Catalanzahlen

Arno Fehringer

September 2021

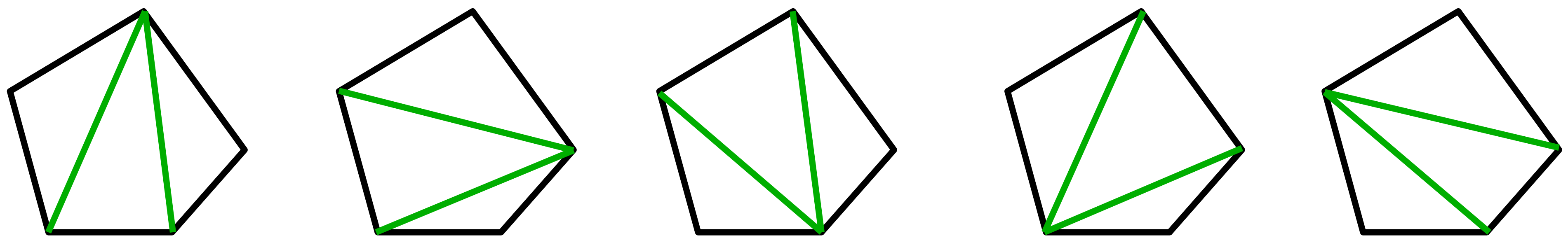
Quellen :

Berger, Peter : Kombinatorik; Skriptum PH Ludwigsburg
https://www.prof-dr-berger.de/pdf/BergerKombinatorik.pdf

Walser, Hans : Catalan-Zahlen; 29.08.2015
https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/C/Catalan/Catalan.pdf

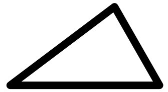
Triangulationen eines konvexen Vielecks

Beispiel : Das konvexe 5-Eck hat 5 Triangulationen

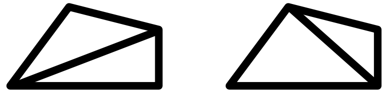


Rekursive Formel für die Anzahl der Triangulationen T(n) eines konvexen (n+1)-Ecks

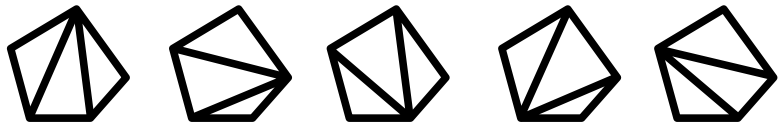
3-Eck oder (2+1)-Eck : $\underline{T(2) = 1}$



4-Eck oder (3+1)-Eck : $\underline{T(3) = 2}$



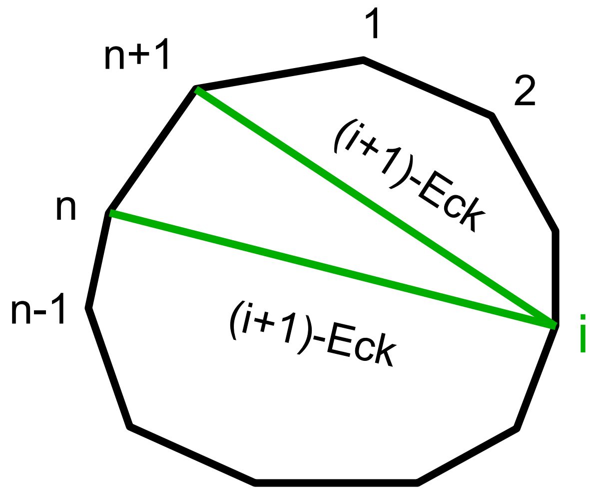
5-Eck oder (4+1)-Eck : $\underline{T(4) = 5}$



Für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ kommt das Dreieck $\Delta n(n+1)i$ in der Menge der Triangulationen des (n+1)-Ecks vor, und es teilt dieses in ein (i+1)-Eck und ein (n-i +1)-Eck mit den Triangulationen $T(i)$ und $T(n-i)$.

Für i=1 bzw. n-1 erhält man eine Zerlegung in ein (1+1)-Eck und ein (n-1+1)-Eck mit den Triangulationen $\boxed{T(1) := 1}$ und $T(n-1)$.

Deshalb gibt es jeweils $T(i) \cdot T(n-i)$ Triangulationen .



Summiert man auf, so erhält man für die Anzahl der Triangulationen des (n+1)-Ecks die rekursive Formel :

$$\boxed{T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i)}$$

Demzufolge ergäbe die rekursive Formel für das 5-Eck oder das (4+1)-Eck :

$$T(4) = T(1)T(4-1) + T(2)T(4-2) + T(3)T(4-3)$$

$$T(4) = T(1)T(3) + T(2)T(2) + T(3)T(1)$$

$$T(4) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$\underline{T(4) = 5}$$

Und weiter :

$$T(5) = T(1)T(4) + T(2)T(3) + T(3)T(2) + T(4)T(1)$$

$$T(5) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$$

$$\underline{T(5) = 14}$$

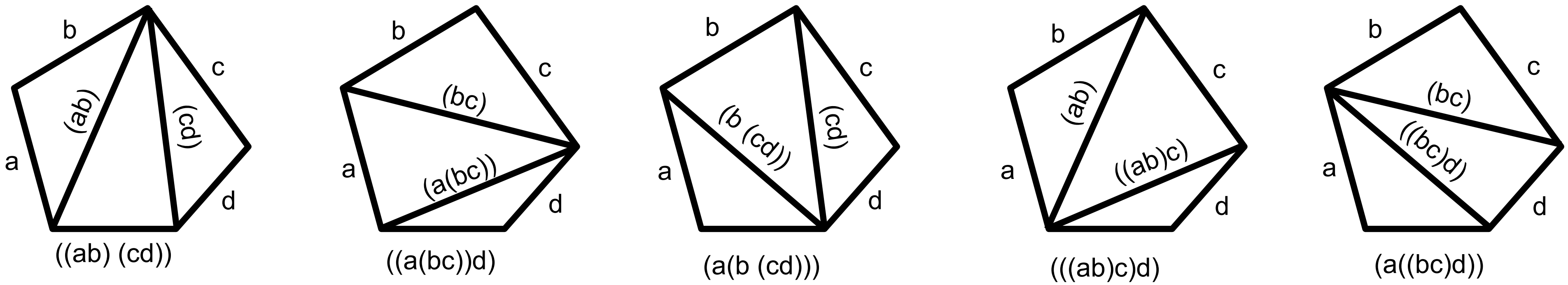
Anzahl der Triangulationen bis zum 10-Eck

2-Eck	(1+1)-Eck	T(1) := **1**
3-Eck	(2+1)-Eck	T(2) = **1**
4-Eck	(3+1)-Eck	T(3) = **2**
5-Eck	(4+1)-Eck	T(4) = **5**
6-Eck	(5+1)-Eck	T(5) = **14**
7-Eck	(6+1)-Eck	T(6) = **42**
8-Eck	(7+1)-Eck	T(7) = **132**
9-Eck	(8+1)-Eck	T(8) = **429**
10-Eck	(9+1)-Eck	T(9) = **1430**

Fünf äquivalente kombinatorische Fragestellungen , deren Lösungsmengen jeweils bijektiv sind :

I Anzahl der Triangulationen eines konvexen (n+1)-Ecks
II Anzahl der Beklammerungen eines Produktes mit n Faktoren
III Anzahl der binären Bäume mit n Blüten
IV Anzahl der Dyck-Wörter der Länge 2(n-1)
[Walther von Dyck (1856-1934)]
V Anzahl der Wege im halben (n-1)·(n-1)-Gitter

I Anzahl der Triangulationen eines konvexen (n+1)-Ecks



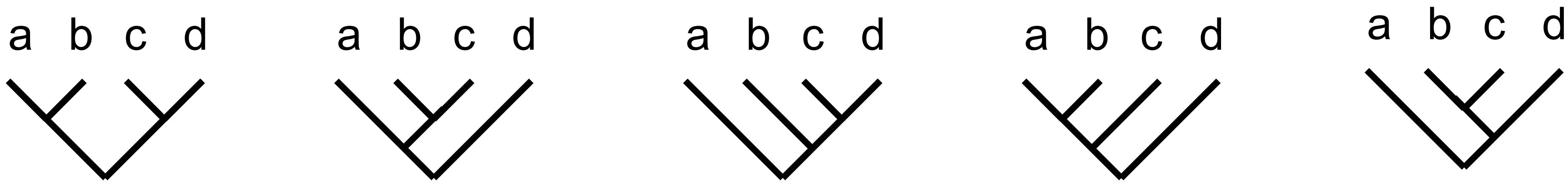
II Anzahl der Beklammerungen eines Produktes mit n Faktoren

((ab) (cd)) ((a(bc))d) (a(b (cd))) (((ab)c)d) (a((bc)d))

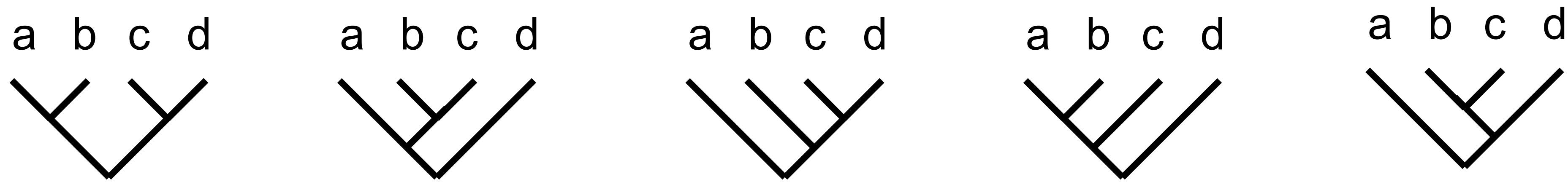
II Anzahl der Beklammerungen eines Produktes mit n Faktoren

((ab)(cd)) ((a(bc))d) (a(b(cd))) (((ab)c)d) (a((bc)d))

III Anzahl der Binärbäume mit n Blüten



III Anzahl der Binärbäume mit n Blüten



IV Anzahl der Dyck-Wörter der Länge 2(n-1)

Kodiert man die Binärbäume durch sogenannte Dyck-Wörter, welche den Pfad in einem Baum als Links/Rechts Kombinationen angeben, wobei an Verzweigungen immer zuerst der linke Ast angegeben wird. Dies ist gleichbedeutend damit, dass alle Wortfänge mehr oder gleichviel Zeichen L als R enthalten .

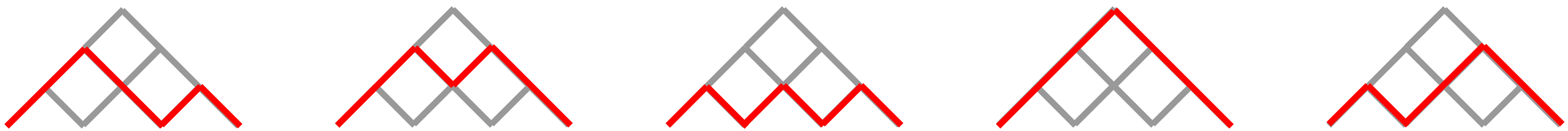
L L R R L R   L L R L R R   L R L R L R   L L L R R R   L R L L R R

IV Anzahl der Dyck-Wörter der Länge 2(n-1)

Kodiert man die Binärbäume durch sogenannte Dyck-Wörter, welche den Pfad in einem Baum als Links/Rechts Kombinationen angeben, wobei an Verzweigungen immer zuerst der linke Ast angegeben wird. Dies ist gleichbedeutend damit, dass alle Wortfänge mehr oder gleichviel Zeichen L als R enthalten .

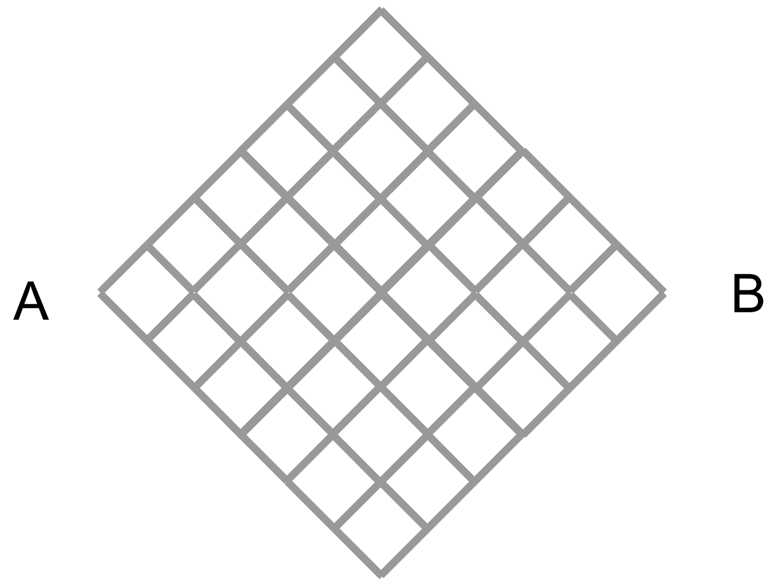
L L R R L R   L L R L R R   L R L R L R   L L L R R R   L R L L R R

V Anzahl der Wege im halben (n-1)·(n-1)-Gitter



Konstruktion einer absoluten Formel für die Anzahl der Wege im halben (n-1)·(n-1)-Gitter

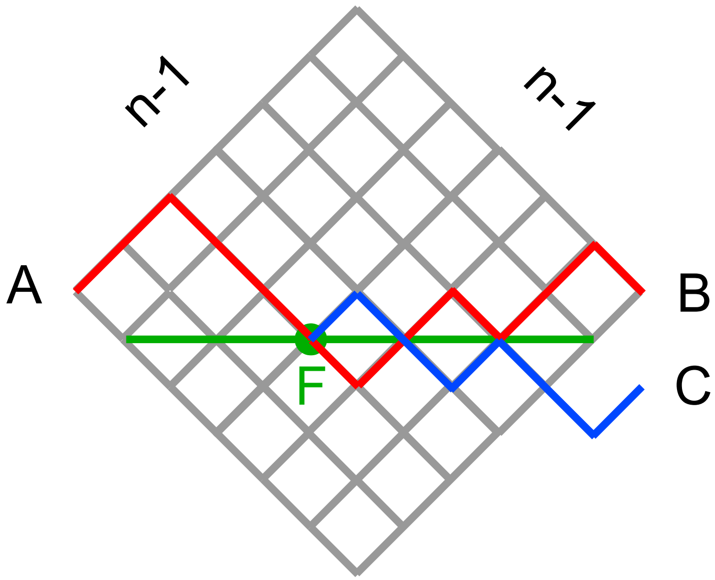
Ergänzung zum (n-1)·(n-1)-Gitter



Ein Weg von A nach B im (n-1)·(n-1)-Gitter ist eine Zeichenkette der Länge 2(n-1) mit n-1 Zeichen L und n-1 Zeichen R.

Die Zahl der Wege ist $\binom{2(n-1)}{n-1}$.

Die Menge der Wege im (n-1)·(n-1)-Gitter enthält die Wege im halben (n-1)·(n-1)-Gitter .



Ein Weg von A nach B gehört nicht zum halben (n-1)·(n-1)-Gitter, sobald er einen Gitterpunkt F auf der grünen Geraden trifft. Der Restweg von F nach B also ein „falscher" Weg.
Spiegelt man den diesen Restweg an der grünen Geraden, so erhält man einen Weg von F nach C und insgesamt einen Weg von A nach C in einem (n-2)·n-Gitter.
Jeder falsche Weg im (n-1)·(n-1)-Gitter entspricht also genau einem Weg im (n-2)·n-Gitter, deren Anzahl insgesamt $\binom{n-2\ +\ n}{n} = \binom{n-2\ +\ n}{n-2}$ beträgt .

Die gesuchte Anzahl der Wege im halben (n-1)·(n-1)-Punktgitter ist also

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{(2n-2)!\ n}{n(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!\ (n-1)}{n(n-1)!(n-1)!}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{(2n-2)!\ n - (2n-2)!\ (n-1)}{n(n-1)!(n-1)!}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{1}{n}\ \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$\boxed{\binom{2(n-1)}{n-1} - \binom{n-2+n}{n} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

Der Term $\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$ gibt die Anzahl der Lösungen der Fragestellungen I, … ,V an, speziell also die Anzahl der Triangulationen im (n+1)-Eck :

$$\boxed{T(n) = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

Definition :

Für $n \geq 2$ definiert man die **Catalanzahlen** (Eugène Charles Catalan; 1814 – 1894)

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

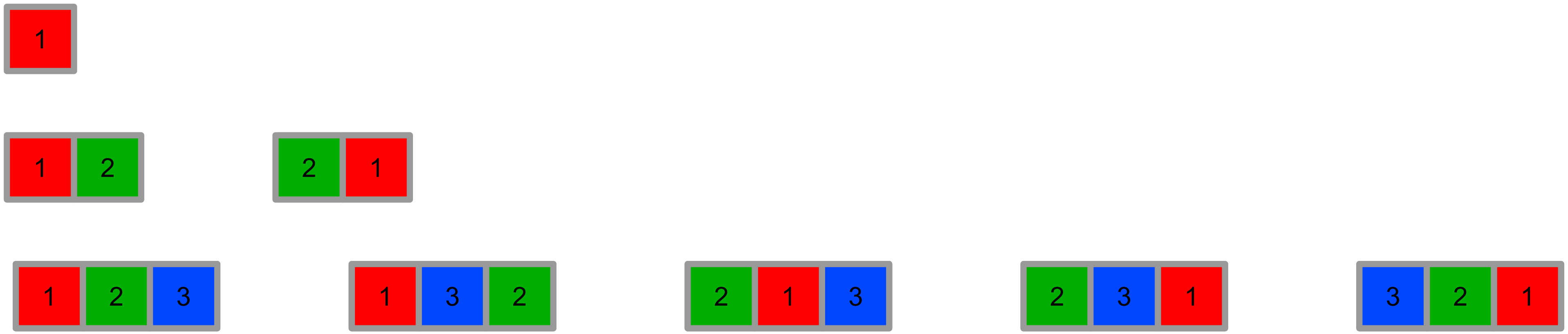
mit der rekursiven Darstellung $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}$.

Ergänzung :

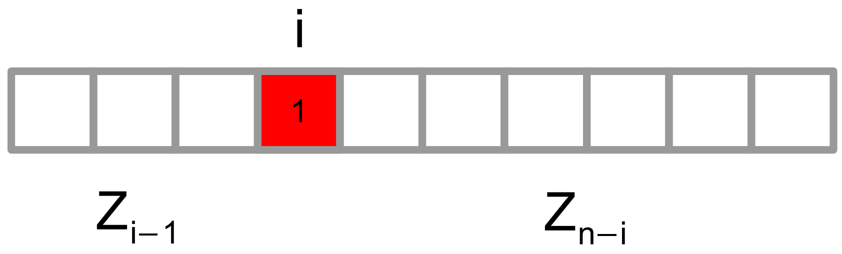
Im Skript von Hans Walser geht es um das Problem, n Elemente, zum Beispiel die Zahlen 1, 2, … , n , auf n linear angeordnete Plätze zu verteilen, nach folgender Vorschrift :

Die Zahl 1 hat freie Platzwahl; die Zahl 2 hat freie Platzwahl im Platzintervall links von 1 . Alle weiteren Zahlen habe freie Platzwahl links von der zuvor gesetzten Zahl.

Für n = 1, 2 , 3 ergeben sich die Catalanzahlen $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$, $Z_3 = 5$.



Die Zahlenfolge $\left(Z_i\right)_{i\,\in\,\mathbb{N}}$ erfüllt die gleiche rekursive Formel wie die Catalanzahlen :



$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1} Z_{n-i} \quad \text{, wobei} \quad Z_0 := 1 \qquad = \quad C_1 \ \text{ gesetzt werden muss .}$$

Es ergeben sich also :

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{1} Z_{i-1} Z_{1-i} = Z_0\ Z_0 = 1 \cdot 1 = 1 \qquad = \quad C_2$$

$$Z_2 = \sum_{i=1}^{2} Z_{i-1} Z_{2-i} = Z_0\ Z_1 + Z_1\ Z_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \qquad = \quad C_3$$

$$Z_3 = \sum_{i=1}^{3} Z_{i-1} Z_{3-i} = Z_0\ Z_2 + Z_1\ Z_1 + Z_2\ Z_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \quad = \quad C_4$$