Betrachtung der Fibonacci- und Tribonacci-Zahlenfolgen mit Hilfe von Matrizen

Arno Fehringer, Mai 2021

Quellen :

[1] Meinke, Ashley Marie : Fibonacci Numbers and assiciatred Matrices ; Thesis Kent State University 2011

http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=kent1310588704 [15.05.2021]

[2] Kleine Enzyklopädie Mathematik; Pfalz Verlag Basel 1967

Die Fibonacci-Zahlenfolge

$f_0 := 1 \quad , \quad f_1 := 1 \quad , \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geq 2$

$f_0 := 1 \; , \; f_1 := 1 \; , \; f_2 = 2 \; , \; f_3 = 3 \; , \; f_4 = 5 \; , \; f_5 = 8 \; \ldots$

Von Interesse ist die Folge der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$ für alle $n \geq 0$ sowie $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ = ?

Übergang zur Vektor- und Matrizendarstellung :

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad n \geq 0$$

Speziell :

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1$$

Folgerung :

Wegen $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt

$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix}}$ für alle $n \geq 2$.

Eigenwerte und Eigenvektoren der Linearen Abbildung mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

Gibt es φ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1-\varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{bmatrix} = 0$.

$$(1-\varphi)(-\varphi) - 1 \cdot 1 = 0$$

$$\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\varphi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sind die **Eigenwerte** der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und haben folgende Eigenschaften, welche zur späteren Rechnung gebraucht werden :

(1) $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, $\varphi_1 \varphi_2 = -1$ **(Formeln von Vieta)**

(2) $\varphi_1 - \varphi_2 = \sqrt{5}$

(3) $\dfrac{\varphi_1 + 2}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varphi_1$, $\dfrac{-\varphi_2 - 2}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varphi_2$

Beweis von (3) :

$$\frac{\varphi_1 + 2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1+1+1}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1^2+1}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1^2-\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1(\varphi_1-\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2} = \varphi_1$$

$$\frac{-\varphi_2 - 2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{-\varphi_2-1-1}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{-\varphi_2^2-1}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{-\varphi_2^2+\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)}{\varphi_1-\varphi_2} = \varphi_2$$

Berechnung der Eigenvektoren zu den Eigenwerten :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Setze} \quad x_2:=1 \quad \Rightarrow \quad x_1=\varphi$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren zu φ_1 , φ_2 sind die orthogonalen, linear unabhängigen Vektoren $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn es ist $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_1\varphi_2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Die Eigenvektoren werden nun zunächst als Basisvektoren herangezogen und die Matrix der Linearen Abbildung F bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet . Dazu benötigt man die Matrizen der Basistransformationen S , S^{-1} .

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \arrow[r, "F \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] \arrow[d, shift right=2, "\frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix} 1 & -\varphi_2 \\ -1 & \varphi_1 \end{bmatrix} \; ; \; S^{-1}"'] & \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \arrow[d, shift right=2, "S^{-1}"'] \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \arrow[r, "D \; ; \; {[D]}"'] \arrow[u, shift right=2, "S \; ; \; \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}"'] & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \arrow[u, shift right=2, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$y_1\begin{pmatrix}\varphi_1\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}\varphi_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$S\ : \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 = x_1$$

$$1\,y_1 + 1\,y_2 = x_x$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix}x_1 & \varphi_2\\x_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{1\,x_1 - \varphi_2 x_2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\left(1\,x_1 - \varphi_2 x_2\right)$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix}\varphi_1 & x_1\\1 & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-1\,x_1 + \varphi_1 x_2}{\varphi_1-\varphi_2} = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\left(-1\,x_1 + \varphi_1 x_2\right)$$

$$S^{-1}\ : \qquad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}1 & -\varphi_2\\-1 & \varphi_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}\circ F\circ S$$

$$[D] = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}1 & -\varphi_2\\-1 & \varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}1 & -\varphi_2\\-1 & \varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1+1 & \varphi_2+1\\\varphi_1 & \varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\left[D\right] = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}\varphi_1+1-\varphi_1\varphi_1 & \varphi_2+1-\varphi_2^2 \\ -\varphi_1-1+\varphi_1^2 & -\varphi_2-1+\varphi_1\varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\left[D\right] = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}\varphi_1+1+1 & 0 \\ 0 & -\varphi_2-1-1\end{bmatrix}$$

$$\left[D\right] = \frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\begin{bmatrix}\varphi_1+2 & 0 \\ 0 & -\varphi_2-2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left[D\right] = \begin{bmatrix}\varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2\end{bmatrix}}$$ Diagonalmatrix

$$\left[S^{-1}\circ F\circ S\right] = \begin{bmatrix}\varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = S^{-1}\circ F\circ F\circ \;\ldots\; \circ F\circ F \;\circ S$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = S^{-1}\circ F\circ\left(S\circ S^{-1}\right)\circ F\circ\left(S\circ S^{-1}\right)\circ \;\ldots\; \circ\left(S\circ S^{-1}\right)\circ F\circ\left(S\circ S^{-1}\right)\circ F \;\circ S$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = \left(S^{-1}\circ F\circ S\right) \circ \left(S^{-1}\circ F\circ S\right) \;\ldots\; \circ \left(S^{-1}\circ F\circ S\right) \circ \left(S^{-1}\circ F\circ S\right)$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = \left[S^{-1}\circ F\circ S\right]^n$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = \left[D\right]^n$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = \begin{bmatrix}\varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2\end{bmatrix}^n$$

$$\left[S^{-1}\circ F^n\circ S\right] = \begin{bmatrix}\varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n\end{bmatrix}$$

$$\left[S\circ S^{-1}\circ F^n\circ S\circ S^{-1}\right] = \left[S\circ\left(S^{-1}\circ F^n\circ S\right)\circ S^{-1}\right] = \left[S\right]\begin{bmatrix}\varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n\end{bmatrix}\left[s^{-1}\right]$$

$$\left[F^n\right] = \left[S\right]\begin{bmatrix}\varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n\end{bmatrix}\left[s^{-1}\right]$$

$$\left[F^n\right] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{bmatrix} \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_2 \\ -1 & \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_2 \\ -1 & \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^n & -\varphi_1^n \varphi_2 \\ -\varphi_2^n & \varphi_1 \varphi_2^n \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1} & -\varphi_1^{n+1} \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^{n+1} \\ \varphi_1^n - \varphi_2^n & -\varphi_1^n \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^n \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1} & -\varphi_1 \varphi_2 \left(\varphi_1^n - \varphi_2^n\right) \\ \varphi_1^n - \varphi_2^n & -\varphi_1 \varphi_2 \left(\varphi_1^{n-1} - \varphi_2^{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1} & \varphi_1^n - \varphi_2^n \\ \varphi_1^n - \varphi_2^n & \varphi_1^{n-1} - \varphi_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[F\right]^n = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1} & \varphi_1^n - \varphi_2^n \\ \varphi_1^n - \varphi_2^n & \varphi_1^{n-1} - \varphi_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[F^n\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \begin{bmatrix} \varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1} & \varphi_1^n - \varphi_2^n \\ \varphi_1^n - \varphi_2^n & \varphi_1^{n-1} - \varphi_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f_n = \frac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{\varphi_1 - \varphi_2}}$$ **Formel von Binet**

Beispiel zur Überprüfung : $f_5 = 8$ $\qquad f_5 = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6}{\sqrt{5}} = 8$

Berechnung des Grenzwertes der Quotientenfolge der Fibonacci-Zahlen :

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\dfrac{\varphi_1^{n+2} - \varphi_2^{n+2}}{\varphi_1 - \varphi_2}}{\dfrac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{\varphi_1 - \varphi_2}}$$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\varphi_1^{n+2} - \varphi_2^{n+2}}{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}$$

Wegen $-1 < \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} < 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^n = 0$ folgt :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1^{n+2} - \varphi_2^{n+2}}{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1 - \varphi_2\left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{n+1}} = \varphi_1$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi_1}$$

Die Tribonacci-Zahlenfolge

$$f_0 := 1 \quad , \quad f_1 := 1 \quad , \quad t_2 := 1 \quad , \quad t_{n+3} := t_{n+2} + t_{n+1} + t_n \quad \text{für alle} \quad n \geq 0$$

Von Interesse ist die Folge der Quotienten aufeinander folgender Tribonacci-Zahlen

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \quad \text{für alle} \quad n \geq 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = ?$$

Übergang zur Vektor- und Matrizendarstellung :

$$\begin{pmatrix} t_{n+3} \\ t_{n+2} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad n \geq 0$$

Speziell :

$$\begin{pmatrix} t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_5 \\ t_4 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_5 \\ t_4 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1$$

Folgerung :

Wegen $\begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{n+1} & t_n & t_{n-1} \\ t_n & t_{n-1} & t_{n-2} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} t_{n+1} & t_n & t_{n-1} \\ t_n & t_{n-1} & t_{n-2} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} \end{bmatrix}} \quad \text{für alle} \quad n \geq 3 \quad .$$

Eigenwerte und Eigenvektoren der Linearen Abbildung mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

Gibt es τ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tau \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\tau & 1 & 1 \\ 1 & -\tau & 0 \\ 0 & 1 & -\tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn

$$\mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1-\tau & 1 & 1 \\ 1 & -\tau & 0 \\ 0 & 1 & -\tau \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

$$(1-\tau)\big((-\tau)(-\tau)-0\cdot 1\big) \;-\; 1\big(1(-\tau)-0\cdot 0\big) \;+\; 1\big(1\cdot 1-(-\tau)0\big) \;=\; 0$$

$$\tau^2 - \tau^3 + \tau + 1 = 0$$

$$\boxed{\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0}$$

Im Anhang wird gezeigt, dass diese Gleichung eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen hat , nämlich

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1\right) \approx 1{,}893\,286\,755$$

$$\tau_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\tau_1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

$$\tau_3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\tau_1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \qquad \tau_3 = \overline{\tau_2}$$

Die Lösungen sind die Eigenwerte der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und haben folgende Eigenschaften :

$$\tau_1+\tau_2+\overline{\tau_2} = 1$$

$$\tau_1\tau_2+\tau_1\overline{\tau_2}+\tau_2\overline{\tau_2} = -1 \qquad \textbf{Gleichungen von Vieta}$$

$$\tau_1\tau_2\overline{\tau_2} = 1$$

Berechnung der Eigenvektoren zu den Eigenwerten

$$x_1+x_2+x_3 = \tau x_1$$

$$x_1 = \tau x_2$$

$$x_2 = \tau x_3 \qquad \textbf{Setze} \quad x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = \tau \;,\; x_1 = \tau^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind die **linear unabhängigen** Vektoren $\begin{pmatrix} \tau_1^2 \\ \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \tau_2^2 \\ \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{\tau_2}^2 \\ \overline{\tau_2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Begründung der linearen Unabhängigkeit :

$$u\begin{pmatrix}\tau_1^2\\ \tau_1\\ 1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\tau_1^2\\ \tau_1\\ 1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}\overline{\tau_2}^2\\ \overline{\tau_2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\tau_1^2 u + \tau_2^2 v + \overline{\tau_2}^2 w = 0$$

$$\tau_1 u + \tau_2 v + \overline{\tau_2} w = 0$$

$$1u + 1v + 1w = 0$$

Falls $\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \neq 0$ gälte

$$u = \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}0 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ 0 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}} = 0$$

$$v = \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & 0 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & 0 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}} = 0$$

$$w = \frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & 0\\ \tau_1 & \tau_2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}} = 0 \quad ,$$

und das hieße, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}\tau_1^2\\ \tau_1\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\tau_2^2\\ \tau_2\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\overline{\tau_2}^2\\ \overline{\tau_2}\\ 1\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Es bleibt also zu zeigen , dass $\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2\\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \neq 0$ ist :

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tau_1^2(\tau_2-\overline{\tau}_2) - \tau_2^2(\tau_1-\overline{\tau}_2) + \overline{\tau}_2^{\,2}(\tau_1-\tau_2)$$

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tau_1^2(\tau_2-\overline{\tau}_2) + \tau_2^2(\overline{\tau}_2-\tau_1) + \overline{\tau}_2^{\,2}(\tau_1-\tau_2)$$

Man zeigt nun, dass $\tau_1^2(\tau_2-\overline{\tau}_2) + \tau_2^2(\overline{\tau}_2-\tau_1) + \overline{\tau}_2^{\,2}(\tau_1-\tau_2) = -(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)$ ist :

$$\text{linke Seite} = -(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)$$

$$\text{linke Seite} = -\left(\tau_1\tau_2 - \tau_1\overline{\tau}_2 - \tau_2^2 + \tau_2\overline{\tau}_2\right)(\overline{\tau}_2-\tau_1)$$

$$\text{linke Seite} = -\left(\tau_1\tau_2\overline{\tau}_2 - \tau_1\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_2^2\overline{\tau}_2 + \tau_2\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_1^2\tau_2 + \tau_1^2\overline{\tau}_2 + \tau_1\tau_2^2 - \tau_1\tau_2\overline{\tau}_2\right)$$

$$\text{linke Seite} = -\left(\cancel{\tau_1\tau_2\overline{\tau}_2} - \tau_1\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_2^2\overline{\tau}_2 + \tau_2\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_1^2\tau_2 + \tau_1^2\overline{\tau}_2 + \tau_1\tau_2^2 - \cancel{\tau_1\tau_2\overline{\tau}_2}\right)$$

$$\text{linke Seite} = -\left(-\tau_1\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_2^2\overline{\tau}_2 + \tau_2\overline{\tau}_2^{\,2} - \tau_1^2\tau_2 + \tau_1^2\overline{\tau}_2 + \tau_1\tau_2^2\right)$$

$$\text{linke Seite} = \underline{\tau_1\overline{\tau}_2^{\,2}} + \underline{\tau_2^2\overline{\tau}_2} - \underline{\tau_2\overline{\tau}_2^{\,2}} + \underline{\tau_1^2\tau_2} - \underline{\tau_1^2\overline{\tau}_2} - \underline{\tau_1\tau_2^2}$$

$$\text{linke Seite} = \tau_1^2(\tau_2-\overline{\tau}_2) + \tau_2^2(\overline{\tau}_2-\tau_1) + \overline{\tau}_2^{\,2}(\tau_1-\tau_2)$$

Also ist $\boxed{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)}$.

Angenommen, $\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1) = 0$.

Dann müsste mindestens eine der Faktoren gleich Null sein, das hieße zwei der drei Nullstellen müssten gleich sein, im Widerspruch, dass τ_1 reell und τ_1 , τ_2 konjugiert komplex sind. .

Die Eigenvektoren werden nun als Basisvektoren herangezogen und die Matrix der Linearen Abbildung T bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} \tau_1^2 \\ \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \tau_2^2 \\ \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{\tau_2}^{\,2} \\ \overline{\tau_2} \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet . Dazu benötigt man die Matrizen der Basistransformationen S , S^{-1} .

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \arrow[r, "F \;;\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}"] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] & \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \arrow[r, "D"'] \arrow[u, shift right, "S"'] & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}
$$

Basistransformation S :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} \tau_1^2 \\ \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} \tau_2^2 \\ \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} \overline{\tau_2}^{\,2} \\ \overline{\tau_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S \;;\; \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Basistransformation S^{-1} **:**

$$\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^2 \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} x_1 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^2 \\ x_2 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ x_3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^2 \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$y_1 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \operatorname{Det}\begin{bmatrix} x_1 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^2 \\ x_2 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ x_3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\tau_2-\overline{\tau}_2)x_1 - \tau_2^2(x_2-\overline{\tau}_2 x_3) + \overline{\tau}_2^2(x_2-\tau_2 x_3)\Big)$$

$$y_1 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\tau_2-\overline{\tau}_2)x_1 - (\tau_2^2-\overline{\tau}_2^2)x_2 + (\tau_2^2\overline{\tau}_2-\tau_2\overline{\tau}_2^2)x_3\Big)$$

$$\underline{y_1 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\tau_2-\overline{\tau}_2)x_1 - (\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2)x_2 + \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2)x_3\Big)}$$

$$y_2 = \frac{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & x_1 & \overline{\tau}_2^2 \\ \tau_1 & x_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & x_3 & 1 \end{bmatrix}}{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^2 \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & x_1 & \overline{\tau}_2^2 \\ \tau_1 & x_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big(\tau_1^2(x_2-\overline{\tau}_2 x_3) - x_1(\tau_1-\overline{\tau}_2) + \overline{\tau}_2^2(\tau_1 x_3-x_2)\Big)$$

$$y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\overline{\tau}_2-\tau_1)x_1 - (\overline{\tau}_2^2-\tau_1^2)x_2 + (\overline{\tau}_2^2\tau_1-\overline{\tau}_2\tau_1^2)x_3\Big)$$

$$y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\overline{\tau}_2-\tau_1)x_1 - (\overline{\tau}_2^2-\tau_1^2)x_2 + (\overline{\tau}_2^2\tau_1-\overline{\tau}_2\tau_1^2)x_3\Big)$$

$$\underline{y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \Big((\overline{\tau}_2-\tau_1)x_1 - (\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1)x_2 + \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1)x_3\Big)}$$

$$y_3 = \frac{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & x_1 \\ \tau_1 & \tau_2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{bmatrix}}{\operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$y_3 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \operatorname{Det}\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & x_1 \\ \tau_1 & \tau_2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left(\tau_1^2(\tau_2 x_3 - x_2) - \tau_2^2(\tau_1 x_3 - x_2) + x_1(\tau_1-\tau_2)\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left((\tau_1-\tau_2)x_1 - (\tau_1^2-\tau_2^2)x_2 + (\tau_1^2\tau_2-\tau_1\tau_2^2)x_3\right)$$

$$\underline{y_3 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left((\tau_1-\tau_2)x_1 - (\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2)x_2 + \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)x_3\right)}$$

Insgesamt haben wir also

$$y_1 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left((\tau_2-\overline{\tau}_2)x_1 - (\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2)x_2 + \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2)x_3\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left((\overline{\tau}_2-\tau_1)x_1 - (\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1)x_2 + \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1)x_3\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \left((\tau_1-\tau_2)x_1 - (\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2)x_2 + \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)x_3\right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S^{-1} \quad ; \quad \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}}$$

$$D \;=\; S^{-1} \circ T \circ S$$

$$[D] \;=\; \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau_2})(\overline{\tau_2}-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau_2} & -(\tau_2-\overline{\tau_2})(\tau_2+\overline{\tau_2}) & \tau_2\overline{\tau_2}(\tau_2-\overline{\tau_2}) \\ \overline{\tau_2}-\tau_1 & -(\overline{\tau_2}-\tau_1)(\overline{\tau_2}+\tau_1) & \overline{\tau_2}\tau_1(\overline{\tau_2}-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau_2}^2 \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur besseren Lese- und Umformungsverständnis ist es sinnvoll folgende Umbenennungen zu machen :

$$a := \tau_1 \qquad b := \tau_2 \qquad c := \overline{\tau_2}$$

$$[D] \;=\; \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{bmatrix} b-c & -(b-c)(b+c) & bc(b-c) \\ c-a & -(c-a)(c+a) & ca(c-a) \\ a-b & -(a-b)(a+b) & ab(a-b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & b_2^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D] \;=\; \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{bmatrix} b-c & -(b-c)(b+c) & bc(b-c) \\ c-a & -(c-a)(c+a) & ca(c-a) \\ a-b & -(a-b)(a+b) & ab(a-b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+a+1 & b^2+b+1 & c^2+c+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$[D] \;=\; \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{bmatrix} b-c & -(b-c)(b+c) & bc(b-c) \\ c-a & -(c-a)(c+a) & ca(c-a) \\ a-b & -(a-b)(a+b) & ab(a-b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

Berechnung der einzelnen Elemente der 3x3 - Matrix $[D]$:

$$d_{11} \;=\; \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left((b-c)a^3 \;-\; (b-c)(b+c)a^2 \;+\; bc(b-c)a\right)$$

$$d_{11} \;=\; \frac{(b-c)a}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left(a^2 \;-\; (b+c)a \;+\; bc\right)$$

$$d_{11} \;=\; \frac{a}{-(a-b)(c-a)} \left(a^2 \;-\; (b+c)a \;+\; bc\right)$$

$$d_{11} \;=\; \frac{a}{a^2 \;-\; ab \;-\; ca \;+\; bc} \left(a^2 \;-\; ab \;-\; ca \;+\; bc\right)$$

$$d_{11} \;=\; \frac{a}{a^2 \;-\; ab \;-\; ca \;+\; bc} \left(a^2 \;-\; ab \;-\; ca \;+\; bc\right)$$

$$\boxed{d_{11} \;=\; a}$$

$$d_{12} = \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left((b-c)b^3 - (b-c)(b+c)b^2 + bc(b-c)b\right)$$

$$d_{12} = \frac{(b-c)b}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left(b^2 - (b+c)b + bc\right)$$

$$d_{12} = \frac{(b-c)b}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left(b^2 - b^2 - bc + bc\right)$$

$$\boxed{d_{12} = 0}$$

$$d_{13} = \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left((b-c)c^3 - (b-c)(b+c)c^2 + bc(b-c)c\right)$$

$$d_{13} = \frac{(b-c)c}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left(c^2 - (b+c)c + bc\right)$$

$$d_{13} = \frac{(b-c)c}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left(c^2 - bc - c^2 + bc\right)$$

$$\boxed{d_{13} = 0}$$

Zur Berechnung der Elemente in der 2. und 3. Zeile der Matrix $[D]$ nutzt man aus, dass die Terme bezüglich a, b, c zyklisch sind :

Beispiel :

Ersetzt man in d_{11} b, c, a zyklisch durch c, a, b , so erhält man aus

$$d_{11} = \frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left((b-c)a^3 - (b-c)(b+c)a^2 + bc(b-c)a\right)$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)} \left((c-a)b^3 - (c-a)(c+a)b^2 + ca(c-a)b\right) = d_{22}$$, also gerade den

Ausdruck für d_{22} .

Ergebnis : Die Matrix $[D]$ hat Diagonalgestalt

$$[D] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[D] = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\tau_2} \end{bmatrix}}$$

Nun kann man umgkehrt die Abbildung T wie folgt darstellen :

$$T = S \circ D \circ S^{-1}$$

$$T^n = \left(S \circ D \circ S^{-1}\right)^n$$
$$T^n = \left(S \circ D \circ S^{-1}\right) \circ \left(S \circ D \circ S^{-1}\right) \circ \ldots \circ \left(S \circ D \circ S^{-1}\right) \circ \left(S \circ D \circ S^{-1}\right)$$

$$T = S \circ D \circ \left[S^{-1} \circ S\right) \circ D \circ \left(S^{-1} \circ S\right) \quad \ldots \quad \left(S^{-1} \circ S\right) \circ D \circ \left(S^{-1} \circ S\right) \circ D \circ S^{-1}$$

$$T^n = S \circ D^n \circ S^{-1}$$

$$[T]^n = [S]\,[D]^n\,[S^{-1}]$$

Wegen der Diagonalgestalt von Matrix D ist $[D]^n = \begin{bmatrix} \tau_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\tau}_2 \end{bmatrix}^n$ und

$$[T]^n = \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_2^2 & \overline{\tau}_2^{\,2} \\ \tau_1 & \tau_2 & \overline{\tau}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\tau}_2^{\,n} \end{bmatrix} \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}$$

$$[T]^n = \begin{bmatrix} \tau_1^{n+2} & \tau_2^{n+2} & \overline{\tau}_2^{\,n+2} \\ \tau_1^{n+1} & \tau_2^{n+1} & \overline{\tau}_2^{\,n+1} \\ \tau_1^n & \tau_2^n & \overline{\tau}_2^{\,n} \end{bmatrix} \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}$$

$$[T]^n = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_1^{n+2} & \tau_2^{n+2} & \overline{\tau}_2^{\,n+2} \\ \tau_1^{n+1} & \tau_2^{n+1} & \overline{\tau}_2^{\,n+1} \\ \tau_1^n & \tau_2^n & \overline{\tau}_2^{\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_1^{n+2} & \tau_2^{n+2} & \overline{\tau}_2^{\,n+2} \\ \tau_1^{n+1} & \tau_2^{n+1} & \overline{\tau}_2^{\,n+1} \\ \tau_1^n & \tau_2^n & \overline{\tau}_2^{\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}$$

Andererseits haben wir gezeigt, dass

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} t_{n+1} & t_n & t_{n-1} \\ t_n & t_n & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} \end{bmatrix} \quad \text{für alle} \quad n \geq 3$$

Deshalb folgt

$$\begin{bmatrix} t_{n+1} & t_n & t_{n-1} \\ t_n & t_{n-1} & t_{n-2} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} \end{bmatrix} = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\overline{\tau}_2-\tau_1)} \begin{bmatrix} \tau_1^{n+2} & \tau_2^{n+2} & \overline{\tau}_2^{\,n+2} \\ \tau_1^{n+1} & \tau_2^{n+1} & \overline{\tau}_2^{\,n+1} \\ \tau_1^n & \tau_2^n & \overline{\tau}_2^{\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_2-\overline{\tau}_2 & -(\tau_2-\overline{\tau}_2)(\tau_2+\overline{\tau}_2) & \tau_2\overline{\tau}_2(\tau_2-\overline{\tau}_2) \\ \overline{\tau}_2-\tau_1 & -(\overline{\tau}_2-\tau_1)(\overline{\tau}_2+\tau_1) & \overline{\tau}_2\tau_1(\overline{\tau}_2-\tau_1) \\ \tau_1-\tau_2 & -(\tau_1-\tau_2)(\tau_1+\tau_2) & \tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2) \end{bmatrix}$$

Durch Vergleich der Elemente auf der linken Seite mit der entsprechenden Elementen auf der rechten Seite ergibt sich zum Beispiel :

$$\boxed{t_n = \frac{1}{-(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\overline{\tau_2})(\overline{\tau_2}-\tau_1)} \left(\tau_1^{n+1}(\tau_2-\overline{\tau_2}) + \tau_2^{n+1}(\overline{\tau_2}-\tau_1) + \overline{\tau_2}^{n+1}(\tau_1-\tau_2)\right)}$$

Diese Formel ist eine **Binet- ähnliche Formel für Tribonaccizahlen** , mit der man die n-te Tribonaccizahl aus den Nullstellen τ_1 , τ_2 , $\overline{\tau_2}$ der Gleichung $\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0$ berechnen kann .

Für die Quotientenfolge aufeinanderfolgender Tribonaccizahlen erhält man nun :

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\tau_1^{n+2}(\tau_2-\overline{\tau_2}) + \tau_2^{n+2}(\overline{\tau_2}-\tau_1) + \overline{\tau_2}^{n+2}(\tau_1-\tau_2)}{\tau_1^{n+1}(\tau_2-\overline{\tau_2}) + \tau_2^{n+1}(\overline{\tau_2}-\tau_1) + \overline{\tau_2}^{n+1}(\tau_1-\tau_2)}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\tau_1 + \tau_2\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\overline{\tau_2}-\tau_1}{\tau_2-\overline{\tau_2}} + \overline{\tau_2}\left(\frac{\overline{\tau_2}}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_2-\overline{\tau_2}}}{1 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\overline{\tau_2}-\tau_1}{\tau_2-\overline{\tau_2}} + \left(\frac{\overline{\tau_2}}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_2-\overline{\tau_2}}}$$

Um den Grenzwert der Quotientenfolge zu berechnen, sind folgende Abschätzungen notwendig :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{-\frac{1}{2}(\tau_1 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{6}(3\tau_1 - 1)\, i}{\tau_1}$$

(vgl. S. 31)

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1-1}{\tau_1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{3\tau_1-1}{\tau_1}\right) i$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1-1}{\tau_1}\right)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{3\tau_1-1}{\tau_1}\right)\right]^2}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{\frac{(\tau_1-1)^2}{4\tau_1^2} + \frac{3(3\tau_1-1)^2}{36\tau_1^2}}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{\frac{9(\tau_1-1)^2 + 3(3\tau_1-1)^2}{36\tau_1^2}}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{\frac{9\tau_1^2-18\tau_1+9 \quad + \quad 27\tau_1^2-18\tau_1+3}{36\tau_1^2}}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{\frac{36\tau_1^2 - 36\tau_1 + 12}{36\tau_1^2}}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{1 - \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{3\tau_1^2}}$$

$$\left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| = \sqrt{1 - \frac{1}{\tau_1}\left(1 - \frac{1}{3\tau_1}\right)}$$

Wegen

$$\tau_1 > 1 > 0 \qquad\qquad 3\tau_1 > 1 > 0$$

$$\underline{0 < \frac{1}{\tau} < 1} \qquad\qquad 0 < \frac{1}{3\tau_1} < 1$$

$$-1 < -\frac{1}{3\tau_1} < 0$$

$$\underline{0 < 1 - \frac{1}{3\tau_1} < 1}$$

folgt

$$0 < \frac{1}{\tau_1}\left(1 - \frac{1}{3\tau_1}\right) < 1$$

$$-1 < -\frac{1}{\tau_1}\left(1 - \frac{1}{3\tau_1}\right) < 0$$

$$0 < 1-\frac{1}{\tau_1}\left(1 - \frac{1}{3\tau_1}\right) < 1$$

$$0 < \sqrt{1 - \frac{1}{\tau_1}\left(1 - \frac{1}{3\tau_1}\right)} < 1$$

$$\boxed{0 < \left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| < 1}$$

Nach der Formel von **Moivre** ist

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| \left(\cos(\varphi) + \cos(\varphi)\ i\right)$$

$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^n = \left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right|^n \left(\cos(n\varphi) + \cos(n\varphi)\ i\right)$$

Wegen $0 < \left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\tau_2}{\tau_1}\right|^n = 0$ und $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^n = 0}$

Analog zeigt man, dass $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\overline{\tau_2}}{\tau_1}\right)^n = 0}$

Damit erhalten wir nun der Grenzwert der Quotientenfolge zweier aufeinanderfolgender Tribonaccizahlen :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_1 + \tau_2\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\overline{\tau_2}-\tau_1}{\tau_2-\overline{\tau_2}} + \overline{\tau_2}\left(\frac{\overline{\tau_2}}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_2-\overline{\tau_2}}}{1 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\overline{\tau_2}-\tau_1}{\tau_2-\overline{\tau_2}} + \left(\frac{\overline{\tau_2}}{\tau_1}\right)^{n+1} \frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_2-\overline{\tau_2}}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \tau_1}$$

Anhang

Lösung von kubischen Gleichungen (vgl.: [2] , Seite 108 ff)

Die Gleichung $\boxed{z^3 - a = 0}$ in $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$

$$z^3 - a = 0$$
$$z^3 = a$$
$$\boxed{z_1 = \sqrt[3]{a}}$$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{l}
\left(z^3 - a\right) : \left(z - z_1\right) = z^2 + z_1 z + z_1^2 \\
-\left[z^3 - z_1 z^2\right] \\
\hline
\qquad z_1 z^2 - a \\
\qquad -\left[z_1 z^2 - z_1^2 z\right] \\
\hline
\qquad\qquad z_1^2 z - a \\
\qquad\qquad -\left[z_1^2 z - z_1^3\right] \\
\hline
\qquad\qquad\qquad z_1^3 - a \quad \text{Rest Null}
\end{array}$$

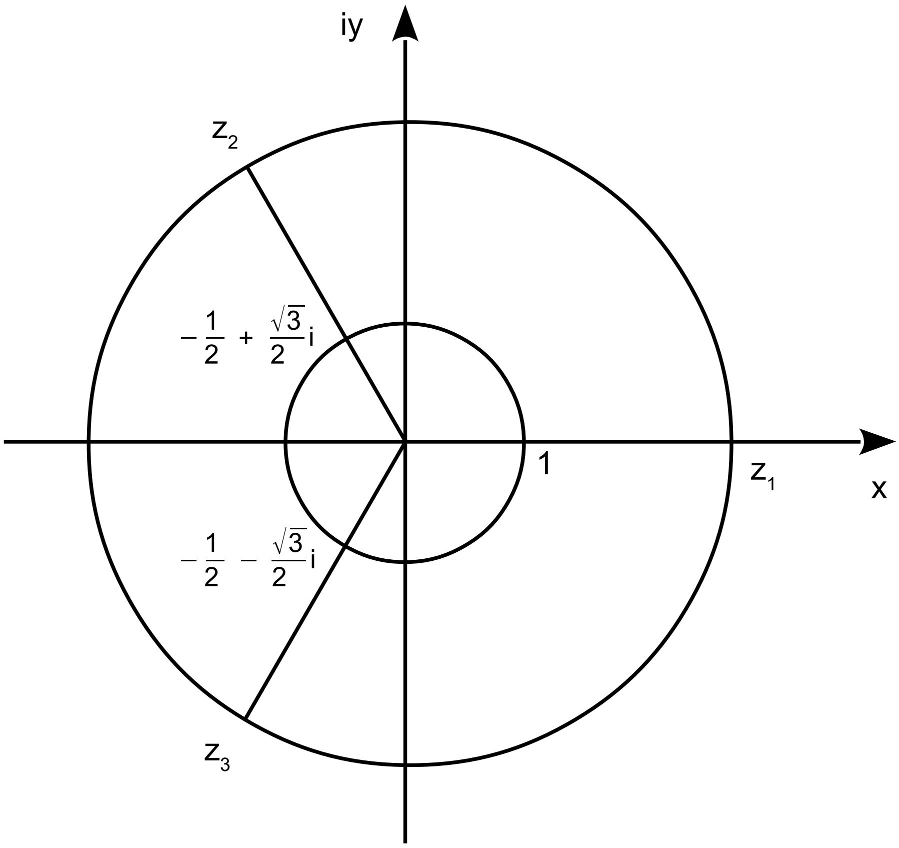
Faktorisierung :

$$z^3 - a = \left(z - z_1\right)\left(z^2 + z_1 z + z_1^2\right)$$

Weitere Lösungen :

$$z^2 + z_1 z + z_1^2 = 0$$
$$z_{2/3} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - z_1^2}$$
$$z_{2/3} = -\frac{z_1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \; z_1$$
$$\boxed{z_{2/3} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z_1}$$

Darstellung der Lösungen der kubischen Gleichung $z^3 = a$ in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$:



$\underline{z_1 = \sqrt[3]{a}}$ $\underline{z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1}$ $\underline{z_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_1}$

Die (reduzierte) kubische Gleichung $\boxed{z^3 + pz + q = 0}$ in $\mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{R}$

$$z^3 + pz + q = 0$$

Setze $z = u + v$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + 3uv(u + v) + p(u+v) = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$$

Setze $3uv + p = 0$

$$3uv + p = 0 \quad \Rightarrow \quad uv = -\frac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{4u^3v^3 = -4\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u^3 + v^3 = -q} \quad \Rightarrow \quad \underline{u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4u^3v^3 = -4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 \end{array}\right] \quad -$$

$$u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\left(u^3 - v^3\right)^2 = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\left.\begin{array}{l} u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{array}\right] \quad + \; -$$

$$2u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \Rightarrow \quad u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$-2v^3 = q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \Rightarrow \quad v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{oder} \qquad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{oder} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\underline{u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \qquad \underline{u_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) u_1} \qquad \underline{u_3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) u_1}$$

$$\underline{v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \qquad \underline{v_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) v_1} \qquad \underline{v_3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) v_1}$$

Lösungen der (reduzierten) kubischen Gleichung $\boxed{z^3 + pz + q = 0}$

1. Fall : $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$

Wegen der Bedingung $uv = -\frac{p}{3}$ folgen nur die 3 Lösungen

$$\underline{z_1 = u_1+v_1} \qquad \text{mit} \quad u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\underline{z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$ **Cardanische Formel**

$$z_2 = u_2+v_3$$
$$z_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)v_1$$

$$\underline{z_2 = -\frac{u_1+v_1}{2} + \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i}$$

$$z_3 = u_3+v_2$$
$$z_3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)v_1$$

$$\underline{z_3 = -\frac{u_1+v_1}{2} - \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i}$$

2. Fall : $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$

Die Mathematiker des 15. und 16. Jahrhunderts bezeichneten diesen „nicht zurückzuführenden Fall“ als **Casus irreducibilis** .

Wenn $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, ist sicher $p < 0$, etwa $p = -p'$.

Die reduzierte Gleichung geht über in $z^3 - p'z + q = 0$, $\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$.

Damit folgt für den Radikanden der 3. Wurzel von u_1 , v_1 **:**

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\left[\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2\right]}} \qquad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\left[\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2\right]}}$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\, i} \qquad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\, i}$$

Nach der Formel von **Moivre** kann der komplex Radikand wie folgt ausgedrückt werden :

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}\, i = \rho\left(\cos(\varphi) \pm \sin(\varphi)\, i\right)$$

$$\text{mit} \quad \rho = \left(\frac{p'}{3}\right)^3 \quad , \quad \cos(\varphi) = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\frac{p'}{3}\right)^3} \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{\left(\frac{p'}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(\frac{p'}{3}\right)^3}$$

Damit erhält man weiter

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \pm \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) i\right) \qquad v_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \mp \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) i\right)$$

$$y_1 = u_1 + v_1$$

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \pm \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) i\right) + \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \mp \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) i\right)$$

$$\boxed{y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

Die anderen beiden Wurzel lauten wegen $3 \cdot 120° = 360°$, $3 \cdot 240° = 720°$:

$$\boxed{y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right)}$$

$$\boxed{y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right)}$$

Die kubische Gleichung $\boxed{y^3 + ry^2 + sy + t = 0}$ in $\mathbb{C}$, $r,s,t \in \mathbb{R}$

$$y^3 + ry^2 + sy + t = 0$$

Substitution $y = z - \frac{r}{3}$

$$y^3 + ry^2 + sy + t = 0$$

$$\left(z - \frac{r}{3}\right)^3 + r\left(z - \frac{r}{3}\right)^2 + s\left(z - \frac{r}{3}\right) + t = 0$$

$$z^3 - \cancel{3\left(\frac{r}{3}\right)z^2} + 3\left(\frac{r}{3}\right)^2 z - \left(\frac{r}{3}\right)^3 + \cancel{rz^2} - \frac{2r^2}{3}z + r\left(\frac{r}{3}\right)^2 + sz - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$z^3 + 3\left(\frac{r}{3}\right)^2 z - \left(\frac{r}{3}\right)^3 - \frac{2r^2}{3}z + r\left(\frac{r}{3}\right)^2 + sz - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$z^3 + sz + 3\left(\frac{r}{3}\right)^2 z - \frac{2r^2}{3}z - \left(\frac{r}{3}\right)^3 + r\left(\frac{r}{3}\right)^2 - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$z^3 + sz - \frac{r^2}{3}z + \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t = 0$$

$$z^3 + \left(s - \frac{r^2}{3}\right)z + \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t = 0$$

Reduzierte kubische Gleichung

$$\boxed{z^3 + pz + q = 0} \quad \text{mit} \quad p = s - \frac{r^2}{3} \quad , \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t$$

Die Lösungen der reduzierten kubischen Gleichung für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ sind nach den vorigen Überlegungen z_1 , z_2 , z_3 .

Daraus ergeben sich für die kubische Gleichung $\boxed{y^3 + ry^2 + sy + t = 0}$ die Lösungen $\underline{y_1 = z_1 - \frac{r}{3}}$, $\underline{y_2 = z_2 - \frac{r}{3}}$, $\underline{y_3 = z_3 - \frac{r}{3}}$.

Die kubische Gleichung $\boxed{\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0}$ in $\mathbb{C}$

$r = -1 \quad s = -1 \quad t = -1$

$$\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0$$

Substitution $\tau = z - \frac{r}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\tau = z + \frac{1}{3}}$

Dadurch erhält man die **reduzierte kubische Gleichung**

$$z^3 + pz + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = s - \frac{r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{st}{3} + t \quad \text{und} \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$$

$$\underline{p = -\frac{4}{3}} \qquad \underline{q = -\frac{38}{27}} \qquad \left(-\frac{19}{27}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \geq 0$$

$$\underline{\frac{297}{729} \geq 0}$$

Die Lösungen sind

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{297}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{297}{729}}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{9 \cdot 33}{9 \cdot 81}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{9 \cdot 33}{9 \cdot 81}}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{33}{81}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{33}{81}}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \frac{1}{9}\sqrt{33}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \frac{1}{9}\sqrt{33}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \frac{3}{27}\sqrt{33}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \frac{3}{27}\sqrt{33}}$$

$$z_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$$

$$\underline{z_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right)}$$

$$\underline{z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1}$$

$$\underline{z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1}$$

Durch Resubstitution $\tau = z + \dfrac{1}{3}$ erhält man die Lösungen

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}$$

$$\underline{\tau_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1\right) \approx 1{,}893\,286\,755}$$

$$\underline{\tau_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1 + \frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad z_1 = \tau_1 - \frac{1}{3}$$

$$\underline{\tau_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1 + \frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad z_1 = \tau_1 - \frac{1}{3}$$

Zur numerischen Berechnung von τ_2 , $\overline{\tau_2}$ **:**

$$\tau_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1 + \frac{1}{3}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 i + \frac{1}{3}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 i$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) i$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) + \frac{2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) i$$

$$\boxed{\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) i}$$

Analog:

$$\boxed{\overline{\tau_2} = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - 2\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) i}$$

Spezielle Darstellung der Nullstellen τ_1 , τ_2 . $\overline{\tau_2}$ der Gleichung $\tau^3 - \tau^2 - \tau - 1 = 0$ in Abhängigkeit von der reellen Nullstelle :

$$\boxed{\tau_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1\right) \approx 1{,}893\,286\,755}$$

$$3\tau_1 - 1 = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}\right) i$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(3\tau_1 - 1 - 2\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\tau_1 - 1\right) i$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{6}\left(3\tau_1 - 3\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\tau_1 - 1\right) i$$

$$\boxed{\tau_2 = -\frac{1}{2}\left(\tau_1 - 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\tau_1 - 1\right) i}$$

Analog

$$\boxed{\tau_2 = -\frac{1}{2}\left(\tau_1 - 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\tau_1 - 1\right) i}$$