

Euler, das Königsberger Brückenproblem und die Polyederformel

Arno Fehringer

Oktober 2021

Quellen:

Fehringer, Arno: Mathematische Untersuchungen zu Ein-Linien-Figuren; März 2018

https://mathematikgarten.hpage.com/get_file.php?id=32758352&vnr=748495

Euler, Leonhard: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (1741). Euler Archive - All Works. 53.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53>

Euler, Leonhard: Elementa doctrinae solidorum (1758). Euler Archive - All Works. 230.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/230>

<http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/euler-230.pdf>

Euler, Leonhard: Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita (1758). Euler Archive - All Works. 231.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/231>

<https://www2.math.uni-wuppertal.de/~kroemer/files/euler-231.pdf>

Sandifer, Ed: How Euler did it : E,V,F part I ; June 2004

<http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-06.pdf>

Sandifer, Ed: How Euler did it : E,V,F part II ; July 2004

<http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-07.pdf>



Leonhard Euler (1707 – 1783)
Schweizer Mathematiker

Porträt von J. E. Handemann 1756

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg

Lebensdaten

1707: Geboren am 15. April als Sohn eines reformierten Pfarrers.

1708: Eulers Vater, Paulus Euler, übernimmt das Pfarramt in Riehen bei Basel.

1783: Euler erleidet einen Schlaganfall und stirbt rasch.

Schule und Universität

1713: Nach Privatunterricht bei seinem Vater Besuch der Lateinschule in Basel.

1720: Studienbeginn in Basel.

1723: Promotion zum Magister. Immatrikulation an der Theologischen Fakultät. Privatissima bei Johann I Bernoulli.

Berufstätigkeit

1727 - 1741 Petersburg

1727: Berufung an die **Petersburger Akademie**.

1731: Professor für Physik und ordentliches Mitglied der Petersburger Akademie.

1733: Professor für Mathematik (Nachfolger von Daniel Bernoulli).

1734: Mitarbeit an der russischen Generalkarte.

1741 - 1766 Berlin

1741: Euler folgt der Einladung Friedrichs II nach Berlin, um beim Aufbau der Akademie zu helfen.

1746: wird die **Berliner Akademie** gegründet. Euler wird Direktor der mathematischen Klasse.

1766 - 1783 Petersburg

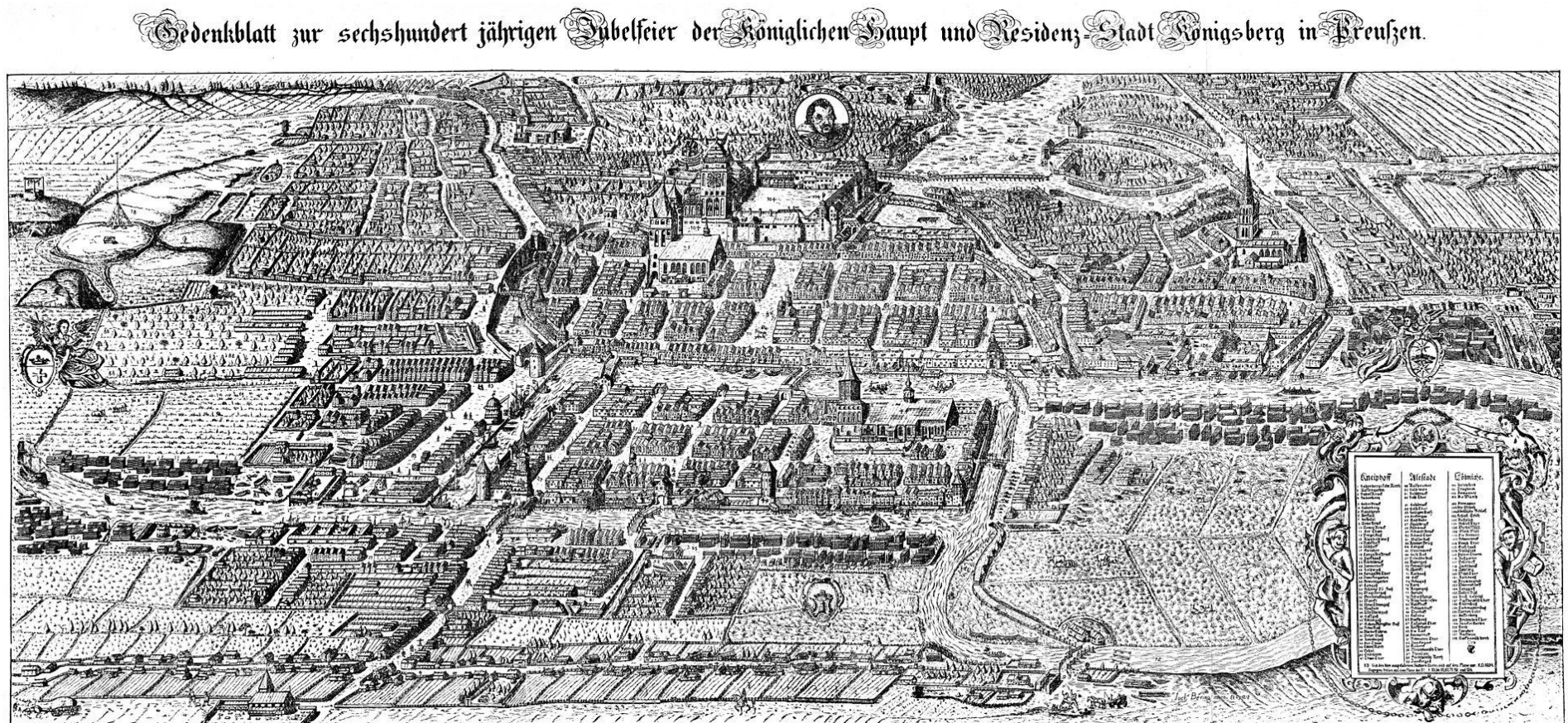
1766: Zerwürfnis zwischen Euler und Friedrich II. Euler kehrt nach **Petersburg** zurück.

Leonhard Eulers mathematisches Werk umfasst mehr als 800 Arbeiten.

Nach: <http://www.kk.s.bw.schule.de/mathge/euler.htm>

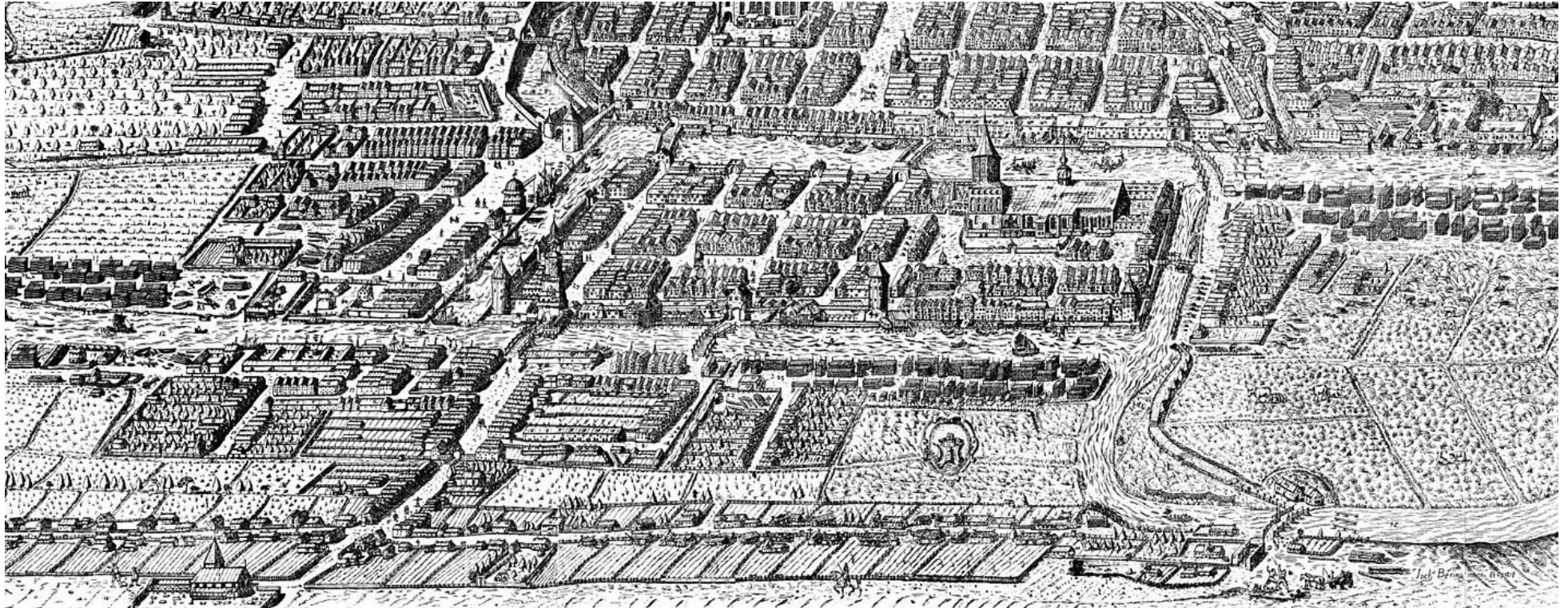
Das Königsberger Brückenproblem

Der große Mathematiker **Leonhard Euler (1707 – 1783)** wurde gefragt, ob es einen Rundweg durch die Stadt Königsberg gibt, der über jede der 7 Brücken genau 1 Mal führt?

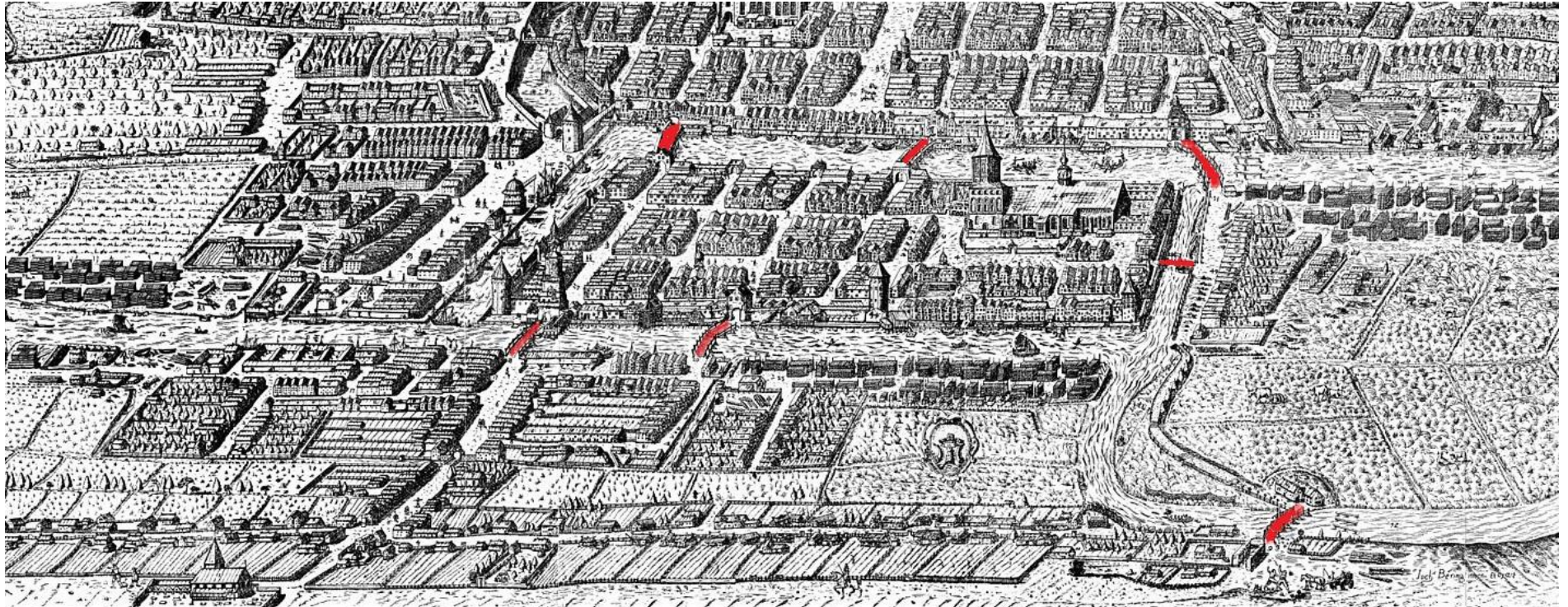


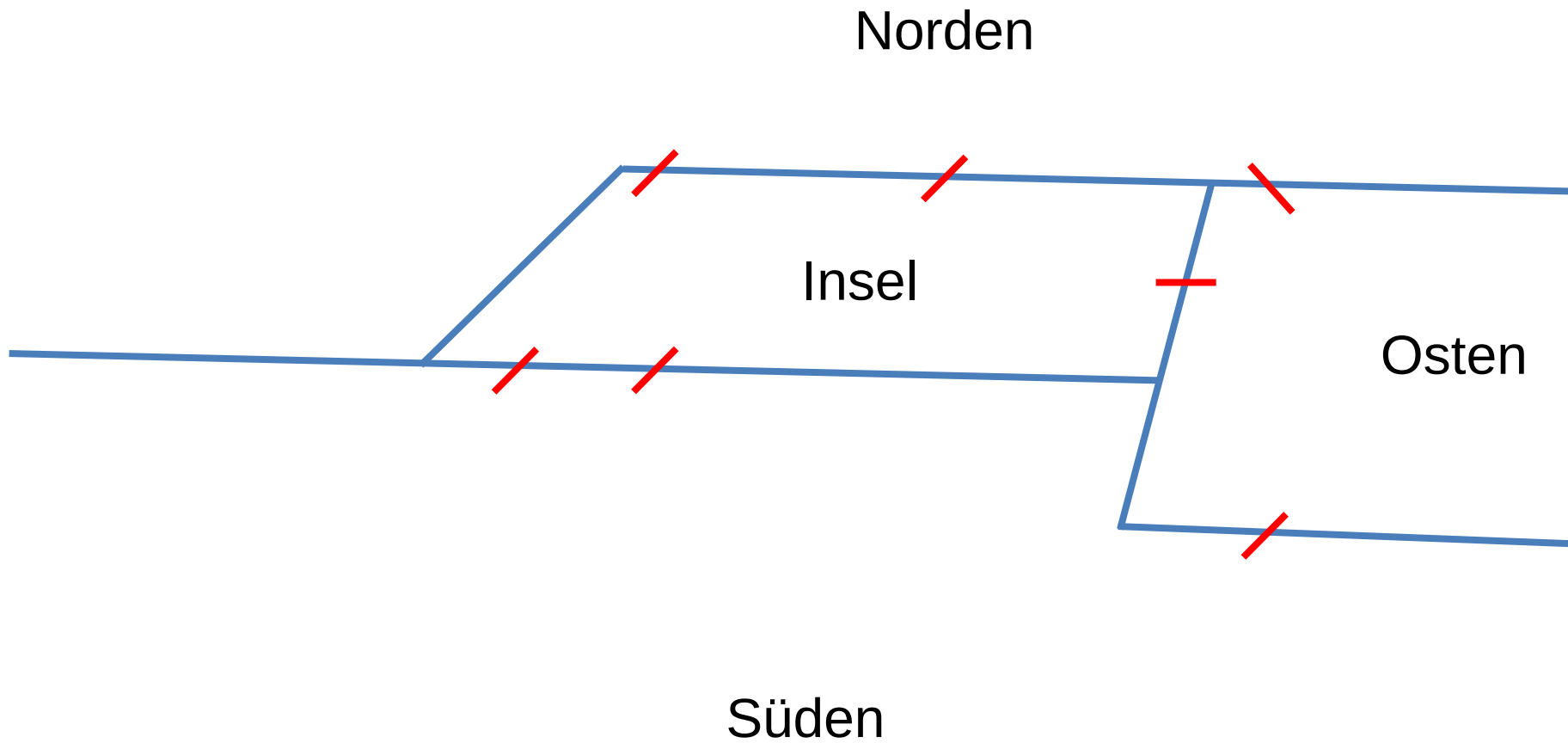
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/15/Koenigsberg%2C_Map_by_Bering_1613.jpg/1920px-Koenigsberg%2C_Map_by_Bering_1613.jpg?1634398098540

Die 7 Brücken, wo sind sie ?

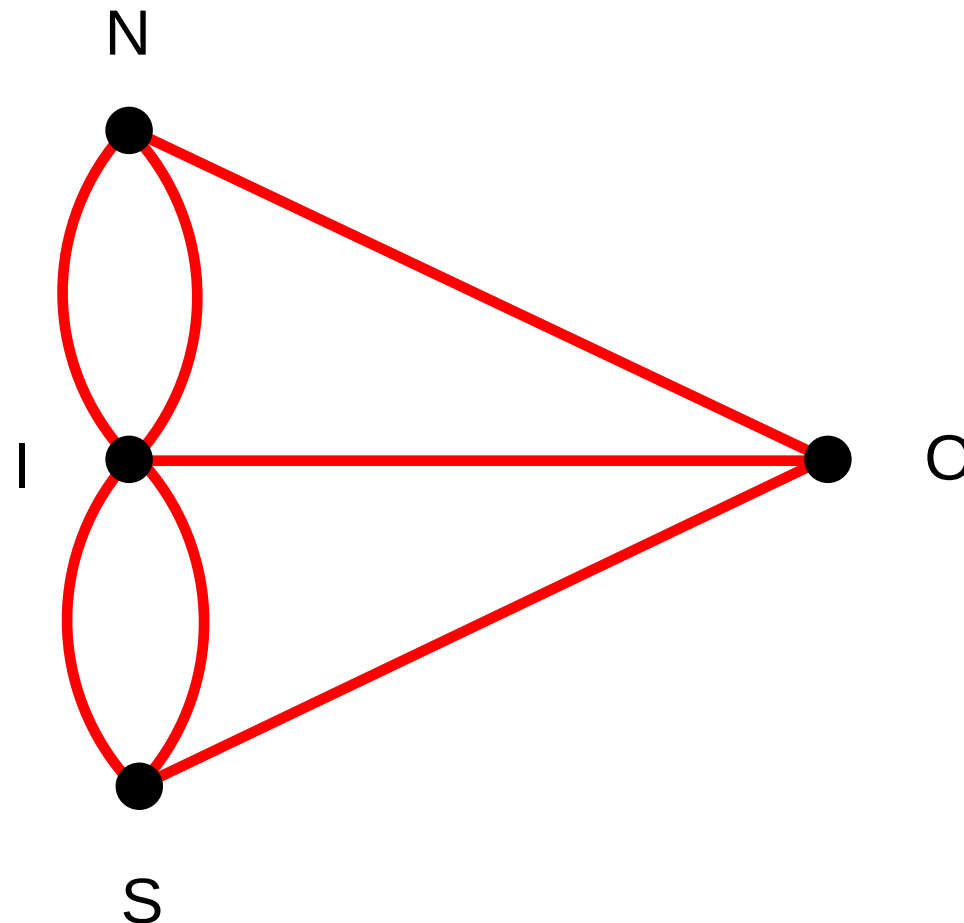


Die 7 Brücken sind **rot markiert** !

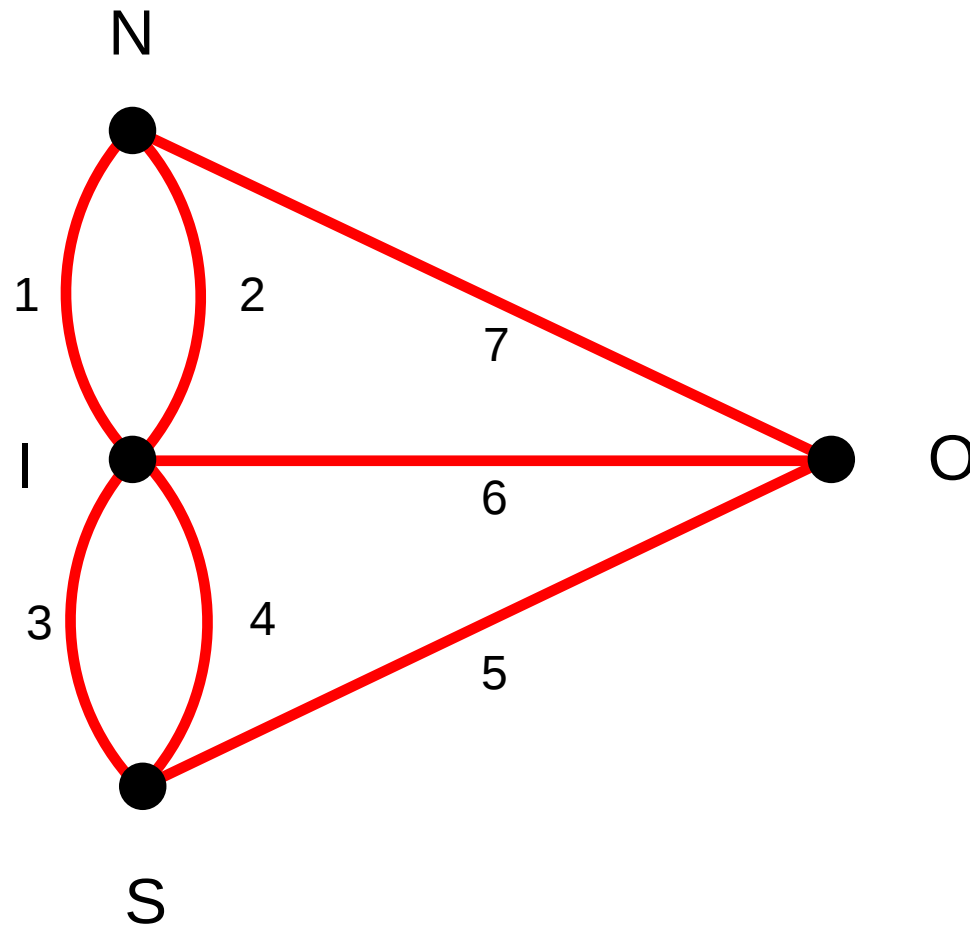




Nach Abstraktion erhält man folgende Figur, wobei Stadtteile durch die schwarzen **Punkte** und Brücken durch die roten **Linien** dargestellt sind:

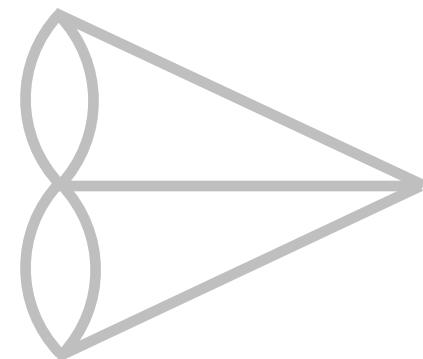
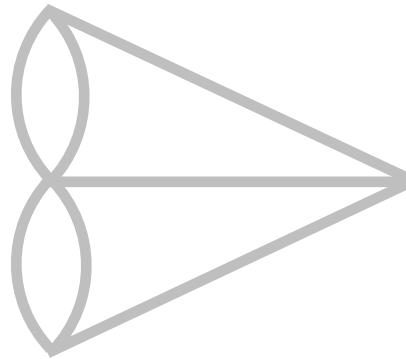
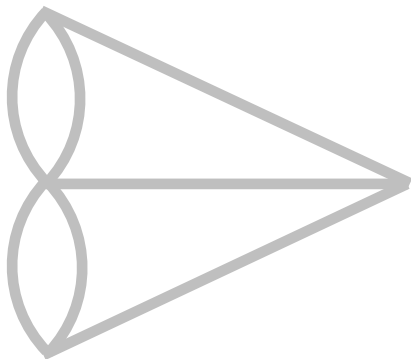
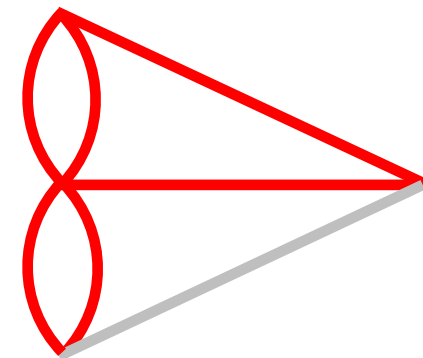
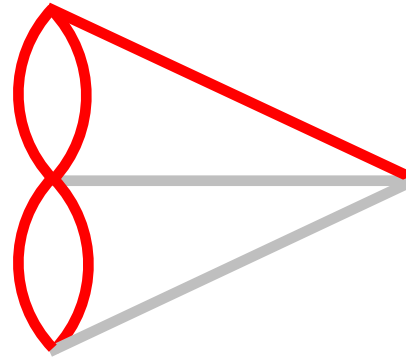
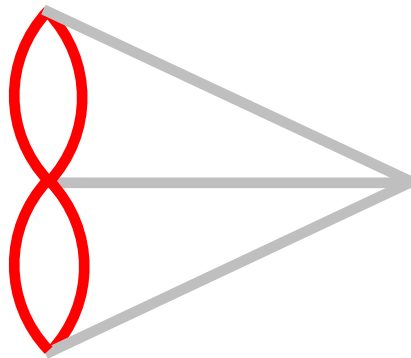
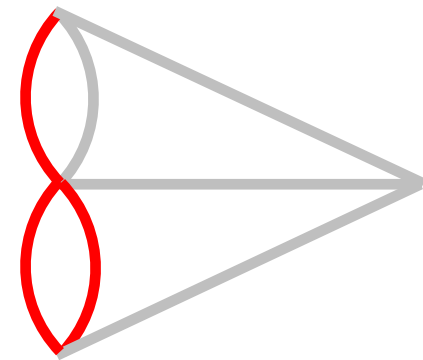
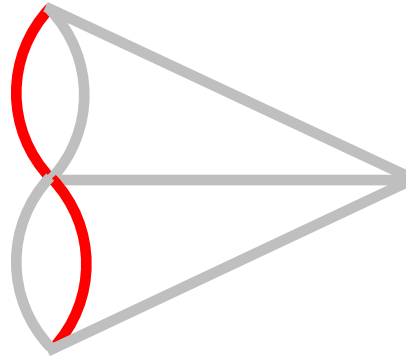
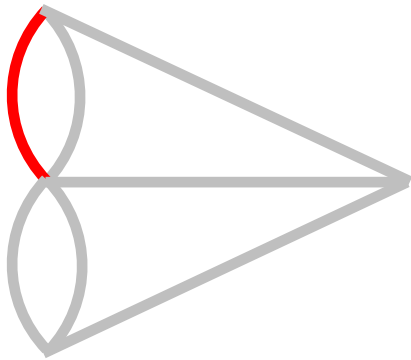


Ein **Eulerweg** wäre ein Weg, der jede Linie genau 1-mal durchläuft. Punkte dürfen mehrmals durchlaufen werden.

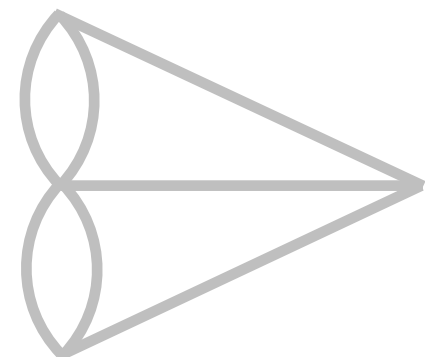
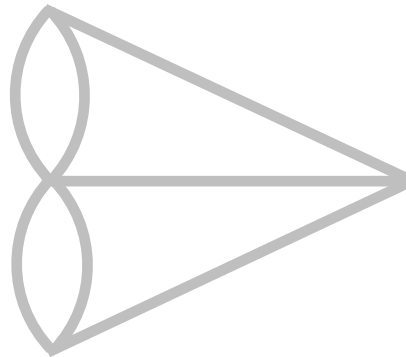
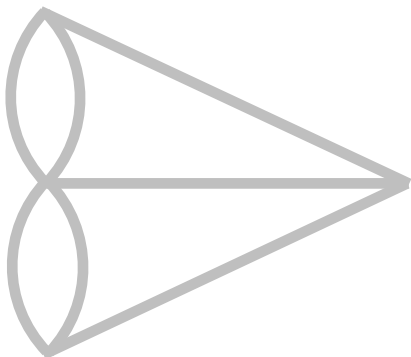
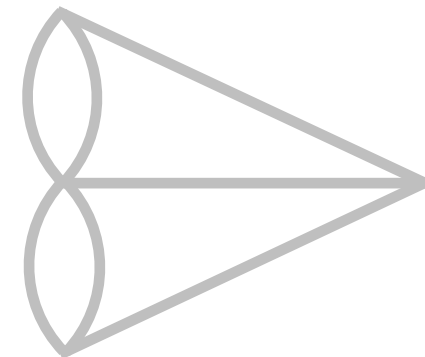
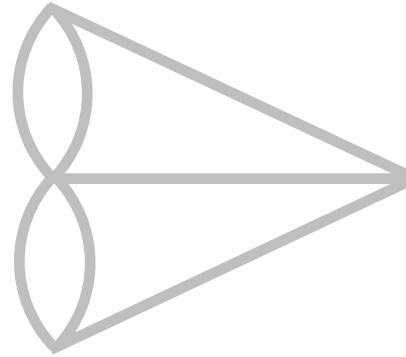
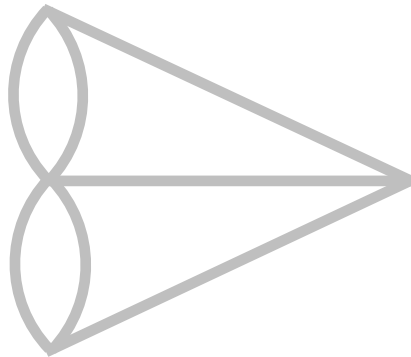
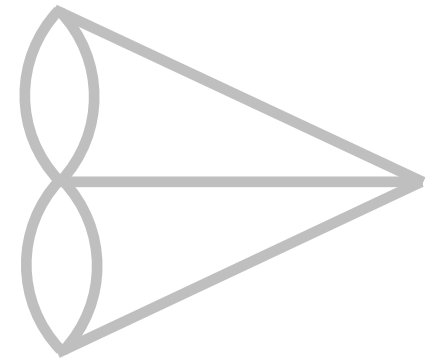
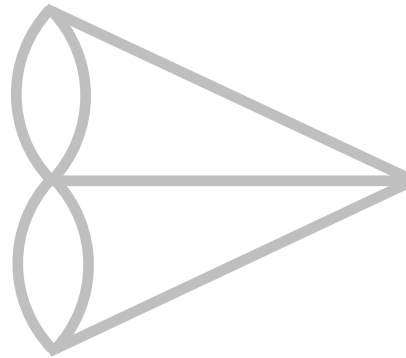
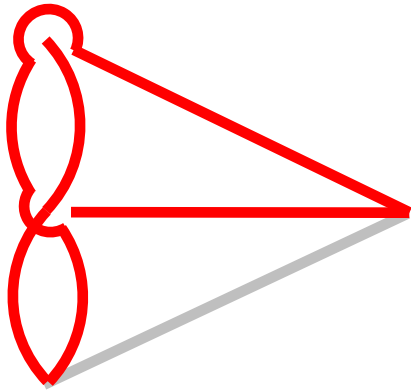


Der folgende Eulerweg ist unvollständig: 1 4 3 2 7 6 ; es fehlt die Linie 5 .

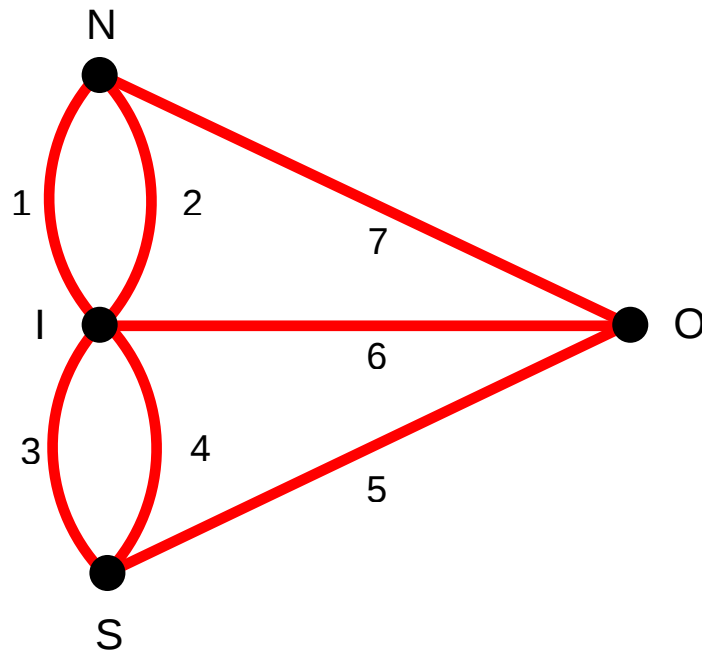
Versuche einen Weg zu finden, der über jede Brücke genau 1 Mal führt !



Versuche einen Weg zu finden, der über jede Brücke genau 1 Mal führt !



Vermutung: Das Eulersche Brückenproblem ist unlösbar!



Angenommen, der Weg würde in N starten. Dann müsste man diesen auf den drei Linien 1,2,7 verlassen, zurückkommen und wieder verlassen. Dann müsste der Weg in einem anderen Punkt, etwa in I, enden. Man würde in I auf den fünf Linien ankommen, verlassen, ankommen, verlassen und wieder ankommen.

Die anderen Punkte O, S sind sogenannte Zwischenpunkte. Notwendig hierfür ist, dass die Linienzahl, die jeweils zu diesen Punkten führen, gerade ist. Ein Zwischenpunkt muss man genauso oft verlassen wie man ankommt.

Im vorliegenden Problem gibt es jedoch nur jeweils drei Linien, die zu den Punkten O, S führen, also eine ungerade Anzahl.

Satz 1

Zu einer Figur aus Punkten und Linien kann es genau dann einen Eulerweg geben, wenn die Anzahl der Punkte von denen eine ungerade Zahl von Linien wegführt entweder gleich 0 oder 2 ist.

Beweis:

1. Fall: Die Figur hat 0 Punkte, von denen eine ungerade Zahl von Linien wegführen
Starte einen Weg beginnend in einem beliebigen Punkt P_1 bis zum Punkt P_s

$$P_1 L_1 \dots P_{(s-1)} L_{s-1} P_s$$

Es muss $P_s = P_1$ sein, sonst gäbe es im Linienzug einen Punkt mit einer ungeraden Linienzahl. Wenn der Weg alle Linien enthält, ist man fertig.

Andernfalls gibt es in diesem Linienzug einen Punkt Q_1 und eine Linie M_1 die von Q_1 wegführt.

Damit beginnen wir einen zweiten Linienzug $Q_1 M_1 \dots Q_{t-1} M_{t-1} Q_1$ und verknüpfen diesen mit dem ersten:

$$P_1 L_1 \dots Q_1 M_1 \dots Q_{t-1} M_{t-1} Q_1 \dots P_{s-1} L_{s-1} P_1$$

Das Verfahren wird so weitergeführt, bis man einen Eulerweg erhält.

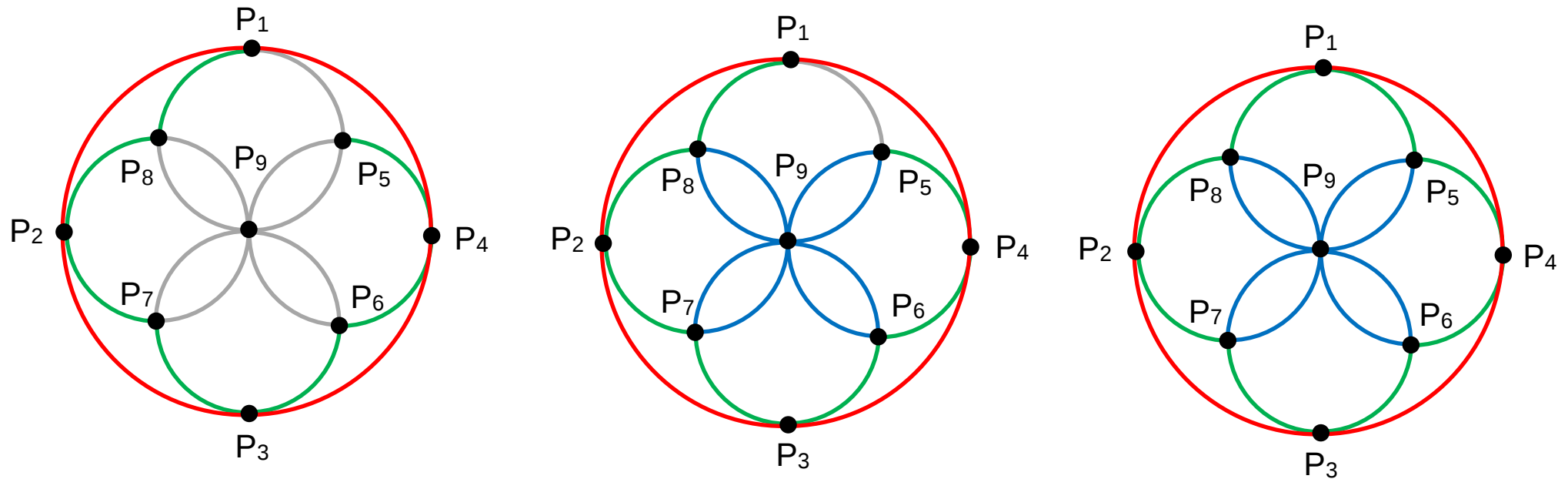
2. Fall: Die Figur hat genau 2 Punkte, von denen eine ungerade Zahl von Linien wegführen, etwa P_1 und P_2 .

Man modifiziert die Figur, indem man P_1 und P_2 durch die Linie L verbindet, wodurch man eine Figur mit 0 Punkten, von denen eine ungerade Zahl von Linien wegführen, erhält.

Nach dem **1. Fall** gibt es einen Eulerweg $P_1 L P_2 L_2 \dots P_n L_n P_1$.

Dann ist $P_2 L_2 \dots P_n L_n P_1$ ein Eulerweg der ursprünglichen Figur.

Beispiel zum Auffinden eines Eulerweges, wenn in jedem Punkt genau eine gerade Anzahl von Linien ausgeht.



$P_1 P_2 \dots P_4 P_1$ $P_1 P_8 \dots P_4 P_5$ $P_5 P_9 \dots P_9 P_5$ $P_5 P_1$
————— ————— ————— —————

Die Polyederformel

In seiner Schrift „**Elementa doctrinae solidorum**“ (1758), das heißt „**Grundlagen der Lehre von den Körpern**“, erwähnt **Leonhard Euler** folgenden Satz:

Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper übersteigt die Summe der Zahl der Raumwinkel und der Zahl der Seitenflächen die Zahl der Grate um zwei.

$$S + H = A + 2$$

Zahl der Raumwinkel (Angulis solidis) = S

Zahl der Seitenflächen (Hedris) = H

Zahl der Grate (Acies) = A

Und er fügt unmittelbar hinzu:

„Ich bin freilich gezwungen zu bekennen, dass ich bisher keinen zuverlässigen Beweis dieses Satzes habe erbringen können; inzwischen ist jedoch seine Wahrheit für alle Arten von Körpern, bei welchen sie untersucht wird, nicht schwierig zu erkennen, so dass die folgende Induktion die Rolle eines Beweises spielen kann.“

Der Name **Polyeder** geht auf das Altgriechische zurück und bedeutet **Vielflächner**.

Für die Begriffe Raumwinkel, Grate und Seitenflächen verwenden wir heute **Ecken** (E), **Kanten** (K) und **Flächen** (F), so dass die Formel entsprechend lautet :

$$E + F = K + 2$$

Skizziere einige einfache Beispiele für Vielflächner, gib jeweils die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen an und überprüfe die Formel $E + F = K + 2$!

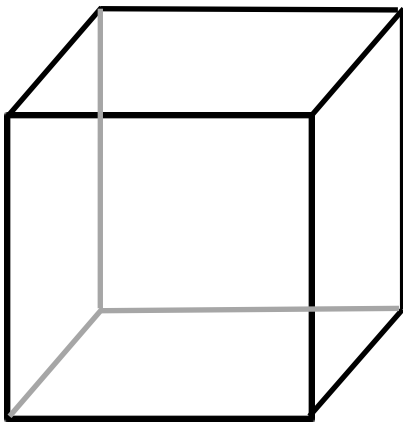
Der Name **Polyeder** geht auf das Altgriechische zurück und bedeutet **Vielflächner**.

Für die Begriffe Raumwinkel, Grate und Seitenflächen verwenden wir heute **Ecken** (E), **Kanten** (K) und **Flächen** (F), so dass die Formel entsprechend lautet :

$$E + F = K + 2$$

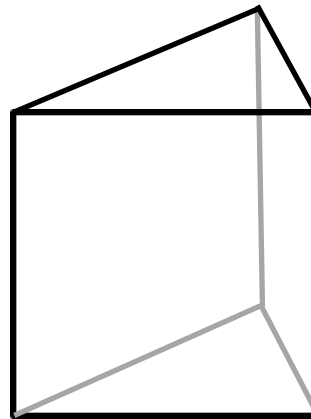
Einfache Beispiele für Vielflächner sind:

Würfel, **Prisma** (Altgr.: das Zersägte) und **Pyramide** :



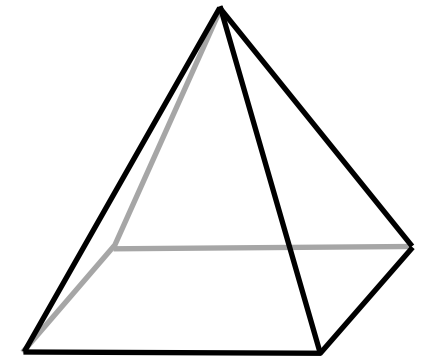
$$E + F = K + 2$$

$$8 + 6 = 12 + 2$$



$$E + F = K + 2$$

$$6 + 5 = 9 + 2$$

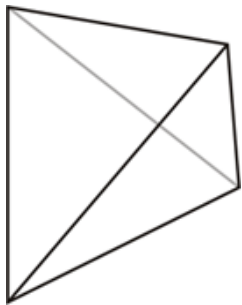


$$E + F = K + 2$$

$$5 + 5 = 8 + 2$$

Berühmte Beispiele für Vielflächner sind die nach dem griechischen Philosophen **Platon** (427 - 347 v. Chr.) benannten **Platonischen Körper**, die aus jeweils gleichen regulären Vielecken bestehen, so dass an jeder Ecke gleich viele Kanten zusammentreffen.

http://www.maphi.de/mathematik/platon/regulaere_koerper.html

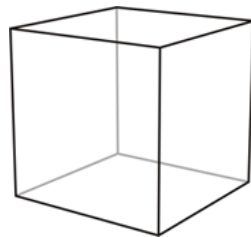


Tetraeder

E =

F =

K =

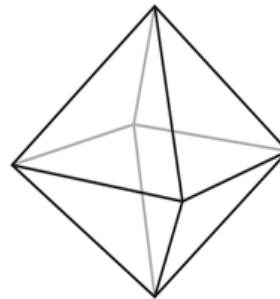


Hexaeder

E =

F =

K =

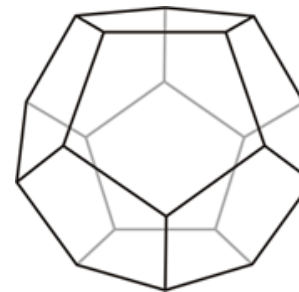


Oktaeder

E =

F =

K =

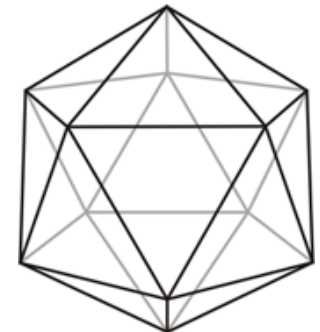


Dodekaeder

E =

F =

K =



Ikosaeder

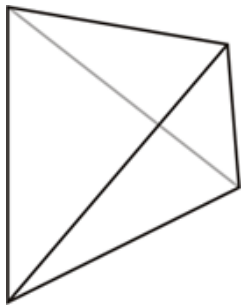
E =

F =

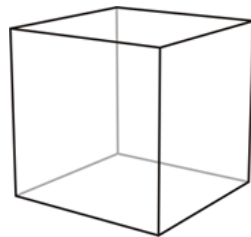
K =

Berühmte Beispiele für Vielflächner sind die nach dem griechischen Philosophen **Platon** (427 - 347 v. Chr.) benannten **Platonischen Körper**, die aus jeweils gleichen regulären Vielecken bestehen, so dass an jeder Ecke gleich viele Kanten zusammentreffen.

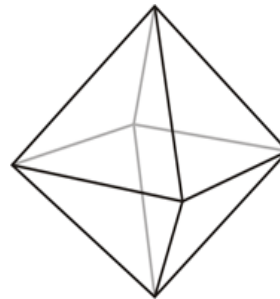
http://www.maphi.de/mathematik/platon/regulaere_koerper.html



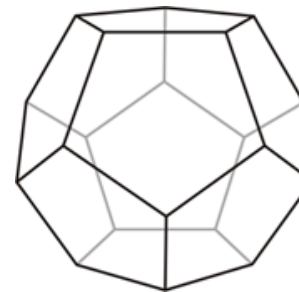
Tetraeder
(Vierflächner)
 $E + F = K + 2$
 $4 + 4 = 6 + 2$



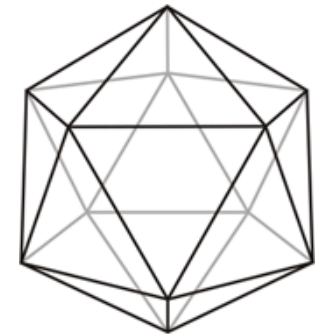
Hexaeder
(Sechseflächner)
 $E + F = K + 2$
 $8 + 6 = 12 + 2$



Oktaeder
(Achtflächner)
 $E + F = K + 2$
 $6 + 8 = 12 + 2$



Dodekaeder
(Zwölfflächner)
 $E + F = K + 2$
 $20 + 12 = 30 + 2$



Ikosaeder
(Zwanzigflächner)
 $E + F = K + 2$
 $12 + 20 = 30 + 2$

Bauen mit „Polydron“

Nimm vom Material Polydron 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... gleichseitige Dreiecke und baue daraus jeweils einen geschlossenen Körper ! Zähle E, F, K und überprüfe die Eulersche Polyederformel !

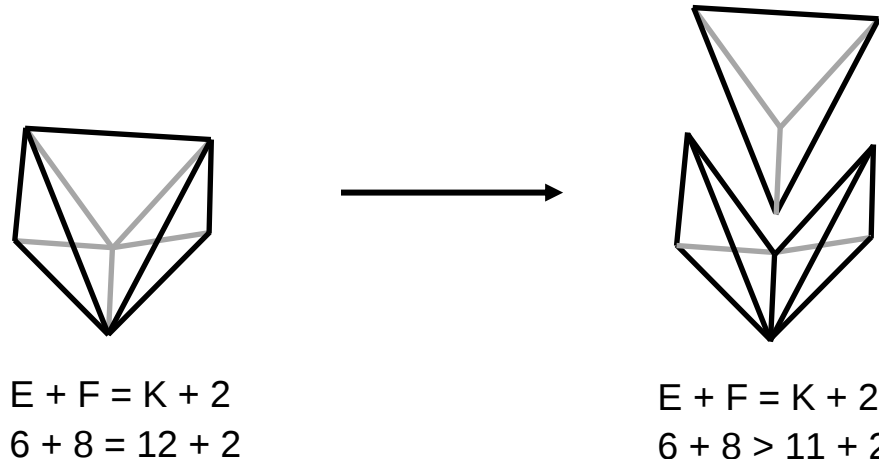
	E	K	$E + F = K + 2$
$F = 4$	4	6	wahr
$F = 6$			
$F = 8$			
$F = 10$			
$F = 12$			
$F = 14$			
$F = 16$			
$F = 20$			

Zum Beweis der Eulerschen Polyederformel

In seiner Schrift „**Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita**“ (1758), das heißt „**Beweis einiger ausgezeichneteigenschaften, welchen von ebenen Seitenflächen eingeschlossene Körper unterworfen sind**“, gibt **Leonhard Euler** einen Beweis für die Formel $E + F = K + 2$, der jedoch im Allgemeinen falsch ist.

Euler geht von einem Polyeder aus, dessen Ecken, Kanten und Flächen die Eulersche Formel erfüllen, und zeigt, dass wenn man eine Pyramide herausnimmt, der neue Körper immer noch die Formel erfüllt. Diesen Prozess führt er so lange fort, bis er schließlich eine dreiseitige Pyramide erhält, für die ja die Formel gilt. Deshalb muss die Formel auch für das ursprüngliche Polyeder gelten.

Dass dieses Beweisprinzip nicht auf jeden Polyeder übertragbar ist, zeigt folgendes Gegenbeispiel:



Die Formel verändert sich bei diesem Prozess!

Der Körper ist nicht mehr von Seitenflächen eingeschlossen!

Beweis der Eulerschen Polyederformel

Nehmen wir einen Körper an, der von ebenen 3-, 4-, 5-, ... , n-Ecken umschlossen wird, und für den die Formel $E + F = K + 2$ gälte.

Nimmt man im ersten Schnitt ein n-Eck heraus, bekommt der Körper eine Öffnung und die Formel lautet $E + F = K + 1$.

Im zweiten Schritt wird die Öffnung vergrößert, indem man vom „Rand“ der Öffnung ein m-Eck wegnimmt.

Ragt es etwa mit i Kanten in die Öffnung, werden bei diesem Prozess $i-1$ Ecken, 1 Fläche und i Kanten weggenommen.

An der Wahrheit der Formel ändert sich Nichts, denn es gilt:

$$E - (i - 1) + F - 1 = K - i + 1$$

$$E - i + 1 + F - 1 = K - i + 1$$

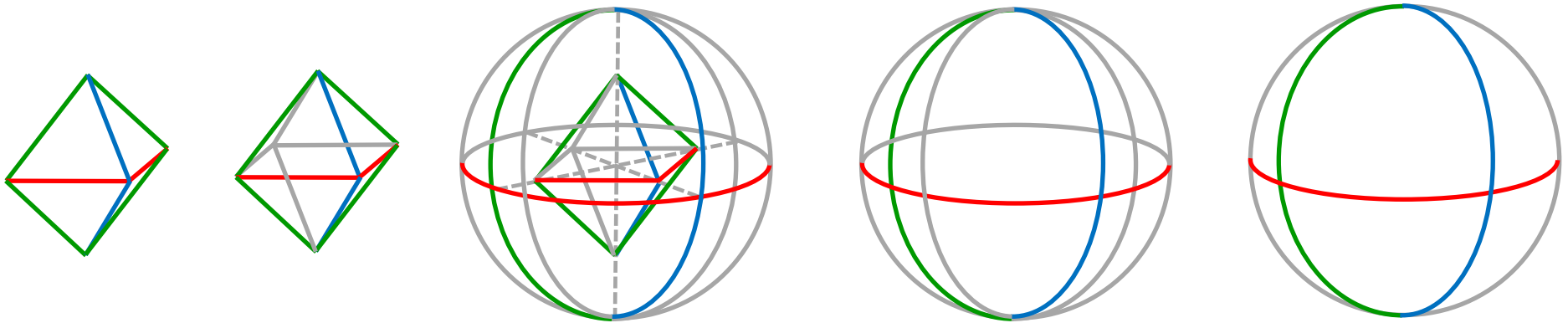
$$E - i + F = K - i + 1$$

$$E + F = K + 1 \quad \text{wahre Aussage}$$

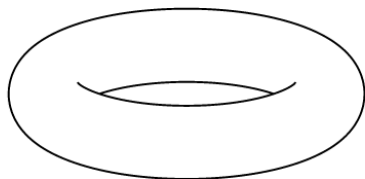
Denkt man sich diesen Prozess weitergeführt, erhält man schließlich ein m-Eck, mit m Ecken, 1 Fläche und m Kanten. Es ist also $E = m$, $F = 1$, $K = m$ und $E + F = m + 1 = K + 1$ ist wahr. Deshalb muss auch die ursprünglich angenommene Formel $E + F = K + 2$ wahr sein.

Bemerkung:

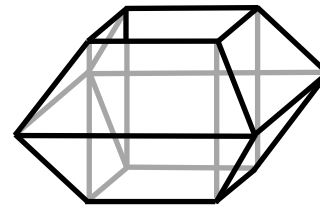
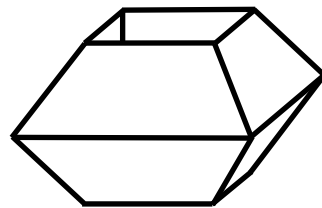
Der vorgelegte Beweis für die Eulersche Polyederformel kann nur gelingen, falls der Körper **topologisch äquivalent** zu einer **Kugel** ist, das bedeutet, dass er durch stetige Deformation in eine Kugel überführt werden kann.



Ein Körper, der **topologisch äquivalent** zu einem **Torus** ist, erfüllt die Eulersche Formel nicht! Als Beispiel kann der folgende kanalisierte Körper betrachtet werden:



Torus



$$E = 12$$

$$F = 12$$

$$K = 24$$

$$E + F = K < K + 2$$