Der Inhalt eines r - dimensionalen Parallelotops im $\mathbb{R}^n$

Die Gramsche Determinante

Arno Fehringer

Dezember 2021

Voraussetzungen :
Um das vorliegende Skriptum zu verstehen, benötigt man Kenntnisse über das Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^n$, die Entwicklung und Eigenschaften der Determinantenfunktion sowie die Darstellung der Lösungen linearer Gleichungssysteme durch Determinanten.

Quellen :

Deiser, Oliver ; Lasser, Caroline : Erste Hilfe in Linearer Algebra ; März 2021
https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=ela1

Friedl, Stefan : Geometrie für Lehramt Gymnasium ; Uni Regensburg SS 2019
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/friedl/papers/2019_geometrie-fuer-lehramt

Bemerkung : In beiden Quellen sind die Details der Herleitung der Inhaltsfomel für Parallelotope nicht ausgeführt. Deshalb habe ich das vorliegende Skriptum erstellt.

Definition:

Im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ seien die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r$, mit $1 \le r \le n$ sowie der Vektor $\vec{t}$ gegeben .

Dann heißt die Menge

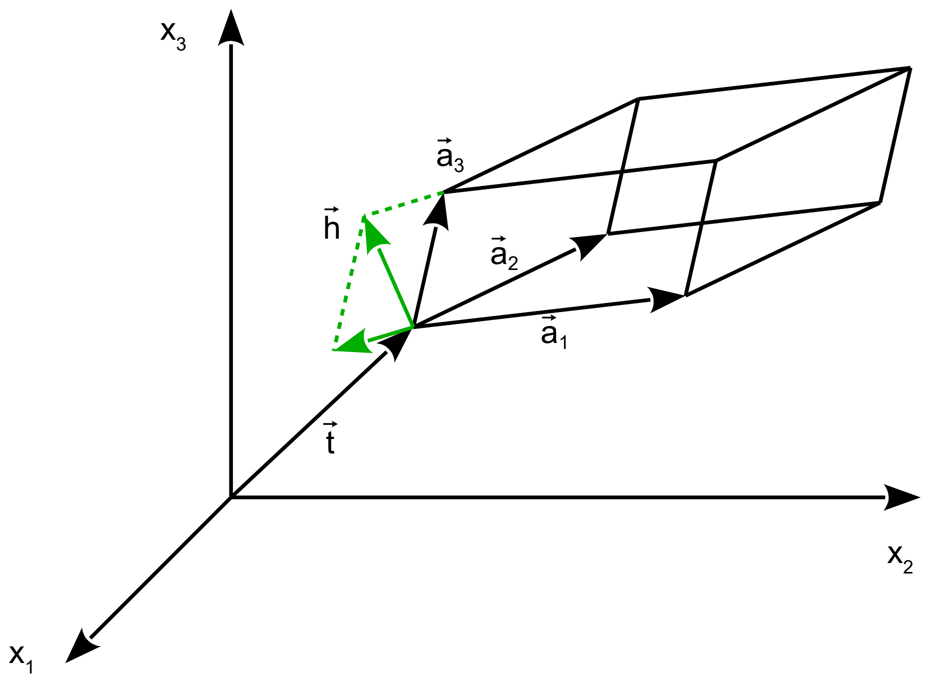
$$\boxed{P_r = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a}_i \;,\quad 0 \le \lambda_i \le 1 \quad i = 1, \ldots, r \right\}}$$

das von den Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r$, erzeugte **r-dimensionale Parallelotop** .

Der **r-dimensionale Inhalt** I_r des Parallelotops P_r ist induktiv definiert durch :

$$I_1 := |\vec{a}_1|$$

$$I_{r+1} := I_r \cdot |\vec{h}| \quad \text{mit} \quad \vec{h} \perp \vec{a}_1 \;,\; \ldots \;,\; \vec{a}_r$$



Das Parallelotop $P_2 \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad 2 \leq n$

$$l_2 = l_1 \cdot |\vec{h}| \quad \text{mit} \quad \vec{h} \perp \vec{a}_1 \quad , \quad \vec{h} = -\alpha_1 \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad , \quad l_1 = |\vec{a}_1|$$

$$l_2^2 = l_1^2 \cdot \vec{h}^{\,2}$$

$$l_2^2 = \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{h}^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\left(\alpha_1 \vec{a}_1\right)^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$ **Satz des Pythagoras**

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1^{\,2} \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{a}_1 \vec{h} = 0$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1}}$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0 \qquad | \cdot \alpha_1$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 = 0$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1} + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\frac{\left(\vec{a}_1 \vec{a}_2\right)^2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1} + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{a}_1^{\,2} \, \vec{h}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1 \vec{a}_2\right)^2 + \vec{a}_1^{\,2} \, \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\boxed{l_2^2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \vec{a}_2 \end{bmatrix}}$$ **Determinante der Gramschen Matrix**

J. P. Gram , Dänischer Mathematiker (1850 - 1916)

Das Parallelotop $P_3 \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad 3 \leq n$

$$I_3 = I_2 \cdot |\vec{h}| \quad \text{mit} \quad \vec{h} \perp \vec{a}_1 \, , \, \vec{a}_2 \quad , \quad \vec{h} = -(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) + \vec{a}_3$$

$$I_3^2 = I_2^2 \cdot \vec{h}^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2)^2 + \vec{a}_3^{\,2}$$

Satz des Pythagoras

$$\underline{\vec{h}^{\,2} = -(\vec{a}_1^{\,2} \alpha_1^2 + 2\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 \alpha_2 + \vec{a}_2^{\,2} \alpha_2^2) + \vec{a}_3^{\,2}}$$

$$\vec{a}_1 \vec{h} = 0 \quad , \quad \vec{a}_2 \vec{h} = 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 - \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_2 + \vec{a}_1 \vec{a}_3 = 0 \\ \text{II} & -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 - \vec{a}_2 \vec{a}_2 \alpha_2 + \vec{a}_2 \vec{a}_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_2 = \vec{a}_1 \vec{a}_3 \\ \text{II} & \vec{a}_2 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 \alpha_2 = \vec{a}_2 \vec{a}_3 \end{array}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_3 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_3 & \vec{a}_2 \vec{a}_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \vec{a}_2 \end{bmatrix}}} \qquad \boxed{\alpha_2 = \frac{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \vec{a}_3 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \vec{a}_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \vec{a}_2 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I} & \vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_2 = \vec{a}_1 \vec{a}_3 & \text{I} & \cdot\ \alpha_1 \\ \text{II} & \vec{a}_2 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 \alpha_2 = \vec{a}_2 \vec{a}_3 & \text{I} & \cdot\ \alpha_2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I} & \vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 \alpha_2 = \vec{a}_1 \vec{a}_3 \alpha_1 \\ \text{II} & \vec{a}_2 \vec{a}_1 \alpha_1 \alpha_2 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 \alpha_2^2 = \vec{a}_2 \vec{a}_3 \alpha_2 \end{array} \right] +$$

$$\underline{\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + 2\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 \alpha_2 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 \alpha_2^2 = \vec{a}_1 \vec{a}_3 \alpha_1 + \vec{a}_2 \vec{a}_3 \alpha_2}$$

$$\vec{h}^{\,2} \;=\; -\left(\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 \;+\; 2\vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1\alpha_2 \;+\; \vec{a}_2^{\,2}\alpha_2^2\right) \;+\; \vec{a}_3^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} \;=\; -\left(\vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 \;+\; \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2\right) \;+\; \vec{a}_3^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} \;=\; -\vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 \;-\; \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2 \;+\; \vec{a}_3\vec{a}_3$$

$$\vec{h}^{\,2} \;=\; -\vec{a}_1\vec{a}_3\,\frac{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}} \;-\; \vec{a}_2\vec{a}_3\,\frac{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}} \;+\; \vec{a}_3\vec{a}_3$$

$$l_2^2\;\vec{h}^{\,2} \;=\; -\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\,2}$$

$$l_3^2 \;=\; -\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\,2}$$

Spaltenvertauschung, Übergang zur transponierten Matrix, Faktorvertauschung :

$$l_3^2 \;=\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\,2}$$

$$l_3^2 \;=\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_2\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\,2}$$

Der rechts stehende Term ist die Determinante der Gramschen Matrix, entwickelt nach der 3. Spalte :

$$\boxed{\;l_3^2 \;=\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2 & \vec{a}_3\vec{a}_3\end{bmatrix}\;}$$

Das Parallelotop $P_r \subset \mathbb{R}^n$, $r \leq n$

$$I_r = I_{r-1} \cdot |\vec{h}| \quad \text{mit}$$

$$\vec{h} \perp \vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_{r-1} \quad , \quad \vec{h} = -\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\vec{a}_{r-1}\right) + \vec{a}_r$$

$$I_r^2 = I_{r-1}^2 \cdot \vec{h}^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\vec{a}_{r-1}\right)^2 + \vec{a}_r^{\,2}$$ **Satz des Pythagoras**

$$\vec{h}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\,2}\alpha_{r-1}^2\right) + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{a}_1\vec{h} = 0 \quad , \ldots , \quad \vec{a}_{r-1}\vec{h} = 0$$

(1) $-\vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 - \ldots - \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} + \vec{a}_1\vec{a}_r = 0$

$\vdots$

(r-1) $-\vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 - \ldots - \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} + \vec{a}_1\vec{a}_r = 0$

(1) $\vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\,\vec{a}_r$

$\vdots$

(r-1) $\vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r$

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}}} \qquad 1 \leq i \leq r-1$$

(1) $\vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\,\vec{a}_r \quad | \cdot \alpha_1$

$$\vdots$$

$$(r-1) \quad \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 + \ \ldots \ + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r \qquad | \cdot \alpha_{r-1}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & \vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1^{2} + \ \ldots \ + \vec{a}_1\vec{a}_{r-1}\alpha_1\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\vec{a}_r \\ & \vdots \\ (r-1) & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1\alpha_{r-1} + \ , \ldots , \ + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1}^{2} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r \end{array}\right] +$$

$$\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 + \sum_{1\le i<j\le r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\,2}\alpha_{r-1}^2 = \vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 + \ \ldots \ + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 + \sum_{1\le i<j\le r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\,2}\alpha_{r-1}^2\right) + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 + \ \ldots \ + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1}\right) + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = -\vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 - \ \ldots \ - \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1} + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = \sum_{i=1}^{r-1} -\vec{a}_i\vec{a}_r\alpha_i + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{h}^{\,2} = \sum_{i=1}^{r-1} -\frac{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}} \vec{a}_i\vec{a}_r + \vec{a}_r\vec{a}_r$$

Nach Voraussetzung ist $I_{r-1}^{\,2} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}$, so dass folgt :

$$l_{r-1}^{\,2}\ \vec{h}^{\,2} \;=\; \sum_{i=1}^{r-1} -\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_i\vec{a}_r} + \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}_{\vec{a}_r\vec{a}_r}$$

$$l_r^{\,2} \;=\; \sum_{i=1}^{r-1} -\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_i\vec{a}_r} + \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}_{\vec{a}_r\vec{a}_r}$$

Jetzt muss man wieder Umformungen vornehmen, nämlich Spaltenvertauschung, Übergang zur transponierten Matrix und Faktorvertauschung :

In der Matrix sei die r-1 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1 \,,\, \ldots \, r-2 \,,\, r$.

$$-\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r \end{bmatrix}_{\vec{a}_{r-1}\vec{a}_r}$$

Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt, die Zeile mit der Nummer r-1 fehlt :

$$-\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\ \vec{a}_r\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_r\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r$$

In der Matrix sei die r-2 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1 \,,\, \ldots \, r-3 \,,\, r \,,\, r-1$.

$$-\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_r & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_{r-2}\vec{a}_r}$$

Die Spaltenvertauschung erzeugt die Vorzeichenänderung und die Spaltennummerierung $1 \,,\, \ldots \, r-3 \,,\, r-1 \,,\, r$. Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt die Zeile mit der Nummer r-2 fehlt:

$$
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\
\vec{a}_r\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_r\,\vec{a}_{r-1}
\end{bmatrix} \vec{a}_{r-2}\vec{a}_r
$$

In der Matrix sei die r-3 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1\ ,\ .\ .\ .\ r-4\ ,\ r\ ,\ r-2\ ,\ r-1$.

$$
-\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \vec{a}_{r-3}\vec{a}_r
$$

Die 2-fache Spaltenvertauschung erzeugt keine Vorzeichenänderung und die Spaltennummerierung ist $1\ ,\ .\ .\ .\ r-4\ ,\ r-2\ ,\ r-1\ ,\ r$. Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt die Zeile mit der Nummer r-3 fehlt:

$$
-\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vec{a}_{r-4}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-4}\vec{a}_{r-1} \\
\vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \vec{a}_{r-3}\vec{a}_r
$$

Denkt man sich diesen Prozess fortgesetzt , erhält man auf der rechten Seite der Gleichung

$$
I_r^2 \;=\; \sum_{i=1}^{r-1} -\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \vec{a}_i\vec{a}_r \;+\; \begin{bmatrix}
\vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}
\end{bmatrix} \vec{a}_r\vec{a}_r
$$

gerade die **Determinante der Gramschen Matrix entwickelt nach der r-ten Spalte**, also ist

$$
\boxed{\; I_r^2 \;=\; \begin{bmatrix}
\vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vec{a}_r\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_r\vec{a}_r
\end{bmatrix} \;}
$$

Das Parallelotop $P_n \subset \mathbb{R}^n$

$$I_n^2 = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{bmatrix}$$

$$I_n^2 = \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix} \right]$$

$$I_n^2 = \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix} \right]$$

$$I_n^2 = \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix}^T \right] \left[\vec{a}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \vec{a}_n \right]$$

$$I_n^2 = \left[\vec{a}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \vec{a}_n \right] \left[\vec{a}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \vec{a}_n \right]$$

$$I_n^2 = \left[\vec{a}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \vec{a}_n \right]^2$$

$$\boxed{I_n = \left| \left[\vec{a}_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \vec{a}_n \right] \right|}$$

Betrag der Determinante der aufspannenden Vektoren