Der Inhalt eines r - dimensionalen Simplex im $\mathbb{R}^n$

Die Gramsche Determinante

Arno Fehringer

Dezember 2021

Quellen :

Fehringer, Arno : Der Inhalt eines r-dimensionalen Parallelotops; Dezember 2021

https://mathematikgarten.hpage.com/get_file.php?id=34766457&vnr=574474

Definition:

Im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ seien die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1 , \dots , \vec{a}_r$, mit $1 \le r \le n$ sowie der Vektor $\vec{t}$ gegeben .

Dann heißt die Menge

$$\boxed{S_r = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \vec{x} = \vec{t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \vec{a}_i \;,\; 0 \le \lambda_i \le 1 \;,\; i = 1, \dots, r \;,\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \le 1 \right\}}$$

das von den Vektoren $\vec{a}_1 , \dots , \vec{a}_r$, erzeugte **r-dimensionale Simplex** .

Der **r-dimensionale Inhalt** I_r **des Simplex** S_r ist induktiv definiert durch :

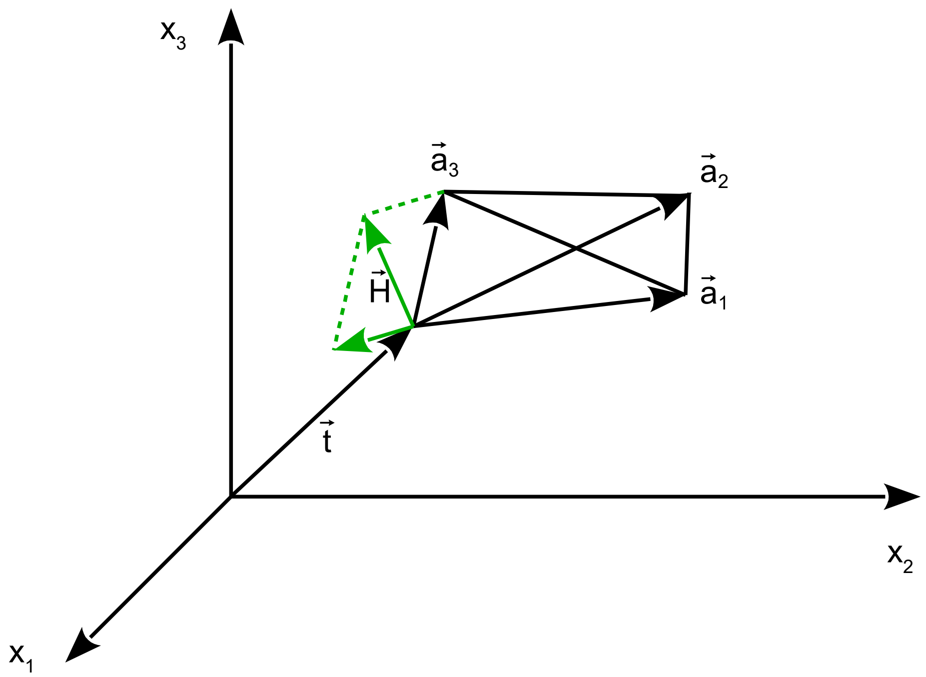
$$I_1 := |\vec{a}_1|$$

$$I_{r+1} := \frac{1}{r+1} \, I_r \cdot |\vec{H}| \quad \text{mit} \quad \vec{H} \perp \vec{a}_1 \, , \dots , \, \vec{a}_r$$

Jetzt besteht Klärungsbedarf !

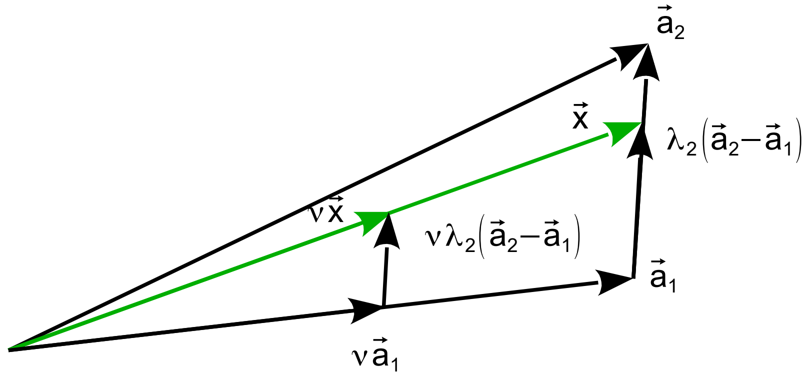
Warum die Bedingung $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \le 1$?

Woher kommt die Inhaltsdefinition ?



Die Punktmenge $S_2 = S_2(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$:

Zu jedem Punkt x in $S_2 = S_2(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ gibt es genau ein ν mit $0 \le \nu \le 1$ und einen Vektor $\nu\vec{x}$, so dass Folgendes gilt :



$$\nu\vec{x} = \nu\vec{a}_1 + \nu\lambda_2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)$$

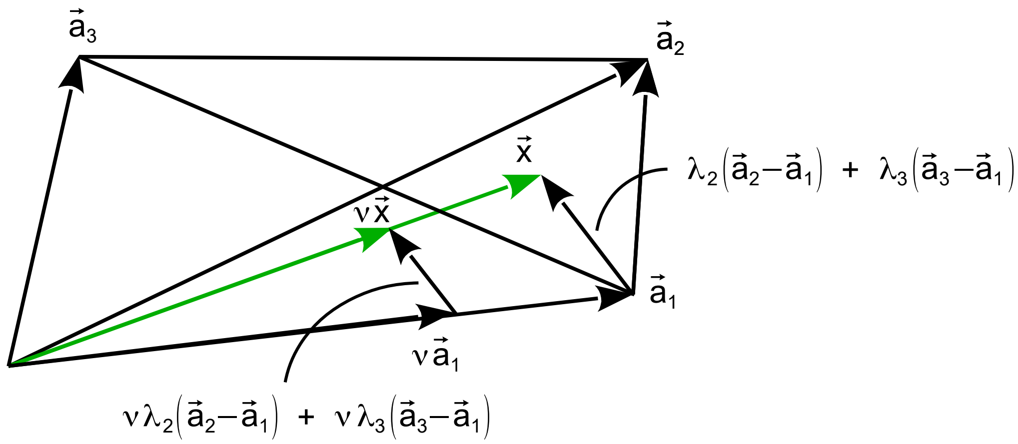
$$\nu\vec{x} = \nu\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2 - \nu\lambda_2\vec{a}_1$$

$$\nu\vec{x} = \nu(1-\lambda_2)\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2$$

$$\nu\vec{x} = \nu\lambda_1\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2 \quad \text{mit} \quad \nu\lambda_1 + \nu\lambda_2 = \nu(\lambda_1+\lambda_2) = \nu \le 1$$

Die Punktmenge $S_3 = S_3(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_2)$:

Zu jedem Punkt x in $S_3 = S_3(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_2)$ gibt es genau ein ν mit $0 \le \nu \le 1$ und einen Vektor $\nu\vec{x}$, so dass Folgendes gilt :



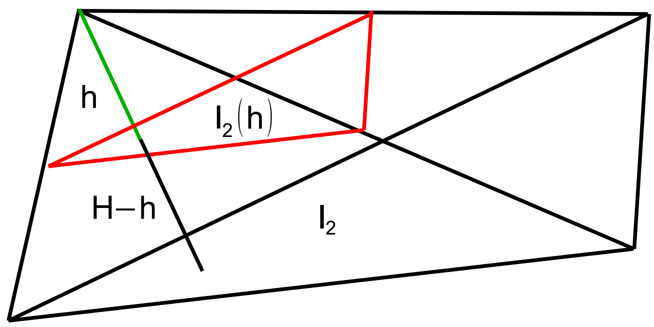
$$\nu\vec{x} = \nu\vec{a}_1 + \nu\lambda_2(\vec{a}_2-\vec{a}_1) + \nu\lambda_3(\vec{a}_3-\vec{a}_1)$$

$$\nu\vec{x} = \nu\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2 - \nu\lambda_2\vec{a}_1 + \nu\lambda_3\vec{a}_3 - \nu\lambda_3\vec{a}_1$$

$$\nu\vec{x} = \nu(1-\lambda_2-\lambda_3)\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2 + \nu\lambda_3\vec{a}_3$$

$$\nu\vec{x} = \nu\lambda_1\vec{a}_1 + \nu\lambda_2\vec{a}_2 + \nu\lambda_3\vec{a}_3 \quad \text{mit} \quad \nu\lambda_1 + \nu\lambda_2 + \nu\lambda_3 = \nu \le 1$$

Wegen der Ähnlichkeitssätze gilt :



$$\frac{I_2(h)}{I_2} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad \frac{I_r(h)}{I_r} = \left(\frac{H-h}{H}\right)^r$$

$$I_2(h) = I_2 \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 \qquad\qquad I_r(h) = I_r \left(\frac{H-h}{H}\right)^r$$

$$I_3 = \int_0^H I_2(h) \, dh \qquad\qquad I_{r+1} = \int_0^H I_r(h) \, dh$$

$$I_3 = \int_0^H I_2 \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 dh \qquad\qquad I_{r+1} = \int_0^H I_r \left(\frac{H-h}{H}\right)^r dh$$

$$I_3 = \int_0^H \frac{I_2}{H^2} (H-h)^2 dh \qquad\qquad I_{r+1} = \int_0^H \frac{I_r}{H^r} (H-h)^r dh$$

$$I_3 = \left[-\frac{1}{3} \frac{I_2}{H^2} (H-h)^3 \right]_0^H \qquad\qquad I_{r+1} = \left[-\frac{1}{r+1} \frac{I_r}{H^r} (H-h)^{r+1} \right]_0^H$$

$$I_3 = -\left(-\frac{1}{3} \frac{I_2}{H^2} (H-0)^3 \right) \qquad\qquad I_{r+1} = -\left(-\frac{1}{r+1} \frac{I_r}{H^r} (H-0)^{r+1} \right)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} I_3 H \qquad\qquad I_{r+1} = \frac{1}{r+1} I_r H$$

Das Simplex $S_2 \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad 2 \leq n$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 \cdot |\vec{H}| \quad \text{mit} \quad \vec{H} \perp \vec{a}_1 \quad , \quad \vec{H} = -\alpha_1 \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad , \quad I_1 = |\vec{a}_1|$$

$$I_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 I_1^2 \cdot \vec{H}^2$$

$$I_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{H}^2$$

$$\vec{H}^2 = -(\alpha_1 \vec{a}_1)^2 + \vec{a}_2^{\,2} \qquad \textbf{Satz des Pythagoras}$$

$$\vec{H}^2 = -\vec{a}_1^{\,2} \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\underline{\vec{H}^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}}$$

$$\vec{a}_1 \vec{H} = 0$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1}}$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0 \qquad | \cdot \alpha_1$$

$$-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 = 0$$

$$\underline{-\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1}$$

$$\vec{H}^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_1 \alpha_1^2 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{H}^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \alpha_1 + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{H}^2 = -\vec{a}_1 \vec{a}_2 \frac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1} + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\vec{H}^2 = -\frac{(\vec{a}_1 \vec{a}_2)^2}{\vec{a}_1 \vec{a}_1} + \vec{a}_2^{\,2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \vec{a}_1^{\,2} \vec{H}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-(\vec{a}_1 \vec{a}_2)^2 + \vec{a}_1^{\,2} \vec{a}_2^{\,2}\right)$$

$$\boxed{I_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \vec{a}_2 \end{bmatrix}}$$

Determinante der Gramschen Matrix

J. P. Gram , Dänischer Mathematiker (1850 - 1916)

Das Simplex $S_3 \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad 3 \leq n$

$$I_3 = \frac{1}{3} I_2 \cdot |\vec{H}| \quad \text{mit} \quad \vec{H} \perp \vec{a}_1 , \vec{a}_2 \quad , \quad \vec{H} = -\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right) + \vec{a}_3$$

$$I_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 I_2^2 \cdot \vec{H}^{\,2}$$

$$\vec{H}^{\,2} = -\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right)^2 + \vec{a}_3^{\,2}$$ **Satz des Pythagoras**

$$\underline{\vec{H}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 + 2\vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1\alpha_2 + \vec{a}_2^{\,2}\alpha_2^2\right) + \vec{a}_3^{\,2}}$$

$$\vec{a}_1\vec{H} = 0 \quad , \quad \vec{a}_2\vec{H} = 0$$

I $\quad -\vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1 - \vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_2 + \vec{a}_1\vec{a}_3 = 0$

II $\quad -\vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2\alpha_2 + \vec{a}_2\vec{a}_3 = 0$

I $\quad \vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1 + \vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_2 = \vec{a}_1\vec{a}_3$

II $\quad \vec{a}_2\vec{a}_1\alpha_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2\alpha_2 = \vec{a}_2\vec{a}_3$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 \end{bmatrix}}} \qquad \boxed{\alpha_2 = \frac{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 \end{bmatrix}}}$$

I $\quad \vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1 + \vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_2 = \vec{a}_1\vec{a}_3 \qquad | \cdot \alpha_1$

II $\quad \vec{a}_2\vec{a}_1\alpha_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2\alpha_2 = \vec{a}_2\vec{a}_3 \qquad | \cdot \alpha_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1^2 + \vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1\alpha_2 = \vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 \\ \text{II} & \vec{a}_2\vec{a}_1\alpha_1\alpha_2 + \vec{a}_2\vec{a}_2\alpha_2^2 = \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2 \end{array}\right] +$$

$$\underline{\vec{a}_1\vec{a}_1\alpha_1^2 + 2\vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1\alpha_2 + \vec{a}_2\vec{a}_2\alpha_2^2 = \vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 + \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2}$$

$$\vec{H}^{\,2} \;=\; -\left(\vec{a}_1^{\;2}\alpha_1^2 \;+\; 2\vec{a}_1\vec{a}_2\alpha_1\alpha_2 \;+\; \vec{a}_2^{\;2}\alpha_2^2\right) \;+\; \vec{a}_3^{\;2}$$

$$\vec{H}^{\,2} \;=\; -\left(\vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 \;+\; \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2\right) \;+\; \vec{a}_3^{\;2}$$

$$\vec{H}^{\,2} \;=\; -\vec{a}_1\vec{a}_3\alpha_1 \;-\; \vec{a}_2\vec{a}_3\alpha_2 \;+\; \vec{a}_3\vec{a}_3$$

$$\vec{H}^{\,2} \;=\; -\vec{a}_1\vec{a}_3\,\frac{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}} \;-\; \vec{a}_2\vec{a}_3\,\frac{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}} \;+\; \vec{a}_3\vec{a}_3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 I_2^2\;\vec{H}^{\,2} \;=$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\;2}\right)$$

$$I_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_3 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\;2}\right)$$

Spaltenvertauschung, Übergang zur transponierten Matrix, Faktorvertauschung :

$$I_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_3\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\;2}\right)$$

$$I_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_2\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_3 \;-\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_2\vec{a}_3 \;+\; \begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2\end{bmatrix}\vec{a}_3^{\;2}\right)$$

Der rechts stehende Term in Klammern ist die Determinante der Gramschen Matrix, entwickelt nach der 3. Spalte :

$$I_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2 & \vec{a}_3\vec{a}_3\end{bmatrix}$$

$$\boxed{I_3^2 = \left(\frac{1}{3!}\right)^2\begin{bmatrix}\vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \vec{a}_1\vec{a}_3\\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \vec{a}_2\vec{a}_3\\ \vec{a}_3\vec{a}_1 & \vec{a}_3\vec{a}_2 & \vec{a}_3\vec{a}_3\end{bmatrix}}$$

Das Simplex $S_r \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad r \le n$

$$I_r = \frac{1}{r} I_{r-1} \cdot |\vec{H}| \quad \text{mit}$$

$$\vec{H} \perp \vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_{r-1} \quad , \quad \vec{H} = -\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\vec{a}_{r-1}\right) + \vec{a}_r$$

$$I_r^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2 I_{r-1}^2 \cdot \vec{H}^2$$

$$\vec{H}^2 = -\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\vec{a}_{r-1}\right)^2 + \vec{a}_r^{\,2}$$ **Satz des Pythagoras**

$$\vec{H}^2 = -\left(\vec{a}_1^{\,2}\alpha_1^2 + \sum_{1 \le i < j \le r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\,2}\alpha_{r-1}^2\right) + \vec{a}_r^{\,2}$$

$$\vec{a}_1\vec{h} = 0 \quad , \ldots , \quad \vec{a}_{r-1}\vec{h} = 0$$

(1) $\quad -\vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 - \ldots - \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} + \vec{a}_1\vec{a}_r = 0$

$\vdots$

(r-1) $\quad -\vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 - \ldots - \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} + \vec{a}_1\vec{a}_r = 0$

(1) $\quad \vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\,\vec{a}_r$

$\vdots$

(r-1) $\quad \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r$

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}}} \qquad 1 \le i \le r-1$$

$$
\begin{array}{llr}
(1) & \vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1 + \;...\; + \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \mid \cdot\,\alpha_1 \\
 & \vdots & \\
(r-1) & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1 + \;...\; + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \mid \cdot\,\alpha_{r-1}
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
(1) & \vec{a}_1\,\vec{a}_1\alpha_1^{\;2} + \;...\; + \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1}\alpha_1\alpha_{r-1} = \vec{a}_1\,\vec{a}_r \\
 & \vdots \\
(r-1) & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1\alpha_1\alpha_{r-1} + \;,...,\; + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1}\alpha_{r-1}^{\;2} = \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r
\end{array}
\right] +
$$

$$
\underline{\vec{a}_1^{\;2}\alpha_1^2 + \sum_{1\le i<j\le r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\;2}\alpha_{r-1}^2 = \vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 + \;...\; + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1}}
$$

$$
\vec{H}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1^{\;2}\alpha_1^2 + \sum_{1\le i<j\le r-1} 2\vec{a}_i\vec{a}_j\alpha_i\alpha_j + \vec{a}_{r-1}^{\;2}\alpha_{r-1}^2\right) + \vec{a}_r^{\;2}
$$

$$
\vec{H}^{\,2} = -\left(\vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 + \;...\; + \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1}\right) + \vec{a}_r^{\;2}
$$

$$
\vec{H}^{\,2} = -\vec{a}_1\vec{a}_r\alpha_1 - \;...\; - \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r\alpha_{r-1} + \vec{a}_r^{\;2}
$$

$$
\vec{H}^{\,2} = \sum_{i=1}^{r-1} -\vec{a}_i\vec{a}_r\alpha_i + \vec{a}_r^{\;2}
$$

$$
\vec{H}^{\,2} = \sum_{i=1}^{r-1} -\frac{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}}\,\vec{a}_i\vec{a}_r + \vec{a}_r\vec{a}_r
$$

Nach Voraussetzung ist $I_{r-1}^{\;2} = \left(\frac{1}{(r-1)!}\right)^2 \begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}$, so

dass folgt :

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{1}{(r-1)}\right)^2 \; I_{r-1}^{\;2}\; \vec{h}^{\,2} \;=$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{1}{(r-1)}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{r-1} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_i\vec{a}_r} + \begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}_{\vec{a}_r\vec{a}_r} \right)$$

$$I_r^{\;2} \;=\; \left(\frac{1}{r\,!}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{r-1} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_i\vec{a}_r} + \begin{bmatrix} \vec{a}_1\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}_{\vec{a}_r\vec{a}_r} \right)$$

Jetzt muss man wieder Umformungen vornehmen, nämlich Spaltenvertauschung, Übergang zur transponierten Matrix und Faktorvertauschung :

In der Matrix sei die r-1 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1 \;,\; .\;.\;.\; r-2 \;,\; r \;.$

$$-\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r \end{bmatrix}_{\vec{a}_{r-1}\vec{a}_r}$$

Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt, die Zeile mit der Nummer r-1 fehlt :

$$-\begin{bmatrix} \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\ \vec{a}_r\,\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_r\,\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix}_{\vec{a}_{r-1}\vec{a}_r}$$

In der Matrix sei die r-2 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1 \;,\; .\;.\;.\; r-3 \;,\; r \;,\; r-1 \;.$

$$-\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\,\vec{a}_r & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & \cdot \end{bmatrix}_{\vec{a}_{r-2}\vec{a}_r}$$

Die Spaltenvertauschung erzeugt die Vorzeichenänderung und die Spaltennummerierung

$1 \;,\; . . . \; r-3 \;,\; r-1 \;,\; r$. Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt die Zeile mit der Nummer r-2 fehlt:

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\ \vec{a}_r\;\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_r\;\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix} \vec{a}_{r-2}\vec{a}_r$$

In der Matrix sei die r-3 -te Spalte modifiziert , und die Spaltennummerierung ist gegeben durch $1 \;,\; . . . \; r-4 \;,\; r \;,\; r-2 \;,\; r-1$.

$$-\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & \vec{a}_1\;\vec{a}_r & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & . & . \end{bmatrix} \vec{a}_{r-3}\vec{a}_r$$

Die 2-fache Spaltenvertauschung erzeugt keine Vorzeichenänderung und die Spaltennummerierung ist $1 \;,\; . . . \; r-4 \;,\; r-2 \;,\; r-1 \;,\; r$. Die Transponierung und die Faktorvertauschung erzeugt die gleiche Zeilennummerierung, das heißt die Zeile mit der Nummer r-3 fehlt:

$$-\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \vec{a}_{r-4}\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_{r-4}\vec{a}_{r-1} \\ \vec{a}_{r-2}\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_{r-2}\vec{a}_{r-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \vec{a}_{r-3}\vec{a}_r$$

Denkt man sich diesen Prozess fortgesetzt , erhält man auf der rechten Seite der Gleichung

$$I_r^2 = \left(\frac{1}{r!}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{r-1} -\begin{bmatrix} . & . & \vec{a}_1\;\vec{a}_r & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_r & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \vec{a}_i\vec{a}_r + \begin{bmatrix} \vec{a}_1\;\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_1\;\vec{a}_{r-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \vec{a}_{r-1}\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_{r-1}\vec{a}_{r-1} \end{bmatrix} \vec{a}_r\vec{a}_r \right)$$

gerade die **Determinante der Gramschen Matrix entwickelt nach der r-ten Spalte**, also ist

$$\boxed{I_r^2 = \left(\frac{1}{r!}\right)^2 \begin{bmatrix} \vec{a}_1\;\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_1\;\vec{a}_r \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \vec{a}_r\vec{a}_1 & . & . & . & . & . & \vec{a}_r\vec{a}_r \end{bmatrix}}$$

Das Simplex $S_n \subset \mathbb{R}^n$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{bmatrix}$$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix} \right]$$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix} \right]$$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left[\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{a}_n \end{pmatrix}^T \right] \left[\vec{a}_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \vec{a}_n \right]$$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left[\vec{a}_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \vec{a}_n \right] \left[\vec{a}_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \vec{a}_n \right]$$

$$I_n^{\,2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \left[\vec{a}_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \vec{a}_n \right]^2$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n!} \left| \left[\vec{a}_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \vec{a}_n \right] \right|}$$

Betrag der Determinante der aufspannenden Vektoren dividiert durch n!