Allgemeines Tetraeder und In- und Ankugeln

Arno Fehringer

Oktober 2021

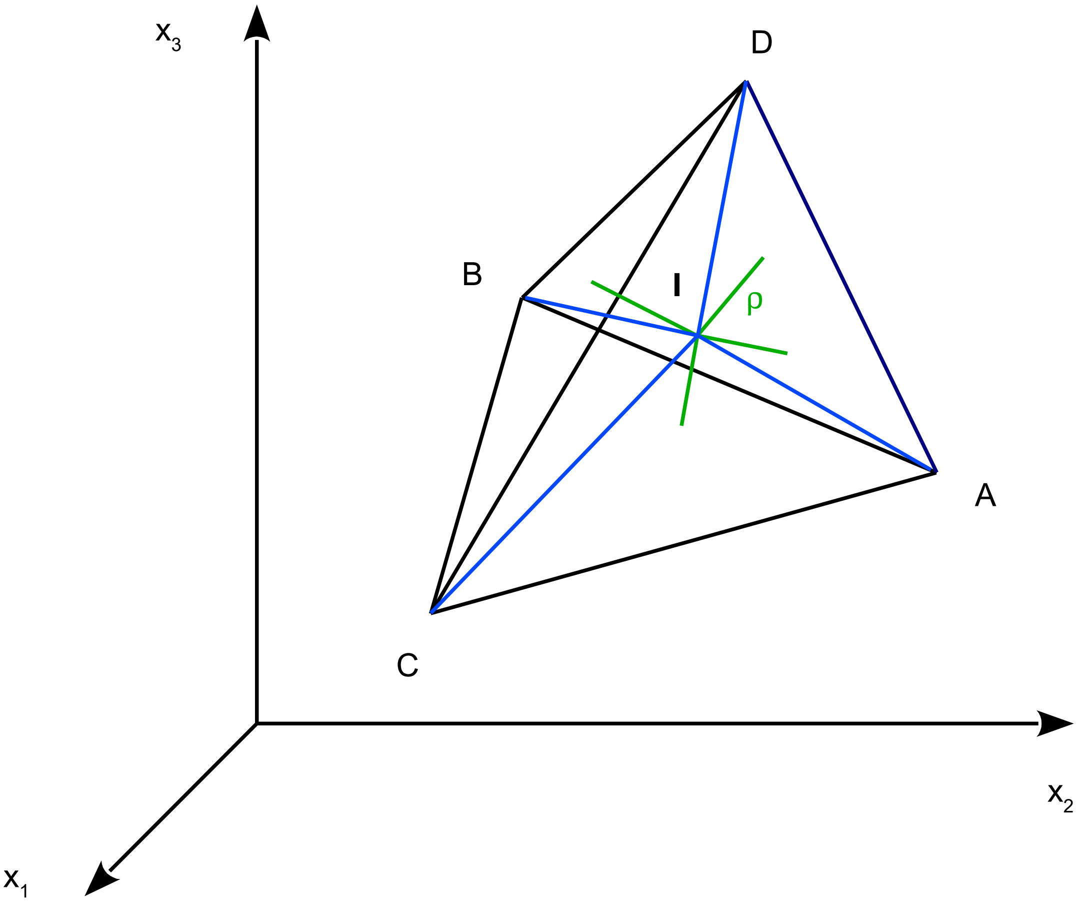
Quellen:

Cheung, Trevor Kai Hei; Ko, Hon Ching : Old and new Generalizations of classical Triangle Centers to Tetrahedra ; in : Hang Lung Mathematics Awards Vol. 8 (2018) , pp. 173 - 230

Bemerkung:
Im zitierten Skript wird die Existenz und Eindeutigkeit der In- und Ankugeln bestimmt und dass die Zentren Schnittpunkte von „Winkelteilenden“ sind. Formeln zur Berechnung von Zentren und Radien sind nicht angegeben.
Da ich in der Literatur und im Netz keine Rechnungen für die In- und Ankugelmittelpunkte und die Radien gefunden habe, habe ich dieses Skriptum erstellt.

Gegeben ist ein allgemeines Tetraeders mit den Ecken A , B , C , D

Gesucht sind Mittelpunkte und Berührradien der In- und Ankugeln.



Das Volumen des Tetraeders sei V .

Die Flächen seien nach den gegenüberliegenden Ecken benannt :

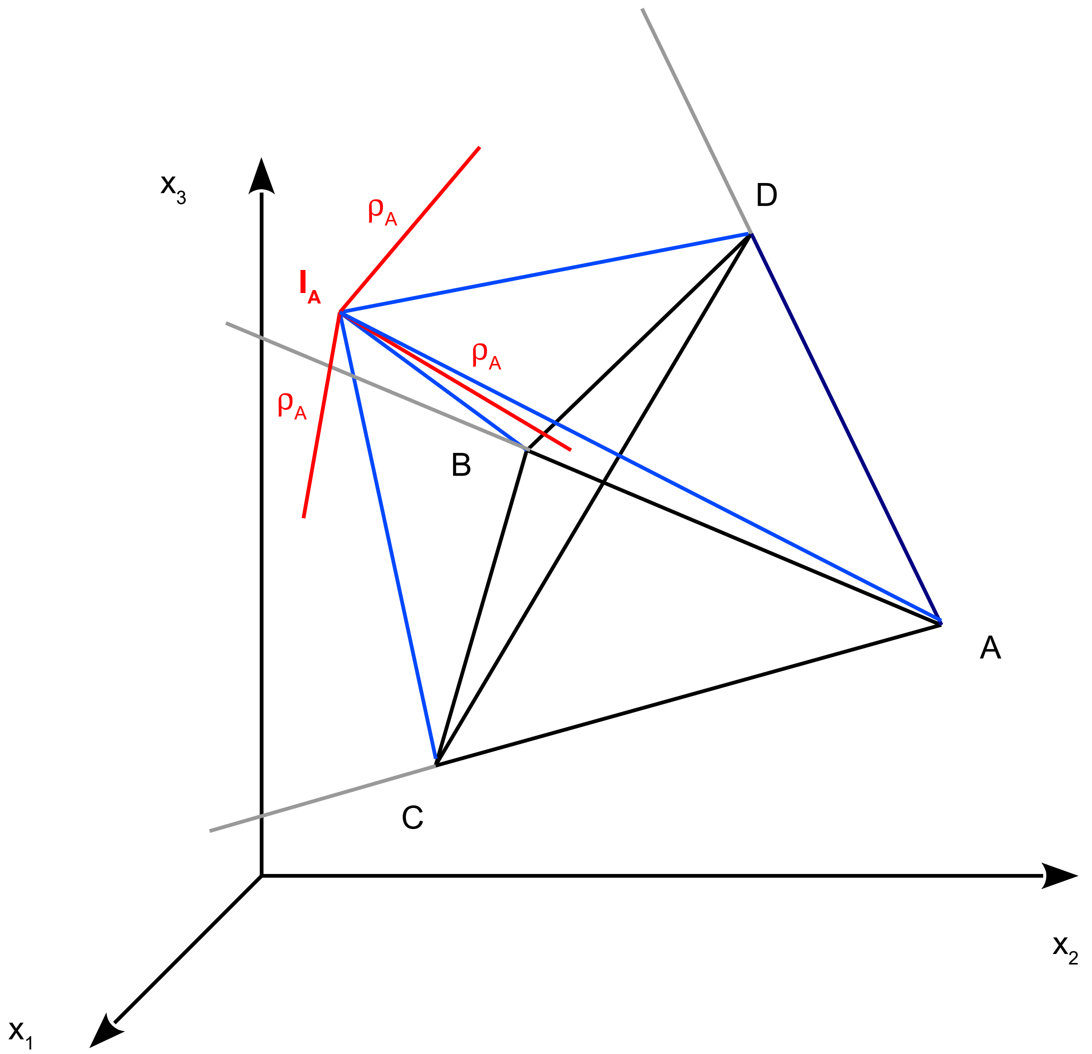
F_A , F_B , F_C , F_D

Es gilt :

$$\frac{1}{3}\left(F_A + F_B + F_C + F_D\right)\,\rho = V$$

$$\boxed{\rho = \frac{3V}{F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

Ankugeln mit Mittelpunkten I_i **und Berührradius** ρ_i **,** $i \in \{A, B, C, D\}$ **, eines allgemeines Tetraeders mit den Ecken** A **,** B **,** C **,** D **.**



Volumenbetrachtung

$$\frac{1}{3}F_B\ \rho_A + \frac{1}{3}F_c\ \rho_A + \frac{1}{3}F_D\ \rho_A = \frac{1}{3}F_A\ \rho_A + V$$

$$-\frac{1}{3}F_A\ \rho_A + \frac{1}{3}F_B\ \rho_A + \frac{1}{3}F_c\ \rho_A + \frac{1}{3}F_D\ \rho_A = V$$

$$-\frac{1}{3}F_A\ \rho_A + \frac{1}{3}F_B\ \rho_A + \frac{1}{3}F_c\ \rho_A + \frac{1}{3}F_D\ \rho_A = \frac{1}{3}F_A\ \rho + \frac{1}{3}F_B\ \rho + \frac{1}{3}F_c\ \rho + \frac{1}{3}F_D\ \rho$$

$$\frac{1}{3}\left(-F_A + F_B + F_c + F_D\right)\rho_A = \frac{1}{3}\left(F_A + F_B + F_c + F_D\right)\rho$$

$$\left(-F_A + F_B + F_c + F_D\right)\rho_A = \left(F_A + F_B + F_c + F_D\right)\rho$$

$$\boxed{\rho_A = \frac{F_A + F_B + F_c + F_D}{- F_A + F_B + F_c + F_D}\ \rho}$$

Analog :

$$\boxed{\rho_B = \frac{F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A - F_B + F_c + F_D}\ \rho}$$

$$\boxed{\rho_C = \frac{F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B - F_c + F_D}\ \rho}$$

$$\boxed{\rho_D = \frac{F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c - F_D}\ \rho}$$

Für die In- und Ankreisradien folgt folgender Zusammenhang :

$$\sum_{i \in \{A,B,C,D\}} \frac{1}{\rho_i} = \frac{- F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A - F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A + F_B - F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A + F_B + F_c - F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\sum_{i \in \{A,B,C,D\}} \frac{1}{\rho_i} = \frac{- 2F_A + F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A - 2F_B + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A + F_B - 2F_C + F_C + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{F_A + F_B + F_c - 2F_D + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

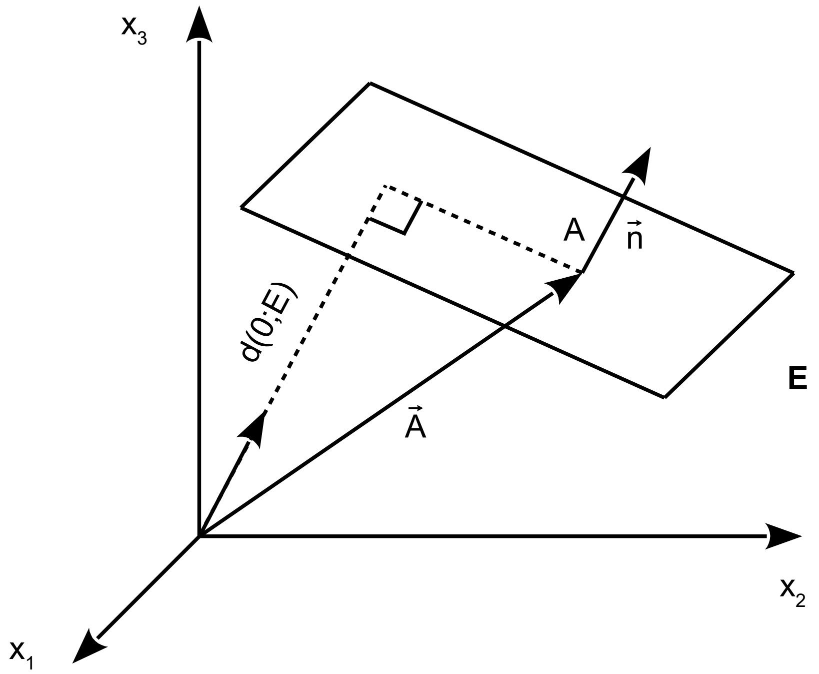
$$\sum_{i \in \{A,B,C,D\}} \frac{1}{\rho_i} = \frac{4\left(F_A + F_B + F_c + F_D\right) - 2\left(F_A + F_B + F_c + F_D\right)}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}$$

$$\sum_{i \in \{A,B,C,D\}} \frac{1}{\rho_i} = \frac{2\left(F_A + F_B + F_c + F_D\right)}{F_A + F_B + F_c + F_D} \frac{1}{\rho}$$

$$\sum_{i \in \{A,B,C,D\}} \frac{1}{\rho_i} = 2 \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B} + \frac{1}{\rho_C} + \frac{1}{\rho_D} + \quad = \frac{2}{\rho}}$$

Zwischenbetrachtung : Abstand eines Punktes von einer Ebene



Ebene E durch den Punkt $A(A_1|A_2|A_3)$, Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 1$.

Der Punkt $A+\vec{n}$ liege im entgegengesetzten Halbraum wie 0 .

$$\mathbf{E:} \qquad \vec{n}(\vec{x}-\vec{A}) = 0$$

$$\vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{A}$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3$$

Da der Term auf der rechten Seite ist positiv ist, gibt er den **Abstand des Ursprungs von der Ebene** an :

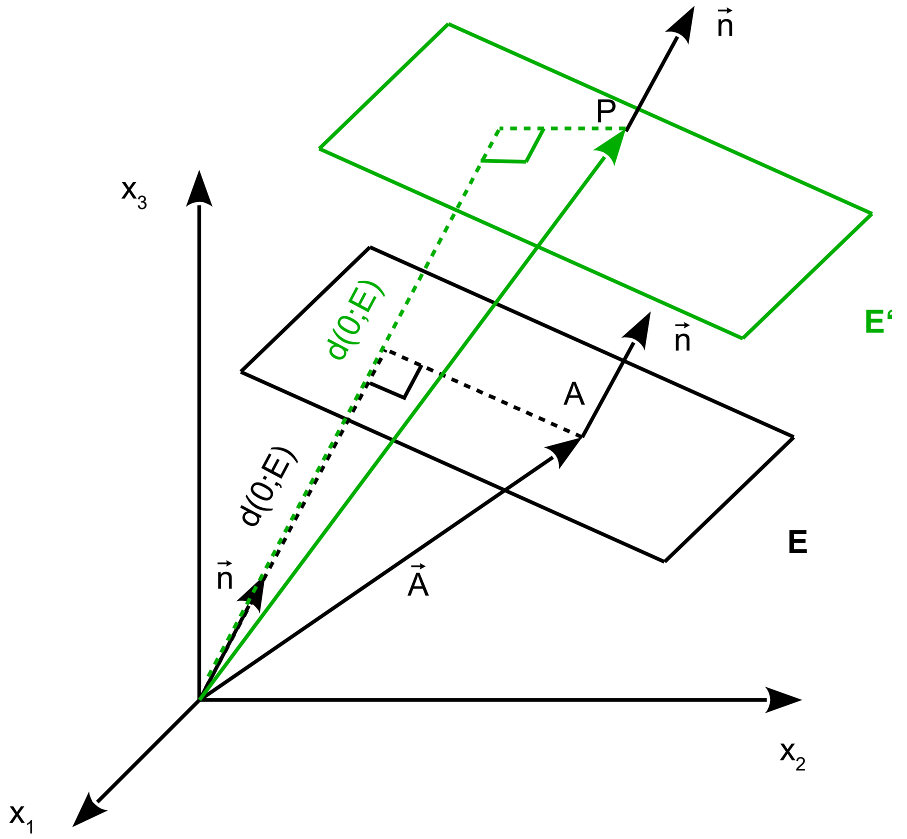
$$n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3 = \vec{n}\vec{A} = |\vec{n}||\vec{A}|\cos(\varphi) \quad , \quad 0 \le \varphi < 90°$$

$$n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3 = \vec{n}\vec{A} = |\vec{A}|\cos(\varphi)$$

$$\underline{n_1A_1 + n_2A_2 + n_3A_3 = d(0;E)}$$

Für irgendeinen Punkt P **ist der Abstand** $d(P;E)$ **von der Ebene** E **gesucht !**

1. Fall : P liegt nicht im gleichen Halbraum wie 0



Man denkt sich eine zu E parallele Ebene E' durch P.

E' : $\quad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1P_1 + n_2P_2 + n_3P_3$

$$\underline{n_1P_1 + n_2P_2 + n_3P_3 = d(0;E')}$$

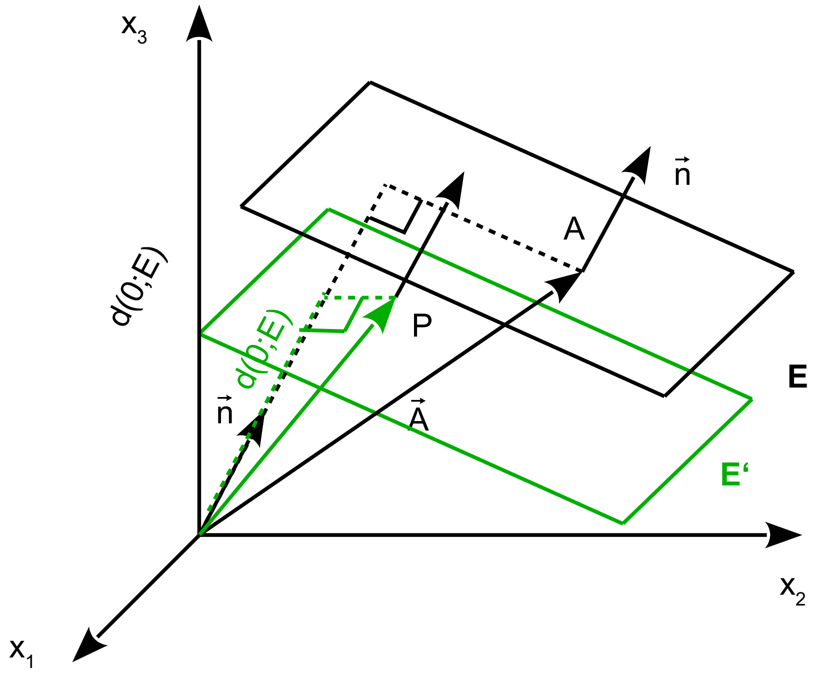
$$d(P;E) = d(0;E') - d(0;E)$$

$$d(P;E) = \vec{n}\vec{P} - \vec{n}\vec{A}$$

$$d(P;E) = \vec{n}(\vec{P} - \vec{A})$$

$$\boxed{\vec{n}(\vec{P} - \vec{A}) = d(P;E)}$$

2. Fall : P liegt im gleichen Halbraum wie 0



Man denkt sich eine zu E parallele Ebene E' durch P.

E' : $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 P_1 + n_2 P_2 + n_3 P_3$

$$\underline{n_1 P_1 + n_2 P_2 + n_3 P_3 = d(0;E')}$$

$$\vec{n}(\vec{P} - \vec{A}) = \vec{n}\vec{P} - \vec{n}\vec{A}$$

$$\vec{n}(\vec{P} - \vec{A}) = d(0;E') - d(0;E)$$

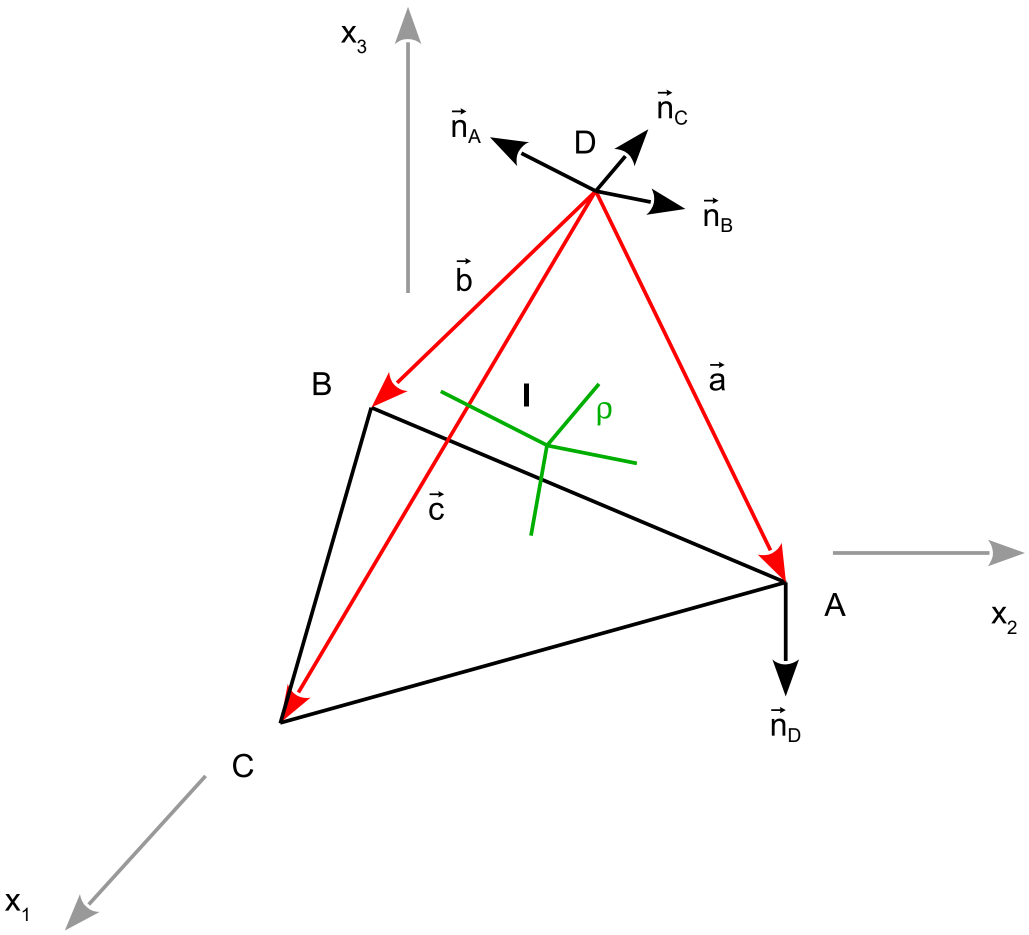
$$\boxed{\vec{n}(\vec{P} - \vec{A}) = -d(P;E)}$$

Was man jetzt mit Sicherheit jetzt sagen kann :

$$\boxed{\left|\ \vec{n}(\vec{P} - \vec{A})\ \right| = d(P;E)}$$

Ende der Zwischenbetrachtung !

Berechnung der In- und Ankugelmittelpunkte



Inkugelmittelpunkt $I\left(\, I_1 \,\middle|\, I_2 \,\middle|\, I_3 \,\right)$

Die normierten Normalenvektoren zu den Flächen F_A , F_B , F_C , F_D seien

$$\vec{n}_A = \begin{pmatrix} n_{A1} \\ n_{A2} \\ n_{A3} \end{pmatrix} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|} \quad , \quad \vec{n}_B = \begin{pmatrix} n_{B1} \\ n_{B2} \\ n_{B3} \end{pmatrix} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{|\vec{c}\times\vec{a}|} \quad , \quad \vec{n}_C = \begin{pmatrix} n_{C1} \\ n_{C2} \\ n_{C3} \end{pmatrix} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \quad ,$$

$$\vec{n}_D = \begin{pmatrix} n_{D1} \\ n_{D2} \\ n_{D3} \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden ein Linkssystem, so dass das Volumen des Tetraeders beschrieben wird durch $V = -\frac{1}{6}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c} = -\frac{1}{6}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{a} = -\frac{1}{6}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\vec{b}$.

Die Flächeninhalte berechnet man durch :

$$F_A = \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| \quad , \quad F_B = \frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{a}\right| \quad , \quad F_c = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \quad , \quad F_A = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\right|$$

Zum Aufstellen der Abstandsgleichungen zur Berechnung der In- und Ankugelmittelpunkte nehme man an, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Inneren des Tetraeders liegt !

$$\begin{aligned} d\left(I, E_A\right) &: \quad \vec{n}_A\left(\vec{I}-\vec{D}\right) = -\rho \\ d\left(I, E_B\right) &: \quad \vec{n}_B\left(\vec{I}-\vec{D}\right) = -\rho \\ d\left(I, E_C\right) &: \quad \vec{n}_C\left(\vec{I}-\vec{D}\right) = -\rho \\ d\left(I, E_D\right) &: \quad \vec{n}_D\left(\vec{I}-\vec{A}\right) = -\rho \end{aligned}$$

Zur weiteren Rechnung verwendet man nur die ersten 3 Gleichungen :

$$\begin{aligned} \vec{n}_A\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \\ \vec{n}_B\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \\ \vec{n}_C\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \\ \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|}\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \\ \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho\,\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| \\ \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho\,\left|\vec{c}\times\vec{a}\right| \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -\rho\,\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -2\rho\;F_A \\ \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -2\rho\;F_B \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{I}-\vec{D}\right) &= -2\rho\;F_C \end{aligned}$$

$$\left(b_2c_3-b_3c_2\right)\left(I_1-D_1\right) + \left(b_3c_1-b_1c_3\right)\left(I_2-D_2\right) + \left(b_1c_2-b_2c_1\right)\left(I_3-D_3\right) = -2\rho\ F_A$$

$$\left(c_2a_3-c_3a_2\right)\left(I_1-D_1\right) + \left(c_3a_1-c_1a_3\right)\left(I_2-D_2\right) + \left(c_1a_2-c_2a_1\right)\left(I_3-D_3\right) = -2\rho\ F_B$$

$$\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\left(I_1-D_1\right) + \left(a_3b_1-a_1b_3\right)\left(I_2-D_2\right) + \left(a_1b_2-a_2b_1\right)\left(I_3-D_3\right) = -2\rho\ F_C$$

$$I_1-D_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2\rho F_A & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ -2\rho F_B & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \\ -2\rho F_C & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}$$

$$I_2-D_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & -2\rho F_A & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & -2\rho F_B & c_1a_2-c_2a_1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & -2\rho F_C & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}$$

$$I_3-D_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & -2\rho F_A \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & -2\rho F_B \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & -2\rho F_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}}$$

Vereinfachung des Nenners N :

$$N = \begin{vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix}$$

$$N = \left(b_2c_3-b_3c_2\right)\left[\ \left(c_3a_1-c_1a_3\right)\left(a_1b_2-a_2b_1\right)-\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\ \right]$$

$$-\left(b_3c_1-b_1c_3\right)\left[\ \left(c_2a_3-c_3a_2\right)\left(a_1b_2-a_2b_1\right)-\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\ \right]$$

$$\left(b_1c_2-b_2c_1\right)\left[\ \left(c_2a_3-c_3a_2\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right)-\left(c_3a_1-c_1a_3\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\ \right]$$

Nebenrechnungen :

$$\begin{aligned}
& \left(c_3a_1-c_1a_3\right)\left(a_1b_2-a_2b_1\right)-\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right) \\
= \;& a_1^2b_2c_3 - a_1a_2b_1c_3 - a_1a_3b_2c_1 + a_2a_3b_1c_1 \\
& -a_2a_3b_1c_1 + a_1a_2b_3c_1 + a_1a_3b_1c_2 - a_1^2b_3c_2 \\
= \;& a_1^2b_2c_3 - a_1a_2b_1c_3 - a_1a_3b_2c_1 + a_1a_2b_3c_1 + a_1a_3b_1c_2 - a_1^2b_3c_2 \\
= \;& a_1\left(a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2\right) \\
= \;& a_1\left(\ a_1\left[b_2c_3-b_3c_2\right] + a_2\left[b_3c_1-b_1c_3\right] + a_3\left[b_1c_2-b_2c_1\right]\ \right) \\
= \;& a_1\left(\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right) \\
= \;& -6a_1V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(c_2a_3-c_3a_2\right)\left(a_1b_2-a_2b_1\right)-\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right) \\
= \;& a_1a_3b_2c_2 - a_2a_3b_1c_2 - a_1a_2b_2c_3 + a_2^2b_1c_3 \\
& -a_2^2b_3c_1 + a_2a_3b_2c_1 + a_1a_2b_3c_2 - a_1a_3b_2c_2 \\
= \;& -a_2a_3b_1c_2 - a_1a_2b_2c_3 + a_2^2b_1c_3 - a_2^2b_3c_1 + a_2a_3b_2c_1 + a_1a_2b_3c_2 \\
= \;& -a_2\left(\ a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2\ \right) \\
= \;& -a_2\left(a_1\left[b_2c_3-b_3c_2\right] + a_2\left[b_3c_1-b_1c_3\right] + a_3\left[b_1c_2-b_2c_1\right]\right) \\
= \;& -a_2\left(\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right) \\
= \;& 6a_2V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(c_2a_3-c_3a_2\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right)-\left(c_3a_1-c_1a_3\right)\left(a_2b_3-a_3b_2\right) \\
= \;& a_3^2b_1c_2 - a_1a_3b_3c_2 - a_2a_3b_1c_3 + a_1a_2b_3c_3 \\
& -a_1a_2b_3c_3 + a_1a_3b_2c_3 + a_2a_3b_3c_1 - a_3^2b_2c_1 \\
= \;& a_3^2b_1c_2 - a_1a_3b_3c_2 - a_2a_3b_1c_3 + a_1a_3b_2c_3 + a_2a_3b_3c_1 - a_3^2b_2c_1 \\
= \;& a_3\left(a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1\right) \\
= \;& a_3\left(\ a_1\left[b_2c_3-b_3c_2\right] + a_2\left[b_3c_1-b_1c_3\right] + a_3\left[b_1c_2-b_2c_1\right]\ \right) \\
= \;& a_3\left(\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right) \\
= \;& -6a_3V
\end{aligned}$$

Jetzt folgt für den Nenner

$$
\begin{aligned}
N = {} & \left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) \left[\left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right)\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) - \left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right)\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) \right] \\
& -\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) \left[\left(c_2 a_3 - c_3 a_2\right)\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) - \left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right)\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) \right] \\
& \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \left[\left(c_2 a_3 - c_3 a_2\right)\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) - \left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right)\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N = {} & \left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) \left[-a_1 6V \right] \\
& -\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) \left[a_2 6V \right] \\
& \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \left[-a_3 6V \right]
\end{aligned}
$$

$$
N = -6V a_1 \left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) - 6V a_2 \left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) - 6V a_3 \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)
$$

$$
N = -6V\left(a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \right)
$$

$$
N = -6V\left(-6V\right)
$$

$$
\boxed{N = 36 V^2}
$$

Vereinfachung des Zählers von I_1 :

$$
Z_1 = \begin{vmatrix} -2\rho F_A & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -2\rho F_B & c_3 a_1 - c_1 a_3 & c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ -2\rho F_C & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & -2\rho F_A\left[\left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right)\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) - \left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right)\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\right] \\
& +2\rho F_B\left[\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right)\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) - \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)\left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\right] \\
& -2\rho F_A\left[\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right)\left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right) - \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)\left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & -2\rho F_A\left[a_1^2 b_2 c_3 - a_1 a_2 b_1 c_3 - a_1 a_3 b_2 c_1 + a_2 a_3 b_1 c_1 - a_2 a_3 b_1 c_1 + a_1 a_2 b_3 c_1 + a_1 a_3 b_1 c_2 - a_1^2 b_3 c_2\right] \\
& +2\rho F_B\left[a_1 b_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 b_2 c_3 + a_2 b_1^2 c_3 - a_3 b_1^2 c_2 + a_1 b_1 b_2 c_2 + a_3 b_1 b_2 c_1 - a_1 b_2 b_3 c_1\right] \\
& -2\rho F_A\left[a_2 b_3 c_1^2 - a_1 b_3 c_1 c_2 - a_2 b_1 c_1 c_3 + a_1 b_1 c_2 c_3 - a_1 b_1 c_2 c_3 + a_3 b_1 c_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 c_3 - a_3 b_2 c_1^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & -2\rho F_A\left[a_1^2 b_2 c_3 - a_1 a_2 b_1 c_3 - a_1 a_3 b_2 c_1 + a_1 a_2 b_3 c_1 + a_1 a_3 b_1 c_2 - a_1^2 b_3 c_2\right] \\
& +2\rho F_B\left[-a_2 b_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 b_2 c_3 + a_2 b_1^2 c_3 - a_3 b_1^2 c_2 + a_1 b_1 b_2 c_2 + a_3 b_1 b_2 c_1\right] \\
& -2\rho F_A\left[a_2 b_3 c_1^2 - a_1 b_3 c_1 c_2 - a_2 b_1 c_1 c_3 + a_3 b_1 c_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 c_3 - a_3 b_2 c_1^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & -2\rho F_A a_1\left[a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2\right] \\
& +2\rho F_B\left(-b_1\right)\left[a_2 b_3 c_1 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1\right] \\
& -2\rho F_C c_1\left[a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & -2\rho F_A a_1\left[a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)\right] \\
& -2\rho F_B b_1\left[a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)\right] \\
& -2\rho F_C c_1\left[a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2\left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$Z_1 = -2\rho F_A a_1\left[a\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right] \\ -2\rho F_B b_1\left[a\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right] \\ -2\rho F_C c_1\left[a\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]$$

$$Z_1 = 12V\rho F_A a_1 + 12V\rho F_B b_1 + 12V\rho F_C c_1$$

$$\boxed{Z_1 = 12V\rho\left(F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1\right)}$$

Nun folgt weiter :

$$I_1 - D_1 = \frac{12V\rho\left(F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1\right)}{36V^2}$$

$$I_1 - D_1 = \frac{\rho\left(F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1\right)}{3V}$$

$$I_1 - D_1 = \frac{F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1}{\frac{3V}{\rho}}$$

$$I_1 - D_1 = \frac{F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$I_1 = D_1 + \frac{F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$I_1 = \frac{D_1\left(F_A + F_B + F_C + F_D\right) + F_A a_1 + F_B b_1 + F_C c_1}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$I_1 = \frac{D_1\left(F_A + F_B + F_C + F_D\right) + F_A\left(A_1 - D_1\right) + F_B\left(B_1 - D_1\right) + F_C\left(C_1 - D_1\right)}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{F_A A_1 + F_B B_1 + F_C C_1 + F_D D_1}{F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

Aus Symmetriegründen gilt entsprechend:

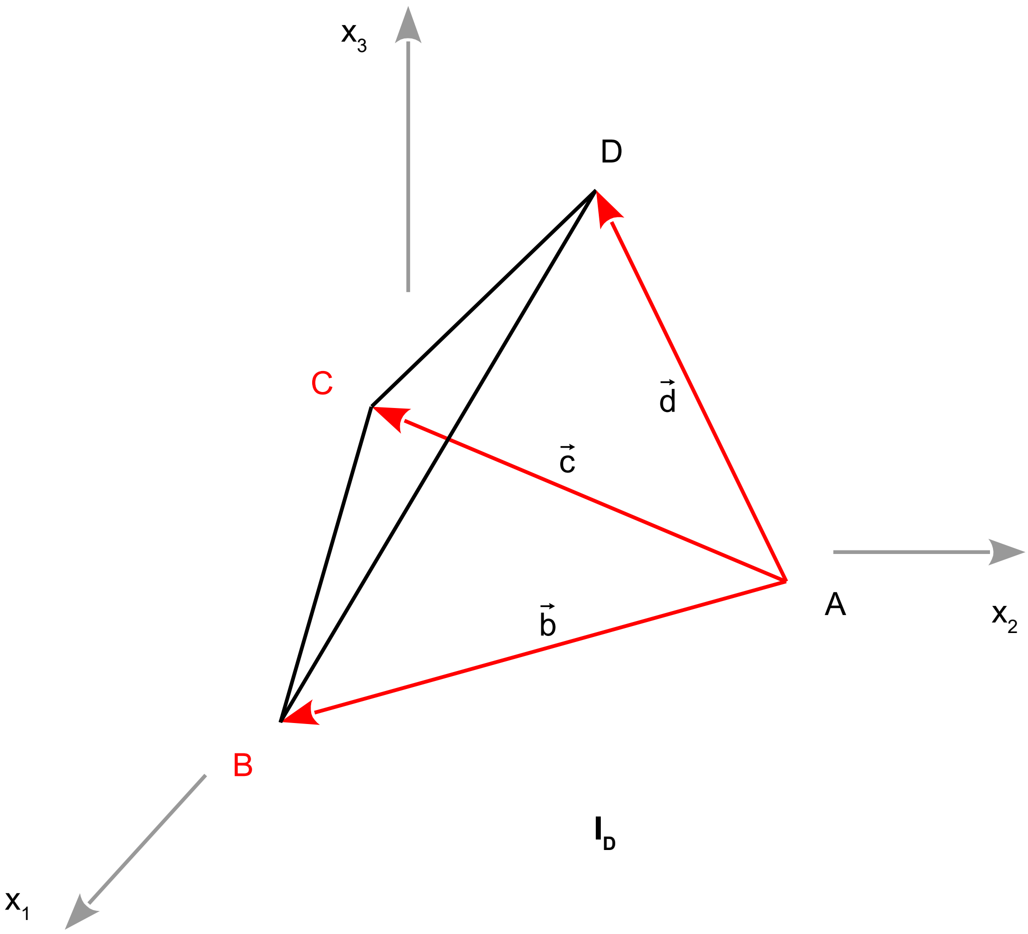
$$\boxed{I_2 = \frac{F_A A_2 + F_B B_2 + F_C C_2 + F_D D_2}{F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{\vec{I} = \frac{F_A \vec{A} + F_B \vec{B} + F_C \vec{C} + F_D \vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{F_A A_3 + F_B B_3 + F_C C_3 + F_D D_3}{F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

Jetzt folgt die Berechnung des Mittelpunkts I_D der entsprechenden Ankugel. Wieder wird voausgesetzt, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Inneren des Tetraeders liegt !

Zuerst muss man einige Umbenennungen vornehmen :



$$\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = \rho_D$$

$$\frac{\vec{c}\times\vec{d}}{|\vec{c}\times\vec{d}|}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D$$

$$\frac{\vec{d}\times\vec{b}}{|\vec{d}\times\vec{b}|}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D$$

$$\vec{b}\times\vec{c}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = \rho_D\,\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$$
$$\vec{c}\times\vec{d}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D\,\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$$
$$\vec{d}\times\vec{b}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D\,\left|\vec{d}\times\vec{b}\right|$$

$$\vec{b}\times\vec{c}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = 2\rho_D\;F_D$$
$$\vec{c}\times\vec{d}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D\;F_B$$
$$\vec{d}\times\vec{b}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -2\rho_D\;F_C$$

$$\vec{b}\times\vec{c}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -2\rho_D\;\left(-F_D\right)$$
$$\vec{c}\times\vec{d}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -\rho_D\;F_B$$
$$\vec{d}\times\vec{b}\left(\vec{I}_D-\vec{A}\right) = -2\rho_D\;F_C$$

Das Gleichungssystem für I_D hat die gleiche Form wie das Gleichungssystem für I. Deshalb folgt sofort :

$$\boxed{I_{D1} = \frac{F_A A_1 + F_B B_1 + F_C C_1 - F_D D_1}{F_A + F_B + F_C - F_D}}$$

$$\boxed{I_{D2} = \frac{F_A A_2 + F_B B_2 + F_C C_2 - F_D D_2}{F_A + F_B + F_C - F_D}}$$

$$\boxed{\vec{I}_D = \frac{F_A \vec{A} + F_B \vec{B} + F_C \vec{C} - F_D \vec{D}}{F_A + F_B + F_C - F_D}}$$

$$\boxed{I_{D3} = \frac{F_A A_3 + F_B B_3 + F_C C_3 - F_D D_3}{F_A + F_B + F_C - F_D}}$$

Aus Symmetriegründen folgt entsprechend:

$$\boxed{I_{C1} = \frac{F_A A_1 + F_B B_1 - F_C C_1 + F_D D_1}{F_A + F_B - F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{C2} = \frac{F_A A_2 + F_B B_2 - F_C C_2 + F_D D_2}{F_A + F_B - F_C + F_D}}$$

$$\boxed{\vec{I}_C = \frac{F_A \vec{A} + F_B \vec{B} - F_C \vec{C} + F_D \vec{D}}{F_A + F_B - F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{C3} = \frac{F_A A_3 + F_B B_3 - F_C C_3 + F_D D_3}{F_A + F_B - F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{B1} = \frac{F_A A_1 - F_B B_1 + F_C C_1 + F_D D_1}{F_A - F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{B2} = \frac{F_A A_2 - F_B B_2 + F_C C_2 + F_D D_2}{F_A - F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{\vec{I}_B = \frac{F_A \vec{A} - F_B \vec{B} + F_C \vec{C} + F_D \vec{D}}{F_A - F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{B3} = \frac{F_A A_3 - F_B B_3 + F_C C_3 + F_D D_3}{F_A - F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{A1} = \frac{-F_A A_1 + F_B B_1 + F_C C_1 + F_D D_1}{-F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{A2} = \frac{-F_A A_2 + F_B B_2 + F_C C_2 + F_D D_2}{-F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{\vec{I}_A = \frac{-F_A \vec{A} + F_B \vec{B} + F_C \vec{C} + F_D \vec{D}}{-F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

$$\boxed{I_{A3} = \frac{-F_A A_3 + F_B B_3 + F_C C_3 + F_D D_3}{-F_A + F_B + F_C + F_D}}$$

Nun kann man noch folgende Formel über In- und Ankugelmittelpunkte und Radien herleiten :

$$\boxed{\frac{1}{\rho_A}\vec{I}_A + \frac{1}{\rho_B}\vec{I}_B + \frac{1}{\rho_C}\vec{I}_C + \frac{1}{\rho_D}\vec{I}_D = \frac{2}{\rho}\vec{I}}$$

Beweis :

$$\frac{1}{\rho_A}\ \vec{I}_A = \frac{-F_A + F_B + F_c + F_D}{F_A + F_B + F_c + F_D}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{-F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{-F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_A}\ \vec{I}_A = \frac{1}{\rho}\ \frac{-F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_A}\ \vec{I}_A = \frac{1}{\rho}\ \frac{-2F_A\vec{A} + F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

Analog :

$$\frac{1}{\rho_B}\ \vec{I}_B = \frac{1}{\rho}\ \frac{F_A\vec{A} - 2F_B\vec{B} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_C}\ \vec{I}_C = \frac{1}{\rho}\ \frac{F_A\vec{A} + F_B\vec{B} - 2F_C\vec{C} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_C}\ \vec{I}_C = \frac{1}{\rho}\ \frac{F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} - 2F_D\vec{D} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_A}\vec{I}_A + \frac{1}{\rho_B}\vec{I}_B + \frac{1}{\rho_C}\vec{I}_C + \frac{1}{\rho_D}\vec{I}_D = \frac{1}{\rho}\ \frac{2\left(F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}\right)}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_A}\vec{I}_A + \frac{1}{\rho_B}\vec{I}_B + \frac{1}{\rho_C}\vec{I}_C + \frac{1}{\rho_D}\vec{I}_D = \frac{2}{\rho}\ \frac{F_A\vec{A} + F_B\vec{B} + F_C\vec{C} + F_D\vec{D}}{F_A + F_B + F_C + F_D}$$

$$\frac{1}{\rho_A}\vec{I}_A + \frac{1}{\rho_B}\vec{I}_B + \frac{1}{\rho_C}\vec{I}_C + \frac{1}{\rho_D}\vec{I}_D = \frac{2}{\rho}\ \vec{I}$$

q.e.d.