Allgemeines Tetraeder und Umkugel

Arno Fehringer

Oktober 2021

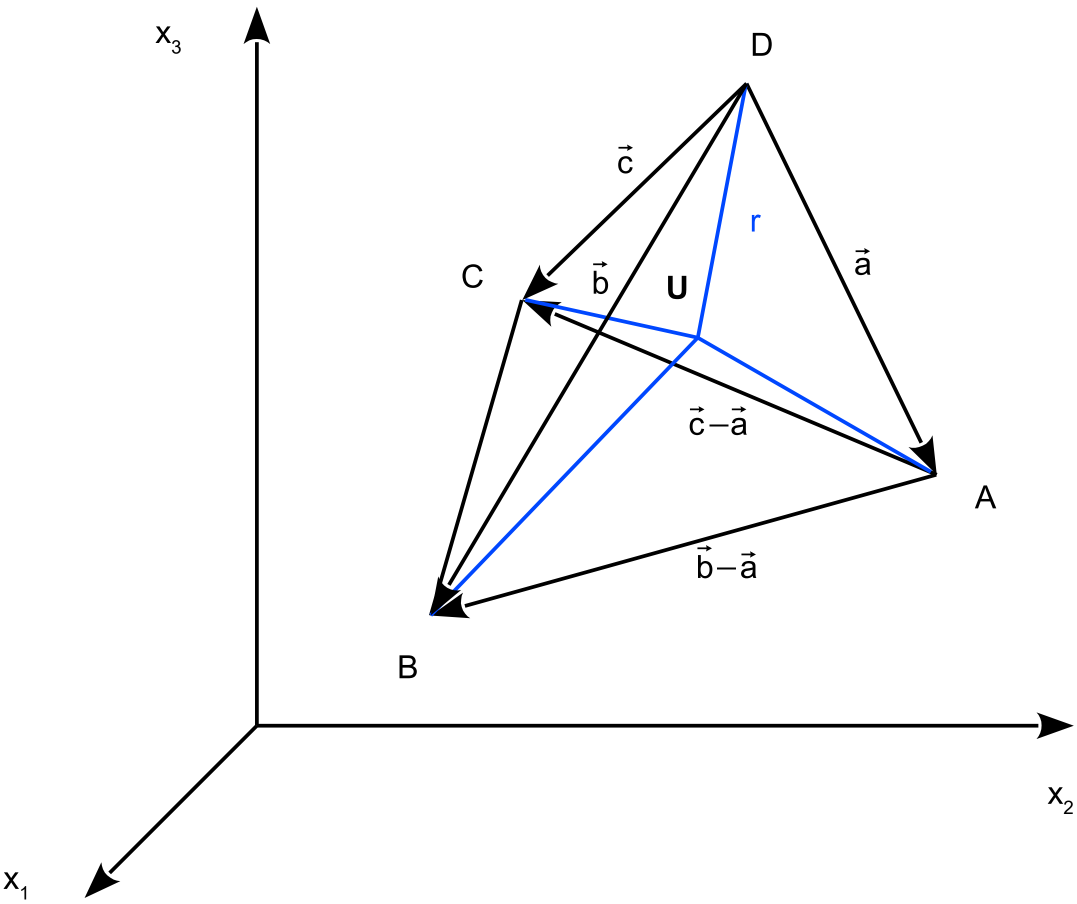
Quellen:

Eberley, David : Centers of a Simplex; 2008

https://www.geometrictools.com/Documentation/CentersOfSimplex.pdf

Bemerkung:
Im zitierten Skript, in der Literatur und im Internet habe ich keine einfache symmetrische Formel für den Umkugelmittelpunkt und den Radius gefunden. Deshalb habe ich dieses Skriptum erstellt.

Gegeben ist ein allgemeines Tetraeder mit den Ecken A , B , C , D .
Gesucht sind Mittelpunkt und Radius der Umkugel.



Da die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ein Rechtssystem bilden, ist das Volumen des Tetraeders gegeben durch :

$$V = \frac{1}{6}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c} = \frac{1}{6}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{a} = \frac{1}{6}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\vec{b} \quad .$$

Die Normalenvektoren $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ der Flächen F_A . F_B , F_C sind nach innen gerichtet .

Der entsprechende Normalenvektor der Fläche F_D ergibt sich zu :

$$\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = \vec{c}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = -\vec{b}\times\vec{c} - \vec{c}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\boxed{\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = -\left(\vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b}\right)}$$

Erster Rechenweg zur Berechnung des Umkugelmittelpunktes $\vec{U}$:

Der Umkugelmittelpunkt $\vec{U}$ ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten-Ebenen durch die Punkte

$$\frac{\vec{D}+\vec{A}}{2} = \vec{D}+\frac{1}{2}\vec{a} \quad , \quad \frac{\vec{D}+\vec{B}}{2} = \vec{D}+\frac{1}{2}\vec{b} \quad , \quad \frac{\vec{D}+\vec{C}}{2} = \vec{D}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

Die Gleichungen lauten :

$$\vec{a}\left(\vec{U}-\left(\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\right) = 0$$

$$\vec{b}\left(\vec{U}-\left(\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\right) = 0$$

$$\vec{c}\left(\vec{U}-\left(\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right) = 0$$

$$\vec{a}\left(\vec{U}-\vec{D}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{a}^{\,2}$$

$$\vec{b}\left(\vec{U}-\vec{D}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{b}^{\,2}$$

$$\vec{a}\left(\vec{U}-\vec{D}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{a}^{\,2}$$

$$a_1\left(U_1-D_1\right) + a_2\left(U_2-D_2\right) + a_3\left(U_3-D_3\right) = \frac{1}{2}\,\vec{a}^{\,2}$$

$$b_1\left(U_1-D_1\right) + b_2\left(U_2-D_2\right) + b_3\left(U_3-D_3\right) = \frac{1}{2}\,\vec{b}^{\,2}$$

$$c_1\left(U_1-D_1\right) + c_2\left(U_2-D_2\right) + c_3\left(U_3-D_3\right) = \frac{1}{2}\,\vec{c}^{\,2}$$

$$U_1-D_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,\vec{a}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \frac{1}{2}\,\vec{b}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \frac{1}{2}\,\vec{c}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{b}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{c}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$U_2 - D_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \vec{a}^{\,2} & a_3 \\ b_1 & \vec{b}^{\,2} & b_3 \\ c_1 & \vec{c}^{\,2} & c_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$U_3 - D_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vec{a}^{\,2} \\ b_1 & b_2 & \vec{b}^{\,2} \\ c_1 & c_2 & \vec{c}^{\,2} \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{U_i - D_i = \frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_i + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_i + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i}{12\,V}} \qquad i = 1,2,3$$

$$\boxed{U_i = D_i + \frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_i + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_i + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i}{12\,V}} \qquad i = 1,2,3$$

$$\boxed{r = \sqrt{\left(U_1 - D_1\right)^2 + \left(U_2 - D_2\right)^2 + \left(U_3 - D_3\right)^2}}$$

Zweiter Rechenweg zur Berechnung des Umkugelmittelpunktes $\vec{U}$:

Die Gleichungen lauten :

$$\vec{a}\,\vec{U} = \vec{a}\,\frac{\vec{D} + \vec{A}}{2}$$

$$\vec{b}\,\vec{U} = \vec{b}\,\frac{\vec{D} + \vec{B}}{2}$$

$$\vec{c}\,\vec{U} = \vec{c}\,\frac{\vec{D} + \vec{C}}{2}$$

$$\vec{a}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right)$$

$$\vec{b}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{B}\right)$$

$$\vec{c}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{C} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{C}\right)$$

Nebenrechnung :

$$\frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(A_i - D_i\right)\left(D_i + A_i\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i^2 - D_i^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} D_i^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{A}^{\,2} - \frac{1}{2}\,\vec{D}^{\,2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{A} - \vec{D}\right)\left(\vec{D} + \vec{A}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

Für die Gleichungen folgt also :

$$\vec{a}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$\vec{b}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$\vec{c}\,\vec{U} = \frac{1}{2}\left(\vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$b_1 U_1 + b_2 U_2 + b_3 U_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right)$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right) & a_2 & a_3 \\ \frac{1}{2}\left(\vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right) & b_2 & b_3 \\ \frac{1}{2}\left(\vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2}\right) & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Zähler Z_1 von U_1 :

$$Z_1 = \begin{vmatrix} \vec{A}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{B}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{C}^{\,2} - \vec{D}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} \vec{A}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{B}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{C}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{D}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{D}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{D}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} \vec{A}^{\,2} & a_2 & a_3 \\ \vec{B}^{\,2} & b_2 & b_3 \\ \vec{C}^{\,2} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \vec{D}^{\,2} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$Z_1 = \vec{A}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{B}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{C}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 - \vec{D}^{\,2}\left[\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1\right]$$

$$Z_1 = \vec{A}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{B}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{C}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 + \vec{D}^{\,2}\left[-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 - \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 - \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1\right]$$

Die Vektorsumme in der eckigen Klammer stellt den Normalenvektor der Fläche F_D dar, weshalb man jetzt auch schreiben kann :

$$Z_1 = \vec{A}^{\,2}\,\vec{n}_{A\,1} + \vec{B}^{\,2}\,\vec{n}_{B\,1} + \vec{C}^{\,2}\,\vec{n}_{C\,1} + \vec{D}^{\,2}\,\vec{n}_{D\,1}$$

Damit folgt aus Symmetriegründen für die Koordinaten der Umkugelmittelpunktes $\vec{U}$:

$$\boxed{U_i = \frac{\vec{A}^{\,2}\,\vec{n}_{A\,i} + \vec{B}^{\,2}\,\vec{n}_{B\,i} + \vec{C}^{\,2}\,\vec{n}_{C\,i} + \vec{D}^{\,2}\,\vec{n}_{D\,i}}{12V}} \qquad i = 1,2,3$$

$\vec{n}_A = \vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{n}_B = \vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{n}_C = \vec{a}\times\vec{b}$,

$\vec{n}_D = -\left(\vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b}\right)$

Berechnung des Umkugelradius :

$$U_i - D_i \;=\; \frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_i + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_i + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i}{12V} \qquad i = 1,2,3$$

$$r^2 \;=\; \left(U_1 - D_1\right)^2 + \left(U_2 - D_2\right)^2 + \left(U_3 - D_3\right)^2$$

$$\begin{aligned} r^2 \;=\; & \left[\frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1}{12V}\right]^2 \\ & + \left[\frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2}{12V}\right]^2 \\ & + \left[\frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3}{12V}\right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \;=\; & \frac{1}{\left(12V\right)^2}\left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1\right]^2 \\ & + \frac{1}{\left(12V\right)^2}\left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2\right]^2 \\ & + \frac{1}{\left(12V\right)^2}\left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3\right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2\left(12V\right)^2 \;=\; & \left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1\right]^2 \\ & + \left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2\right]^2 \\ & + \left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3\right]^2 \end{aligned}$$

Nebenrechnung :

$$\begin{aligned} & \left[\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1 + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1\right]^2 \\ = \;& \vec{a}^{\,4}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1^2 + \vec{b}^{\,4}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1^2 + \vec{c}^{\,4}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1^2 \\ & + 2\vec{a}^2\vec{b}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + 2\vec{a}^2\vec{c}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 + \vec{b}^2\vec{c}^2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 \end{aligned}$$

Jetzt folgt :

$$
\begin{aligned}
r^2\;(12\,V)^2 \;=\;& \vec{a}^{\,4}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1^2 + \vec{b}^{\,4}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1^2 + \vec{c}^{\,4}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1^2 \\
&+ 2\vec{a}^2\vec{b}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1 + 2\vec{a}^2\vec{c}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 + \vec{b}^2\vec{c}^2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_1\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 \\
&+ \vec{a}^{\,4}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2^2 + \vec{b}^{\,4}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2^2 + \vec{c}^{\,4}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2^2 \\
&+ 2\vec{a}^2\vec{b}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2 + 2\vec{a}^2\vec{c}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 + \vec{b}^2\vec{c}^2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 \\
&+ \vec{a}^{\,4}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3^2 + \vec{b}^{\,4}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3^2 + \vec{c}^{\,4}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3^2 \\
&+ 2\vec{a}^2\vec{b}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3 + 2\vec{a}^2\vec{c}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 + \vec{b}^2\vec{c}^2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2\;(12\,V)^2 \;=\;& \vec{a}^{\,4}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2 + \vec{b}^{\,4}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2 + \vec{c}^{\,4}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 \\
&+ 2\vec{a}^2\vec{b}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + 2\vec{a}^2\vec{c}^2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) + \vec{b}^2\vec{c}^2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

$$
r^2\;(12\,V)^2 = \left[\;\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\;\right]^2
$$

$$
r^2 = \frac{\left[\;\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\;\right]^2}{(12\,V)^2}
$$

$$
\boxed{\;r = \left|\frac{\vec{a}^{\,2}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}^{\,2}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) + \vec{c}^{\,2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{12\,V}\right|\;}
$$

Umkugelradius des Tetraeders