Berührkreise zu 3 gegebenen Kreisen

(Version 2)

Arno Fehringer

Januar 2022

Quellen :

Apollonius' Tangency Problem :

https://www.mathpages.com/home/kmath113/kmath113.htm

Röttgen-Burtscheidt, Johannes : Das Apollonische Berührproblem (2007)

http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf

Bemerkungen :
Beide angegebenen Quellen sind wenig ausführlich bezogen auf Berechnungen der Berührkreismittelpunkte und Radien mit Hilfe der Analytischen Geometrie.
Insgesamt habe ich nur wenige weitere Quellen zum Berührkreisproblem gefunden, weshalb ich diese Abhandlung schreibe.

Gibt es zu 3 gegebenen Kreisen weitere Kreise, welche die gegebenen Kreise berühren ?

In Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/Apollonisches_Problem) heißt es hierzu :

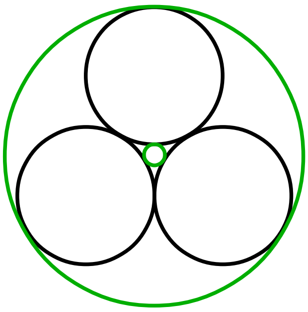
„Das **Apollonische Problem** (**Problem des Apollonios**) ist eines der berühmtesten Probleme der antiken Geometrie. Es geht darum, mit Zirkel und Lineal die Kreise zu konstruieren, die drei beliebige vorgegebene Kreise berühren. Apollonius von Perge (* ca. 265 v. Chr.; † ca. 190 v. Chr.) widmet diesem Problem ein nicht erhaltenes Buch (*Über Berührungen*).“

In dieser Arbeit sollen die Mittelpunkte und Radien der Lösungskreise mit Hilfe der Analytischen Geometrie, der Vektorrechnung und der Theorie der Linearen Gleichungssysteme bestimmt werden.

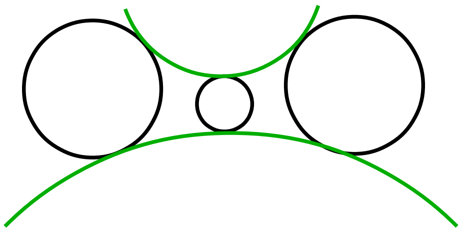
Bemerkungen :

(1) Das Problem hat offenbar keine Lösung, wenn die 3 Kreise unterschiedliche Radien haben und konzentrisch sind !

(2) Das Problem hat wahrscheinlich genau zwei Lösungen im Fall von 3 sich paarweise berührenden Kreisen mit gleichen Radien :
Der erste Berührkreis berührt die gegebenen Kreise von außen, der zweite Berührkreis berührt die gegebenen von innen.



(3) Das Problem hat wahrscheinlich genau zwei Lösungen bei der symmetrischen Kreisanordnung, falls die Berührkreise die gegebenen Kreise von außen berühren sollen :

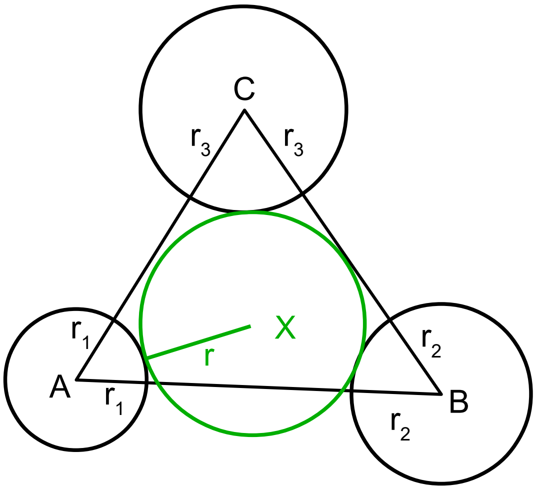


Die wenigen Bemerkungen zeigen, dass man wohl nicht ohne Fallunterscheidungen auskommen wird !

Ich will in diesem Rahmen nur das Problem betrachten, bei dem die gegebenen Kreise jeweils im Äußeren der anderen Kreise liegen oder sich von außen berühren und die Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen.

Berechnungen

Gegeben seien die 3 Kreise $K_{A;r_1}$, $K_{B;r_2}$, $K_{C;r_3}$ welche derart angeordnet sind, dass sie sich jeweils im Äußeren jedes anderen Kreises befinden oder sich von außen berühren.
Der gesuchte Berührkreis $K_{X;r}$ ist in der Zeichnung grün markiert und soll alle 3 Kreise von außen berühren :



Punkte, Vektoren :

$$A=(A_1 | A_2) \quad , \quad B=(B_1 | B_2) \quad , \quad C=(C_1 | C_2) \quad , \quad X=(X_1 | X_2)$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{B}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\vec{C}-\vec{B} \quad , \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\vec{A}-\vec{C} \quad , \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\vec{B}-\vec{A} \quad , \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\vec{X}-\vec{A} \quad , \quad \vec{x}-\vec{c}=\vec{X}-\vec{B} \quad , \quad \vec{x}+\vec{b}=\vec{X}-\vec{C}$$

Die Abstandsbedingungen für den Berührkreis $K_{X;r}$ lauten :

$$\text{I} \qquad (\vec{X}-\vec{A})^2 = (r+r_1)^2$$

$$\text{II} \qquad (\vec{X}-\vec{B})^2 = (r+r_2)^2$$

$$\text{III} \qquad (\vec{X}-\vec{C})^2 = (r+r_3)^2$$

$$\text{I} \qquad \vec{x}^2 = (r+r_1)^2$$

$$\text{II} \qquad (\vec{x}-\vec{c})^2 = (r+r_2)^2$$

$$\text{III} \qquad (\vec{x}+\vec{a})^2 = (r+r_3)^2$$

$$\text{I} \qquad \vec{x}^2 = r^2+2r_1r+r_1^2$$

$$\text{II} \qquad \vec{x}^2-2\vec{c}\vec{x}+\vec{c}^2 = r^2+2r_2r+r_2^2$$

$$\text{III} \qquad \vec{x}^2+2\vec{b}\vec{x}+\vec{b}^2 = r^2+2r_3r+r_3^2$$

$$\text{I-II} \qquad 2\vec{c}\vec{x}-\vec{c}^2 = 2(r_1-r_2)r+r_1^2-r_2^2$$

$$\text{I-III} \qquad -2\vec{b}\vec{x}-\vec{b}^2 = 2(r_1-r_3)r+r_1^2-r_3^2$$

$$2\vec{c}\vec{x} = 2(r_1-r_2)r + \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2$$

$$-2\vec{b}\vec{x} = 2(r_1-r_3)r + \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2$$

$$2c_1x_1 + 2c_2x_2 = 2(r_1-r_2)r + \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2$$

$$-2b_1x_1 - 2b_2x_2 = 2(r_1-r_3)r + \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2$$

Lösungen für x_1 , x_2 in Determinatenschreibweise :

$$\boxed{x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 2(r_1-r_2) & 2c_2 \\ 2(r_1-r_3) & -2b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2c_1 & 2c_2 \\ -2b_1 & -2b_2 \end{bmatrix}} r + \frac{\begin{bmatrix} \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2 & 2c_2 \\ \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2 & -2b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2c_1 & 2c_2 \\ -2b_1 & -2b_2 \end{bmatrix}}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2c_1 & 2(r_1-r_2) \\ -2b_1 & 2(r_1-r_3) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2c_1 & 2c_2 \\ -2b_1 & -2b_2 \end{bmatrix}} r + \frac{\begin{bmatrix} 2c_1 & \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2 \\ -2b_1 & \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2c_1 & 2c_2 \\ -2b_1 & -2b_2 \end{bmatrix}}}$$

Abkürzungen :

$$D \; := \; \begin{bmatrix} 2c_1 & 2c_2 \\ -2b_1 & -2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 & -2b_1 \\ 2c_2 & -2b_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = -8A_{\Delta ABC}$$

$$\boxed{D = -4\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = -8A_{\Delta ABC}}$$

$$M_1 \; := \; \begin{bmatrix} 2(r_1-r_2) & 2c_2 \\ 2(r_1-r_3) & -2b_2 \end{bmatrix} = -4\left[\ (r_1-r_2)b_2+(r_1-r_3)c_2\ \right]$$

$$M_1 \; = \; -4\left[\ (r_1-r_2)b_2+(r_1-r_3)c_2\ \right]$$

$$M_1 \; = \; -4\left[\ r_1b_2-r_2b_2+r_1c_2-r_3c_2\ \right]$$

$$M_1 \; = \; -4\left[\ r_1(b_2+c_2)-r_2b_2-r_3c_2\ \right]$$
$$M_1 \; = \; -4\left[\ -r_1a_2-r_2b_2-r_3c_2\ \right]$$

$$\boxed{M_1 \; = \; 4\left[\ r_1a_2+r_2b_2+r_3c_2\ \right]}$$

$$N_1 \; := \; \begin{bmatrix} \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2 & 2c_2 \\ \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2 & -2b_2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 \; = \; -2\left(\vec{c}^2+r_1^2-r_2^2\right)b_2 \; - \; 2\left(\vec{b}^2+r_1^2-r_3^2\right)c_2$$

$$N_1 \; = \; -2\left[\ \left(\vec{c}^2+r_1^2-r_2^2\right)b_2 \; + \; \left(\vec{b}^2+r_1^2-r_3^2\right)c_2\ \right]$$

$$N_1 \; = \; -2\left[\ \vec{c}^2b_2 + r_1^2b_2 - r_2^2b_2 + \vec{b}^2c_2 + r_1^2c_2 - r_3^2c_2\ \right]$$
$$N_1 \; = \; -2\left[\ \vec{c}^2b_2 + \vec{b}^2c_2 + r_1^2(b_2 + c_2) - r_2^2b_2 - r_3^2c_2\ \right]$$
$$N_1 \; = \; -2\left[\ \vec{c}^2b_2 + \vec{b}^2c_2 - r_1^2a_2 - r_2^2b_2 - r_3^2c_2\ \right]$$

$$N_1 \; = \; 2\left[\ r_1^2a_2 + r_2^2b_2 + r_3^2c_2 - \vec{c}^2b_2 - \vec{b}^2c_2\ \right]$$

$$\boxed{N_1 \; = \; 2\left[\ r_1^2a_2 + \left(r_2^2-\vec{c}^2\right)b_2 + \left(r_3^2-\vec{b}^2\right)c_2\ \right]}$$

$$M_2 := \begin{bmatrix} 2c_1 & 2(r_1-r_2) \\ -2b_1 & 2(r_1-r_3) \end{bmatrix} = 4[\ (r_1-r_2)b_1+(r_1-r_3)c_1\ ]$$

$$M_2 = 4[\ (r_1-r_2)b_1+(r_1-r_3)c_1\ ]$$

$$M_2 = 4[\ r_1b_1-r_2b_1+r_1c_1-r_3c_1\ ]$$

$$M_2 = 4[\ r_1(b_1+c_1)-r_2b_1-r_3c_1\ ]$$

$$M_2 = 4[\ -r_1a_1-r_2b_1-r_3c_1\ ]$$

$$\boxed{M_2 = -4[\ r_1a_1+r_2b_1+r_3c_1\ ]}$$

$$N_2 := \begin{bmatrix} 2c_1 & \vec{c}^2+r_1^2-r_2^2 \\ -2b_1 & \vec{b}^2+r_1^2-r_3^2 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = 2(\vec{c}^2+r_1^2-r_2^2)b_1 + 2(\vec{b}^2+r_1^2-r_3^2)c_1$$

$$N_2 = 2[\ (\vec{c}^2+r_1^2-r_2^2)b_1 + 2(\vec{b}^2+r_1^2-r_3^2)c_1\ ]$$

$$N_2 = 2[\ \vec{c}^2b_1 + r_1^2b_1 - r_2^2b_1 + \vec{b}^2c_1 + r_1^2c_1 - r_3^2c_1\ ]$$

$$N_2 = 2[\ \vec{c}^2b_1 + \vec{b}^2c_2 + r_1^2(b_1 + c_1) - r_2^2b_1 - r_3^2c_1\ ]$$

$$N_2 = 2[\ \vec{c}^2b_1 + \vec{b}^2c_1 - r_1^2a_1 - r_2^2b_1 - r_3^2c_1\ ]$$

$$N_2 = -2[\ r_1^2a_1 + r_2^2b_1 + r_3^2c_1 - \vec{c}^2b_1 - \vec{b}^2c_1\ ]$$

$$\boxed{N_2 = 2[\ r_1^2a_1 + (r_2^2-\vec{c}^2)b_1 + (r_3^2-\vec{b}^2)c_1\ ]}$$

Also folgt:

$$\underline{x_1 = \frac{M_1}{D}\ r + \frac{N_1}{D}} \quad \Rightarrow \quad \underline{D x_1 = M_1 r + N_1}$$

$$\underline{x_2 = \frac{M_2}{D}\ r + \frac{N_2}{D}} \quad \Rightarrow \quad \underline{D x_2 = M_2 r + N_2}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{M_1}{D}\ r + \frac{N_1+A_1D}{D}}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{M_2}{D}\ r + \frac{N_2+A_2D}{D}}$$

Quadratische Gleichung für r :

$$\text{I} \qquad \vec{x}^2 = r^2 + 2r_1 r + r_1^{\,2}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = r^2 + 2r_1 r + r_1^{\,2}$$

$$(Dx_1)^2 + (Dx_2)^2 = D^2 r^2 + 2D^2 r_1 r + D^2 r_1^{\,2}$$

$$(M_1 r + N_1)^2 + (M_2 r + N_2)^2 = D^2 r^2 + 2D^2 r_1 r + D^2 r_1^{\,2}$$

$$M_1^2 r^2 + 2M_1 N_1 r + N_1^2 + M_2^2 r^2 + 2M_2 N_2 r + N_2^2 = D^2 r^2 + 2D^2 r_1 r + D^2 r_1^{\,2}$$

$$M_1^2 r^2 + M_2^2 r^2 - D^2 r^2 + 2M_1 N_1 r + 2M_2 N_2 r - 2D^2 r_1 r + N_1^2 + N_2^2 - D^2 r_1^{\,2} = 0$$
$$\left(M_1^2 + M_2^2 - D^2\right) r^2 + 2\left(M_1 N_1 + M_2 N_2 - D^2 r_1\right) r + N_1^2 + N_2^2 - D^2 r_1^{\,2} = 0$$

$$\underline{E := M_1^2 + M_2^2 - D^2} \quad , \quad \underline{F := 2\left(M_1 N_1 + M_2 N_2 - D^2 r_1\right)} \quad , \quad \underline{G := N_1^2 + N_2^2 - D^2 r_1^2}$$

$$\boxed{Er^2 + Fr + G = 0}$$

Nebenrechnungen :

$$M_1^2 + M_2^2 = \left(4[\ r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2\ ]\right)^2 + \left(-4[\ r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1\ ]\right)^2$$

$$M_1^2 + M_2^2 = 16\left[\ [\ r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2\ ]^2 + [\ r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1\ ]^2\ \right]$$

$$\frac{M_1^2 + M_2^2}{16} = [\ r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2\ ]^2 + [\ r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1\ ]^2$$

$$\frac{M_1^2 + M_2^2}{16} = r_1^2 a_2^2 + r_2^2 b_2^2 + r_3^2 c_2^2 + 2r_1 r_2 a_2 b_2 + 2r_2 r_3 b_2 c_2 + 2r_3 r_1 c_2 a_2$$
$$+ r_1^2 a_1^2 + r_2^2 b_1^2 + r_3^2 c_1^2 + 2r_1 r_2 a_1 b_1 + 2r_2 r_3 b_1 c_1 + 2r_3 r_1 c_1 a_1$$

$$\frac{M_1^2 + M_2^2}{16} = r_1^2 a_2^2 + r_2^2 b_2^2 + r_3^2 c_2^2 + 2r_1 r_2 a_2 b_2 + 2r_2 r_3 b_2 c_2 + 2r_3 r_1 c_2 a_2$$
$$+ r_1^2 a_1^2 + r_2^2 b_1^2 + r_3^2 c_1^2 + 2r_1 r_2 a_1 b_1 + 2r_2 r_3 b_1 c_1 + 2r_3 r_1 c_1 a_1$$

$$\frac{M_1^2+M_2^2}{16} \;=\; r_1^2a_2^2+r_2^2b_2^2+r_3^2c_2^2 \;+\; 2r_1r_2a_2b_2+2r_2r_3b_2c_2+2r_3r_1c_2a_2$$

$$+\; r_1^2a_1^2+r_2^2b_1^2+r_3^2c_1^2 \;+\; 2r_1r_2a_1b_1+2r_2r_3b_1c_1+2r_3r_1c_1a_1$$

$$\frac{M_1^2+M_2^2}{16} \;=\; r_1^2\vec{a}^2+r_2^2\vec{b}^2+r_3^2\vec{c}^2 \;+\; 2r_1r_2\vec{a}\vec{b}+2r_2r_3\vec{b}\vec{c}+2r_3r_1\vec{c}\vec{a}$$

$$\frac{M_1^2+M_2^2}{16} \;=\; \left(\; r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c} \;\right)^2$$

$$M_1^2+M_2^2 \;=\; 16\left(\; r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c} \;\right)^2$$

$$E \;=\; M_1^2 \;+\; M_2^2 \;-\; D^2$$

$$\boxed{E \;=\; 16\left(\; r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c} \;\right)^2 \;-\; D^2}$$

$$M_1N_1 \;=\; 4\left[\; r_1a_2+r_2b_2+r_3c_2 \;\right]\cdot 2\left[\; {r_1}^2a_2 \;+\; \left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_2 \;+\; \left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_2 \;\right]$$

$$\frac{M_1N_1}{8} \;=\; \left[\; r_1a_2+r_2b_2+r_3c_2 \;\right]\cdot\left[\; {r_1}^2a_2 \;+\; \left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_2 \;+\; \left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_2 \;\right]$$

$$\frac{M_1N_1}{8} \;=\; r_1^3a_2^2 \;+\; r_2r_1^2b_2a_2 \;+\; r_3r_1^2c_2a_2$$

$$r_1\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)a_2b_2 \;+\; r_2\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_2^2 \;+\; r_3\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)c_2b_2$$

$$r_1\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)a_2c_2+r_2\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)b_2c_2+r_3\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_2^2$$

$$M_2N_2 \;=\; 4\left[\; r_1a_1+r_2b_1+r_3c_1 \;\right]\cdot 2\left[\; {r_1}^2a_1 \;+\; \left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_1 \;+\; \left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_1 \;\right]$$

$$\frac{M_2N_2}{8} \;=\; \left[\; r_1a_1+r_2b_1+r_3c_1 \;\right]\cdot\left[\; {r_1}^2a_1 \;+\; \left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_1 \;+\; \left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_1 \;\right]$$

$$\frac{M_2N_2}{8} \;=\; r_1^3 1_2^2 \;+\; r_2r_1^2b_1a_1 \;+\; r_3r_1^2c_1a_1$$

$$r_1\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)a_1b_1 \;+\; r_2\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)b_1^2 \;+\; r_3\left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)c_1b_1$$

$$r_1\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)a_1c_1 \;+\; r_2\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)b_1c_1 \;+\; r_3\left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)c_1^2$$

$$\frac{M_1N_1}{8} + \frac{M_2N_2}{8} = r_1^3a_2^2 + r_2r_1^2b_2a_2 + r_3r_1^2c_2a_2$$

$$r_1\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)a_2b_2 + r_2\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)b_2^2 + r_3\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)c_2b_2$$

$$r_1\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)a_2c_2+r_2\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)b_2c_2+r_3\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)c_2^2$$

$$r_1^3a_1^2 + r_2r_1^2b_1a_1 + r_3r_1^2c_1a_1$$

$$r_1\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)a_1b_1 + r_2\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)b_1^2 + r_3\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)c_1b_1$$

$$r_1\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)a_1c_1 + r_2\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)b_1c_1 + r_3\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)c_1^2$$

$$\frac{M_1N_1}{8} + \frac{M_2N_2}{8} = r_1^3\vec{a}^{\,2} + r_2r_1^2\vec{b}\vec{a} + r_3r_1^2\vec{c}\,\vec{a}$$

$$r_1\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{a}\,\vec{b} + r_2\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{b}^{\,2} + r_3\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{c}\,\vec{b}$$

$$r_1\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{a}\,\vec{c}+r_2\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{b}\,\vec{c}+r_3\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{c}^{\,2}$$

$$\frac{M_1N_1}{8} + \frac{M_2N_2}{8} = \left[\ r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c}\ \right]\cdot\left[\ r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{b} + \left(r_3^2-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{c}\ \right]$$

$$\underline{M_1N_1 + M_2N_2 = 8\cdot\left[\ r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c}\ \right]\cdot\left[\ r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{b} + \left(r_3^2-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{c}\ \right]}$$

$$F = 2\left(M_1N_1+M_2N_2-D^2r_1\right)$$

$$\boxed{F = 2\left(8\cdot\left[\ r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c}\ \right]\cdot\left[\ r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2-\vec{c}^{\,2}\right)\vec{b} + \left(r_3^2-\vec{b}^{\,2}\right)\vec{c}\ \right] - D^2r_1\right)}$$

$$N_1^2 = \left(\ 2\left[\ r_1^{\,2}a_2 + \left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)b_2 + \left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)c_2\ \right]\ \right)^2$$

$$N_1^2 = 4\left[\ r_1^{\,2}a_2 + \left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)b_2 + \left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)c_2\ \right]^2$$

$$\frac{N_1^2}{4} = r_1^{\,4}a_2^2 + \left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)^2b_2^2 + \left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)^2c_2^2$$

$$+ 2r_1^2\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)a_2b_2 + 2r_1^2\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)a_2c_2 + 2\left(r_2^{\,2}-\vec{c}^{\,2}\right)\left(r_3^{\,2}-\vec{b}^{\,2}\right)b_2c_2$$

$$N_2^2 = \left(2\left[r_1{}^2 a_1 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) b_1 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) c_1 \right] \right)^2$$

$$N_2^2 = 4\left[r_1{}^2 a_1 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) b_1 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) c_1 \right]^2$$

$$\frac{N_2^2}{4} = r_1{}^4 a_1^2 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)^2 b_1^2 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right)^2 c_1^2$$

$$+ 2r_1^2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) a_1 b_1 + 2r_1^2\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) a_1 c_1 + 2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) b_1 c_1$$

$$\frac{N_1^2}{4} + \frac{N_2^2}{4} = r_1{}^4 a_2^2 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)^2 b_2^2 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right)^2 c_2^2$$

$$+ 2r_1^2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) a_2 b_2 + 2r_1^2\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) a_2 c_2 + 2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) b_2 c_2$$

$$r_1{}^4 a_1^2 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)^2 b_1^2 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right)^2 c_1^2$$

$$+ 2r_1^2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) a_1 b_1 + 2r_1^2\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) a_1 c_1 + 2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) b_1 c_1$$

$$\frac{N_1^2}{4} + \frac{N_2^2}{4} = r_1{}^4 \vec{a}^2 + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)^2 \vec{b}^2 + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right)^2 \vec{c}^2$$

$$+ 2r_1^2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) \vec{a}\vec{b} + 2r_1^2\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) \vec{a}\vec{c} + 2\left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right)\left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) \vec{b}\vec{c}$$

$$\frac{N_1^2}{4} + \frac{N_2^2}{4} = \left[r_1{}^2 \vec{a} + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) \vec{b} + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) \vec{c} \right]^2$$

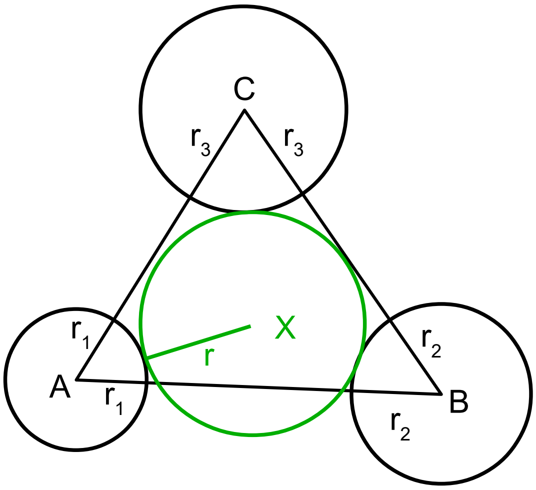
$$\underline{N_1 + N_2^2 = 4 \cdot \left[r_1{}^2 \vec{a} + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) \vec{b} + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) \vec{c} \right]^2}$$

$$G = N_1^2 + N_2^2 - D^2 r_1^2$$

$$\boxed{G = 4 \cdot \left[r_1{}^2 \vec{a} + \left(r_2{}^2 - \vec{c}^2\right) \vec{b} + \left(r_3{}^2 - \vec{b}^2\right) \vec{c} \right]^2 - D^2 r_1^2}$$

Zusammenfassung (1):

Gegeben seien die 3 Kreise $K_{A;r_1}$, $K_{B;r_2}$, $K_{C;r_3}$ welche derart angeordnet sind, dass sie sich jeweils im Äußeren jedes anderen Kreises befinden oder sich von außen berühren.
Dann gibt es einen Kreis $K_{X;r}$ (in der Zeichnung grün markiert) der alle 3 Kreise von außen berührt :



Punkte, Vektoren :

$$A=\left(A_1 I A_2\right) \ , \ B=\left(B_1 I B_2\right) \ , \ C=\left(C_1 I C_2\right) \ , \ X=\left(X_1 I X_2\right)$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{C}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\vec{C}-\vec{B} \ , \ \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\vec{A}-\vec{C} \ , \ \vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\vec{B}-\vec{A} \ , \ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\vec{X}-\vec{A} \ , \ \vec{x}-\vec{c}=\vec{X}-\vec{B} \ , \ \vec{x}+\vec{b}=\vec{X}-\vec{C}$$

Mit

$$D = -4\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = -8\,A_{\Delta ABC}$$

$$M_1 = 4\left[\ r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2\ \right]$$

$$N_1 = 2\left[\ r_1^2 a_2 + \left(r_2^2 - \vec{c}^2\right) b_2 + \left(r_3^2 - \vec{b}^2\right) c_2\ \right]$$

$$M_2 = -4\left[\ r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1\ \right]$$

$$N_2 = 2\left[\ r_1^2 a_1 + \left(r_2^2 - \vec{c}^2\right) b_1 + \left(r_3^2 - \vec{b}^2\right) c_1\ \right]$$

folgt für die Koordinaten des Berührkreismittelpunkts $X = (X_1 | X_2)$:

$$\boxed{X_1 = \frac{M_1}{D}\, r + \frac{N_1 + A_1 D}{D}}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{M_2}{D}\, r + \frac{N_2 + A_2 D}{D}}$$

Aus der quadratischen Gleichung für den Radius r des Berührkreises

$$E r^2 + F r + G = 0$$

mit

$$E = 16\left(r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c} \right)^2 - D^2$$

$$F = 2\left(8 \cdot \left[r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c} \right] \cdot \left[r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2 - \vec{c}^{\,2}\right)\vec{b} + \left(r_3^2 - \vec{b}^{\,2}\right)\vec{c} \right] - D^2 r_1\right)$$

$$G = 4 \cdot \left[r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2 - \vec{c}^{\,2}\right)\vec{b} + \left(r_3^2 - \vec{b}^{\,2}\right)\vec{c} \right]^2 - D^2 r_1^2$$

ergibt sich der Berührradius zu

$$\boxed{r = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4EG}}{2E}}$$

Weitere Vereinfachungen die Diskriminate F^2-4EG **betreffend :**

$$\vec{u} \;:=\; r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c}$$

$$\vec{v} \;:=\; r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2-\vec{c}^2\right)\vec{b} + \left(r_3^2-\vec{b}^2\right)\vec{c}$$

$$E = 16\left(\; r_1\vec{a}+r_2\vec{b}+r_3\vec{c}\;\right)^2 - D^2$$

$$\underline{E = 16\vec{u}^2 - D^2}$$

$$F = 2\left(8 \cdot \left[\; r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c}\;\right] \cdot \left[\; r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2-\vec{c}^2\right)\vec{b} + \left(r_3^2-\vec{b}^2\right)\vec{c}\;\right] - D^2 r_1\right)$$

$$\underline{F = 16\vec{u}\vec{v} - 2D^2 r_1}$$

$$G = 4 \cdot \left[\; {r_1}^2\vec{a} + \left({r_2}^2-\vec{c}^2\right)\vec{b} + \left({r_3}^2-\vec{b}^2\right)\vec{c}\;\right]^2 - D^2 r_1^2$$

$$\underline{G = 4\vec{v}^2 - D^2 r_1^2}$$

$$F^2-4EG$$

$$= \left(16\vec{u}\vec{v} - 2D^2 r_1\right)^2 - 4 \cdot \left(16\vec{u}^2 - D^2\right) \cdot \left(4\vec{v}^2 - D^2 r_1^2\right)$$

$$= 256\left(\vec{u}\vec{v}\right)^2 - 64\vec{u}\vec{v}D^2 r_1 + 4D^4 r_1^2 - 256\vec{u}^2\vec{v}^2 + 64\vec{u}^2 D^2 r_1^2 + 16\vec{v}^2 D^2 - 4D^4 r_1^2$$

$$= 256\left(\vec{u}\vec{v}\right)^2 - 64\vec{u}\vec{v}D^2 r_1 - 256\vec{u}^2\vec{v}^2 + 64\vec{u}^2 D^2 r_1^2 + 16\vec{v}^2 D^2$$

Berücksichtigt man, dass

$$\left(\vec{u}\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2\vec{v}^2 - \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right)$$

und

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \left(r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1\right)\left(r_1^2 a_2 + \left(r_2^2-\vec{c}^2\right)b_2 + \left(r_3^2-\vec{b}^2\right)c_2\right) - \left(r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2\right)\left(r_1^2 a_1 + \left(r_2^2-\vec{c}^2\right)b_1 + \left(r_3^2-\vec{b}^2\right)c_1\right)$$

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$$

folgt :

$$= 256\vec{u}^2\vec{v}^2 - \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right)^2 - 64\vec{u}\vec{v}D^2 r_1 - 256\vec{u}^2\vec{v}^2 + 64\vec{u}^2 D^2 r_1^2 + 16\vec{v}^2 D^2$$

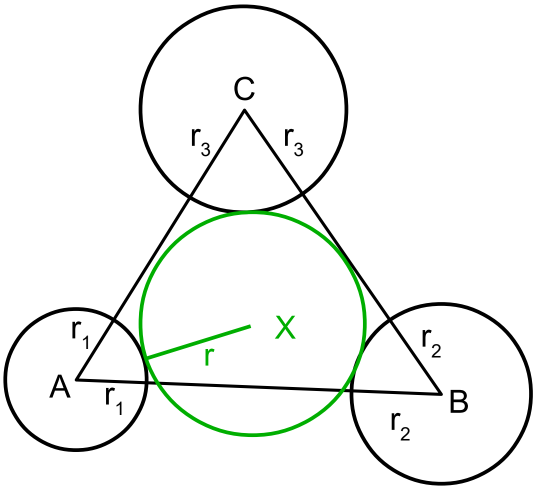
$$= -64\vec{u}\vec{v}D^2 r_1 + 64\vec{u}^2 D^2 r_1^2 + 16\vec{v}^2 D^2$$

$$= 16D^2\left(2\vec{u}r_1 - \vec{v}\right)^2$$

$$\underline{F^2-4EG = 16D^2\left(2\vec{u}r_1 - \vec{v}\right)^2}$$

Zusammenfassung (2):

Gegeben seien die 3 Kreise $K_{A;r_1}$, $K_{B;r_2}$, $K_{C;r_3}$ welche derart angeordnet sind, dass sie sich jeweils im Äußeren jedes anderen Kreises befinden oder sich von außen berühren.
Dann gibt es einen Kreis $K_{X;r}$ (in der Zeichnung grün markiert) der alle 3 Kreise von außen berührt :



Punkte, Vektoren :

$$A=(A_1 I A_2) \;,\; B=(B_1 I B_2) \;,\; C=(C_1 I C_2) \;,\; X=(X_1 I X_2)$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} \;,\; \vec{B}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix} \;,\; \vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} \;,\; \vec{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\vec{C}-\vec{B} \;,\; \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\vec{A}-\vec{C} \;,\; \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\vec{B}-\vec{A} \;,\; \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\vec{X}-\vec{A} \;,\; \vec{x}-\vec{c}=\vec{X}-\vec{B} \;,\; \vec{x}+\vec{b}=\vec{X}-\vec{C}$$

Mit

$$D = -4\begin{bmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix}b_1 & a_1\\b_2 & a_2\end{bmatrix} = -8A_{\Delta ABC}$$

$$M_1 = 4[\; r_1 a_2 + r_2 b_2 + r_3 c_2 \;]$$

$$N_1 = 2[\; r_1^2 a_2 + (r_2^2-\vec{c}^2)b_2 + (r_3^2-\vec{b}^2)c_2 \;]$$

$$M_2 = -4[\; r_1 a_1 + r_2 b_1 + r_3 c_1 \;]$$

$$N_2 = 2[\; r_1^2 a_1 + (r_2^2-\vec{c}^2)b_1 + (r_3^2-\vec{b}^2)c_1 \;]$$

folgt für die Koordinaten des Berührkreismittelpunkts $X = (X_1 \mathrm{I} X_2)$:

$$\boxed{X_1 = \frac{M_1}{D} r + \frac{N_1 + A_1 D}{D}}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{M_2}{D} r + \frac{N_2 + A_2 D}{D}}$$

Aus der quadratischen Gleichung für den Radius r des Berührkreises

$$Er^2 + Fr + G = 0$$

mit

$$E = 16\left(r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c} \right)^2 - D^2$$

$$\underline{E = 16\vec{u}^2 - D^2}$$

$$F = 2\left(8 \cdot \left[r_1\vec{a} + r_2\vec{b} + r_3\vec{c} \right] \cdot \left[r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2 - \vec{c}^2\right)\vec{b} + \left(r_3^2 - \vec{b}^2\right)\vec{c} \right] - D^2 r_1\right)$$

$$\underline{F = 16\vec{u}\,\vec{v} - 2D^2 r_1}$$

$$G = 4 \cdot \left[r_1^2\vec{a} + \left(r_2^2 - \vec{c}^2\right)\vec{b} + \left(r_3^2 - \vec{b}^2\right)\vec{c} \right]^2 - D^2 r_1^2$$

$$\underline{G = 4\vec{v}^2 - D^2 r_1^2}$$

ergibt sich der Berührradius zu

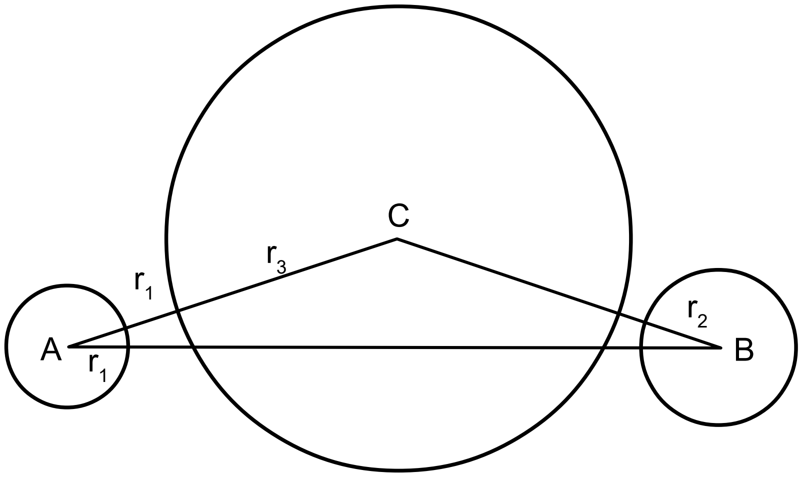
$$r = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4EG}}{2E}$$

$$\boxed{r = \frac{-16\vec{u}\,\vec{v} + 2D^2 r_1 \pm \sqrt{16D^2\left(2\vec{u}\,r_1 - \vec{v}\right)^2}}{32\vec{u}^2 - 2D^2}}$$

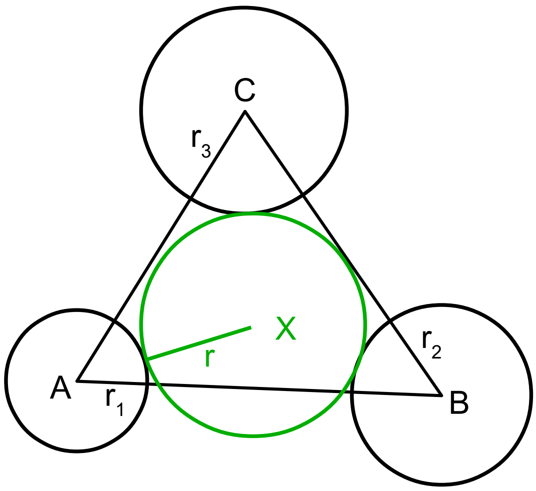
Schlussbemerkung zur Anzahl der Berührkreise, falls der gesuchte Berührkreis die 3 gegebenen Kreise von außen berühren soll :

Die quadratische Formel für den Berührkreisradius kann entweder keine, genau eine oder genau 2 positive Lösungen haben. Hierzu passen die folgenden Konstellationen I,II,III der gegebenen Kreise :

I



II



III