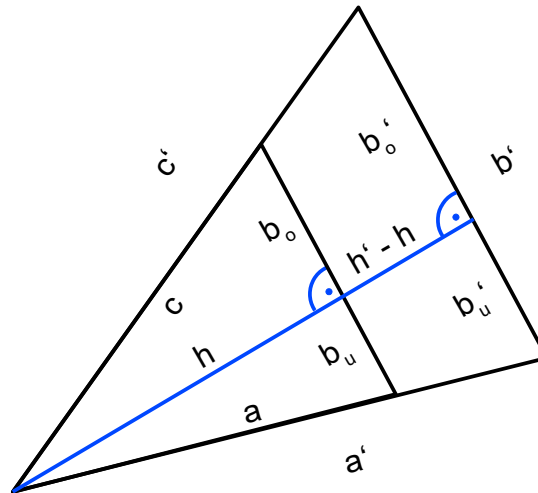
$$c' = \sqrt{f^2(a^2 + b^2)}$$

$$c' = \sqrt{f^2 c^2}$$

$$\boxed{c' = f c}$$

(2)

Ausgangsfigur ist folgende einfache Figur aus ineinander geschachtelten Dreiecken Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit **parallelen Seiten** b , b' :



Zeichnet man die Höhen h , h' ein, ergeben sich zwei Figuren wie unter (I) , nämlich die Dreiecke $\Delta ab_u h$, $\Delta a'b_u'h'$ und $\Delta ab_o h$, $\Delta a'b_o'h'$.

Nach (1) gilt :

$$\underline{h' = \frac{h'}{h} h} , \quad \underline{b_o' = \frac{h'}{h} b_o} , \quad \underline{c' = \frac{h'}{h} c}$$

$$\underline{h' = \frac{h'}{h} h} , \quad \underline{b_u' = \frac{h'}{h} b_u} , \quad \underline{a' = \frac{h'}{h} a}$$

Weiter ergibt sich

$$b' = b_u' + b_o' = \frac{h'}{h} b_u + \frac{h'}{h} b_o = \frac{h'}{h} (b_u + b_o) = \frac{h'}{h} b ,$$

so dass jetzt für die vorgegebenen Dreiecke Δabc , $\Delta a'b'c'$ mit **parallelen Seiten** b , b' gilt :

$$\boxed{a' = \frac{h'}{h} a}$$

$$\boxed{b' = \frac{h'}{h} b}$$

$$\boxed{c' = \frac{h'}{h} c}$$

Setzt man noch $f := \frac{h'}{h}$ folgt :

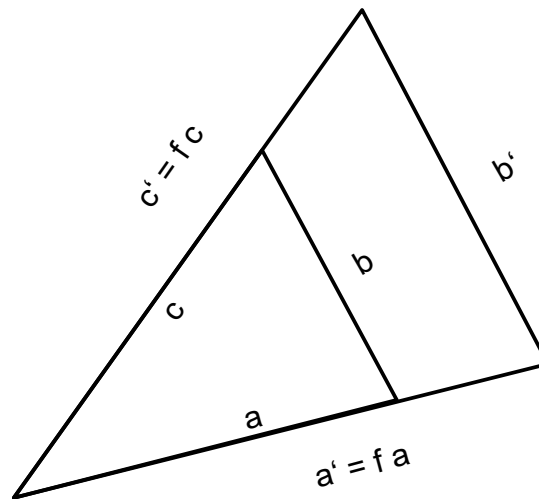
$$\boxed{a' = f a}$$

$$\boxed{b' = f b}$$

$$\boxed{c' = f c}$$

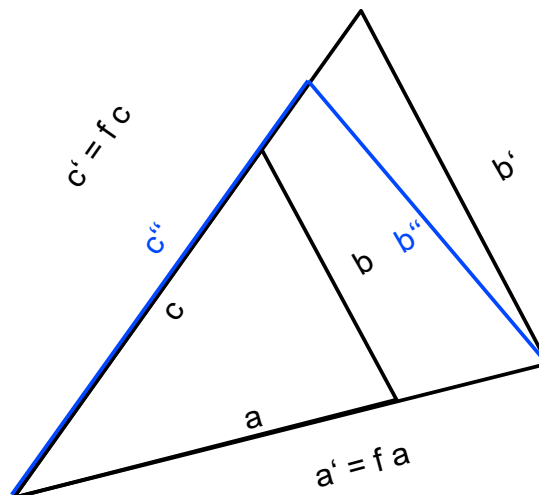
(3)

Ausgangsfigur ist folgende Figur aus ineinander geschachtelten Dreiecken $\triangle abc$, $\triangle a'b'c'$, wobei vorausgesetzt ist, dass $a' = f a$ und $c' = f c$ vorausgesetzt ist, **nicht aber die Parallelität** von b , b' :



Wir zeigen, dass dann b , b' parallel sind !

Angenommen, b , b' seien nicht parallel. Zeichne die Parallele b'' zu b und betrachte die Dreiecke $\triangle abc$, $\triangle a'b''c''$:



Es folgt dann :

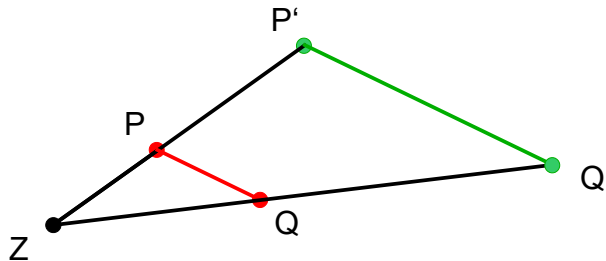
$$b'' = fb, \quad c'' = fc,$$

also $c'' = fc'$, $b'' = b'$ und b , b' parallel.

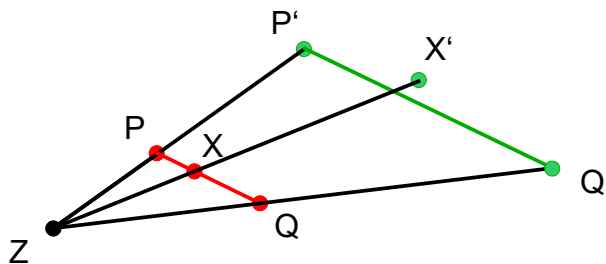
Eigenschaften der zentrischen Streckung $S_{Z,f}$

(I) Für $|ZP'| = f \cdot |ZP|$, $|ZQ'| = f \cdot |ZQ|$ folgt

$$|PQ'| = f \cdot |PQ| \text{ und } \overline{P'Q'} \parallel \overline{PQ} .$$



(II) Streckentreue : $S_{Z,f}(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$



Sei $X \in \overline{PQ}$. Angenommen $X' \notin \overline{P'Q'}$. Dann gilt :

$$|P'X'| + |X'Q'| = f|PX| + f|XQ| = f(|PX| + |XQ|) = f|PQ| = |P'Q'|$$

Das heißt aber, dass $X' \in \overline{P'Q'}$.

(III) Winkeltreue : $\alpha = \angle cb = \alpha' = \angle c'a'$

Dies folgt sofort aus (I) und (II) .

(IV) Geradentreue : $S_{Z,f}(PQ) = \overline{P'Q'}$

Dies folgt sofort aus (I) , (II) und (III) .