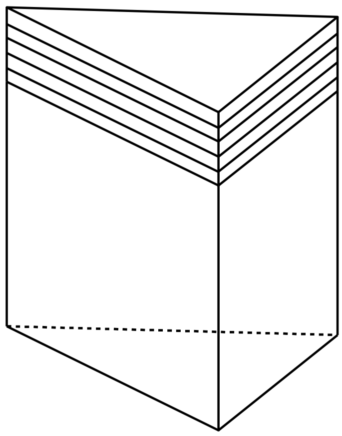
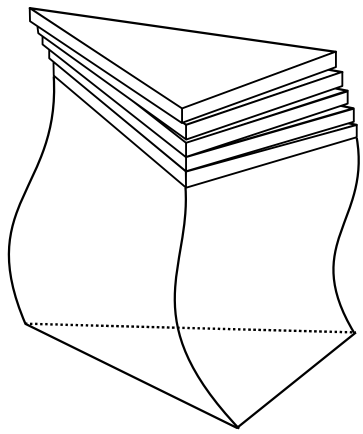
Cavalieriprinzip, Pyramiden, Schnittflächen, Strahlensätze, Kugel

Arno Fehringer
August 2020

Das Prinzip des Cavalieri (1598 – 1647; 49)

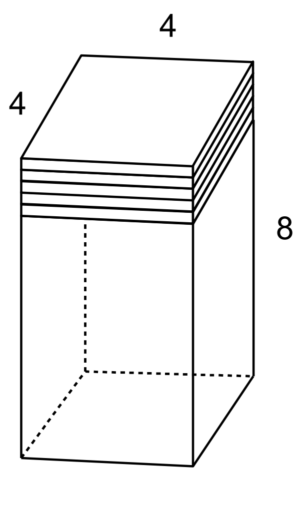
Denkt man sich einen Körper aus lauter gleichen, dünnen Schichten aufgebaut, und verschiebt man dann die Schichten gegeneinander, so erhält man einen neuen Körper mit gleichem Volumen. **Das Volumen bleibt bei diesem Prozess konstant**.

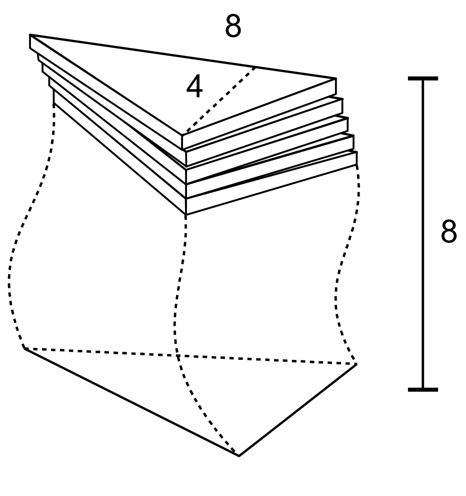




Werden nun die beiden Körper **in gleichen Höhen** geschnitten, so ergeben sich immer **gleiche Schnittflächen** .

Die Schnittflächen brauchen jedoch nicht die gleiche Form zu haben, sondern nur gleichen Flächeninhalt, wie das folgende Beispiel zeigt:

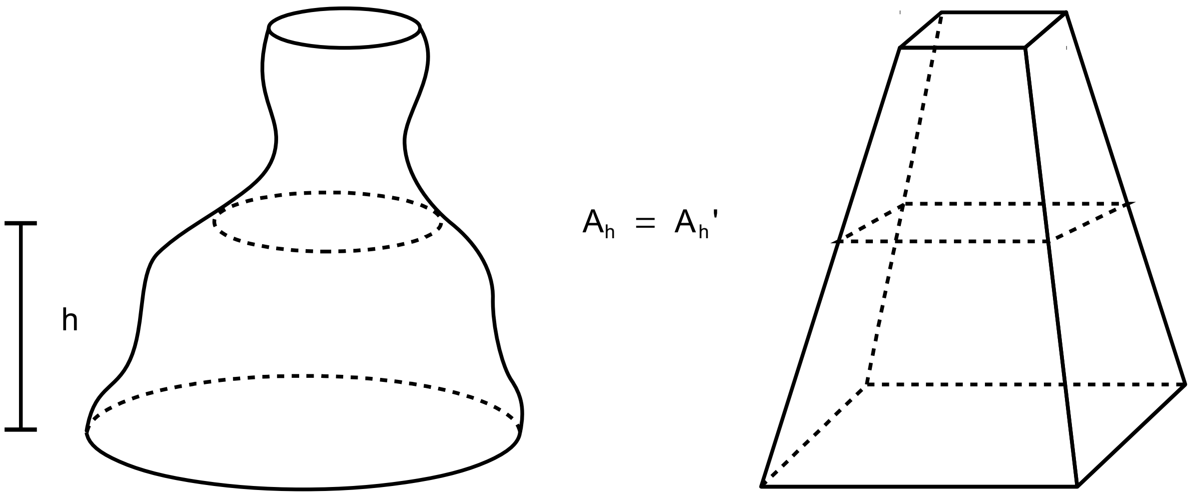




Der Italienische Mathematiker **Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647; 49)** aus Bologna hat diese Überlegungen verallgemeinert und zu einem **Prinzip** gemacht, indem er sich Körper aus **unendlich vielen, unendlich dünnen Schichten** aufgebaut dachte.

Cavalieri-Prinzip:

Haben zwei Körper in gleichen Höhen gleiche Schnittflächen(inhalte), so sind sie volumengleich.



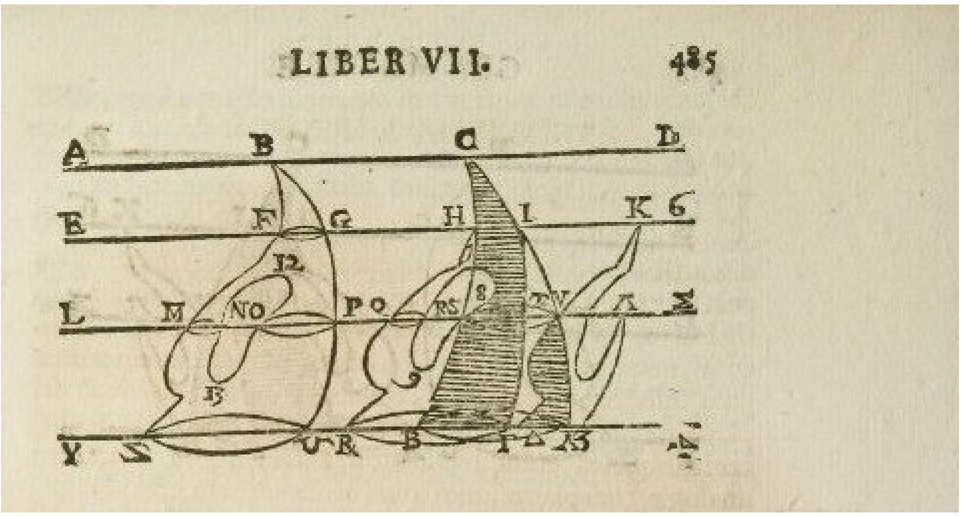
$\Rightarrow \boxed{V = V'}$

Statua di Bonaventura Cavalieri,
opera di Giovanni Antonio Labus, 1844.
Cortile del Palazzo di Brera a Milano
(foto di Giovanni dall'Orto).

http://mostre.museogalileo.it/congressiscienziati/archivi/MaterialiCelebrativiCongressoMilano1844.html

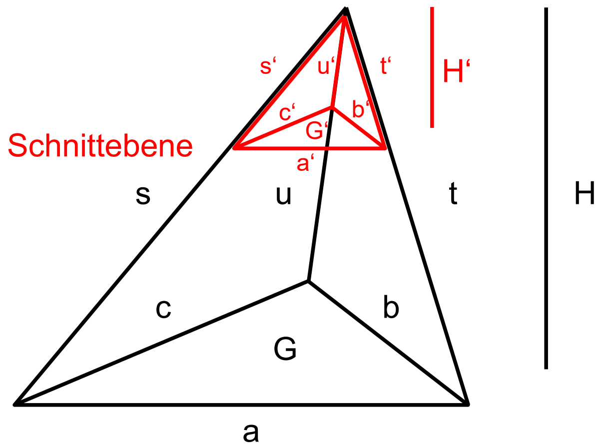
Ausschnitt aus dem Werk

Bonaventura Cavalieri : Geometria indivisibilibus continuorum nova quadem ratione promota 1653
(Geometrie der kontinuierlichen Indivisiblen : Entwicklung einer neuen Methode)



http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/library/05TCTFNR/index.meta&start=481&viewMode=image

Schnittbetrachtungen an der dreiseitigen Pyramide

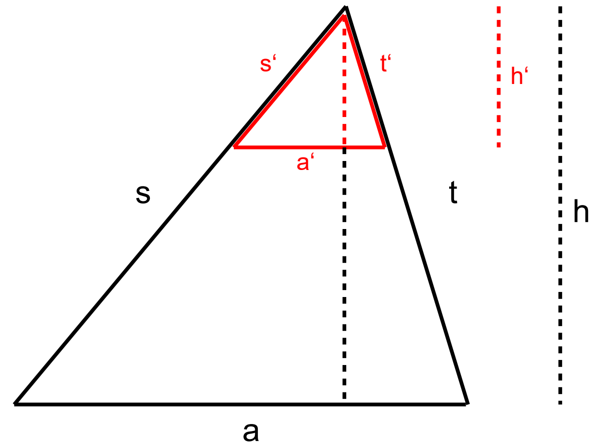


$a' \parallel a$

$b' \parallel b$

$c' \parallel c$

Vordere Pyramidenfläche :



Flächenbetrachtung :

$$\underline{\frac{1}{2}a'h'} + \frac{a+a'}{2}(h-h') = \frac{1}{2}ah$$

$$a'h' + (a+a')(h-h') = ah$$

$$a'h' + ah - ah' + a'h - a'h' = ah$$

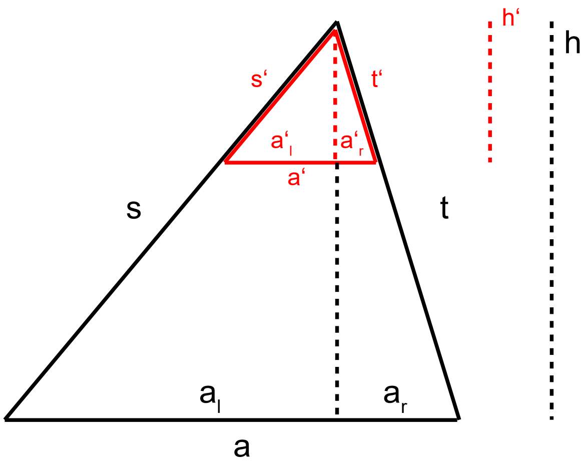
$$\cancel{a'h'} + \cancel{ah} - ah' + a'h - \cancel{a'h'} = \cancel{ah}$$

$$-ah' + a'h = 0$$

$$a'h = ah'$$

$$\boxed{\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}}$$

Betrachtung der linken und rechten Figuren:



$$\boxed{\frac{a'_l}{a_l} = \frac{h'}{h}}$$

$$\boxed{\frac{a'_r}{a_r} = \frac{h'}{h}}$$

$$a'_l = \frac{h'}{h}\, a_l$$

$$s' = \sqrt{(a'_l)^2 + h'^2}$$

$$s' = \sqrt{\left(\frac{h'}{h}\, a_l\right)^2 + h'^2}$$

$$s' = \sqrt{\left(\frac{h'}{h}\right)^2 a_l^2 + h'^2}$$

$$s' = \sqrt{\left(\frac{h'}{h}\right)^2 a_l^2 + \left(\frac{h'}{h}\right)^2 h^2}$$

$$s' = \sqrt{\left(\frac{h'}{h}\right)^2 \left[a_l^2 + h^2\right]}$$

$$s' = \sqrt{\left(\frac{h'}{h}\right)^2 s^2}$$

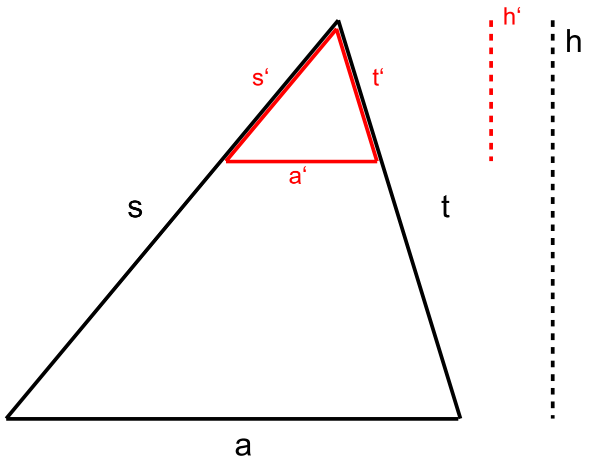
$$s' = \frac{h'}{h}\, s$$

$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{h'}{h}}$$

Analog :

$$\boxed{\frac{t'}{t} = \frac{h'}{h}}$$

Zusammenfassung , Strahlensätze :



$$\boxed{\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h}} \qquad \boxed{\frac{s'}{s} = \frac{h'}{h}} \qquad \boxed{\frac{t'}{t} = \frac{h'}{h}}$$

$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{t'}{t}}$$ **1. Strahlensatz**

$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{a'}{a}}$$ **2. Strahlensatz**

$$\boxed{\frac{t'}{t} = \frac{a'}{a}}$$ **2. Strahlensatz**

Die Abschnitte s' , s bzw. t' , t heißen **Strahlabschnitte** .
Die Abschnitte a' , a heißen **Parallelabschnitte** .

1. Strahlensatz :
Das Verhältnis der Strahlabschnitte auf einem Strahl ist gleich dem Verhältnis der enttsprechenden Strahlabschnitte auf dem anderen Strahl :

$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{t'}{t}}$$

2.Strahlensatz :
Das Verhältnis der Parallelabschnitte ist gleich dem Verhältnis entsprechender Strahlabschnitte :

$$\boxed{\frac{a'}{a} = \frac{s'}{s}} , \boxed{\frac{a'}{a} = \frac{t'}{t}}$$

Ähnlichkeit von Schnittfläche G' und der Grundfläche G :

Analoge Betrachtungen für die beiden anderen Seitenflächen der Pyramide liefert mit den Strahlensätzen insgesamt :

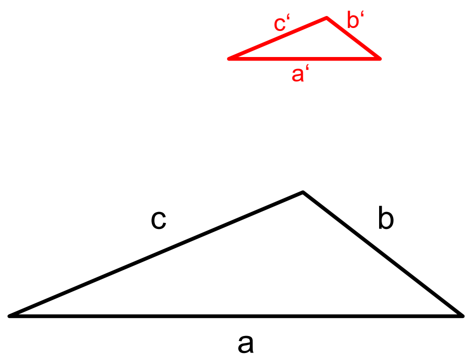
$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{t'}{t} = \frac{u'}{u}}$$ (1. Strahlensatz)

$$\boxed{\frac{s'}{s} = \frac{a'}{a}} \qquad \boxed{\frac{t'}{t} = \frac{b'}{b}} \qquad \boxed{\frac{u'}{u} = \frac{c'}{c}}$$ (2. Strahlensatz)

Hieraus folgt speziell :

$$\boxed{\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}}$$

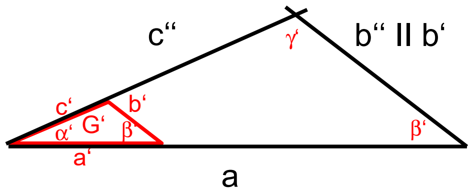
Das bedeutet : **Die Dreiecke** $\Delta a'b'c'$ **und** Δabc **sind ähnlich .**



Winkelgleichheit ähnlicher Dreiecke

Wegen der Ähnlichkeit gilt : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \underline{b = \frac{a}{a'}\, b'}\ ,\ \underline{c = \frac{a}{a'}\, c'}$

Konstruktion des Dreiecks $\Delta a b'' c''$ **winkelgleich** zum Dreieck $\Delta a' b' c'$ **:**



Es folgt nach den Strahlensätzen :

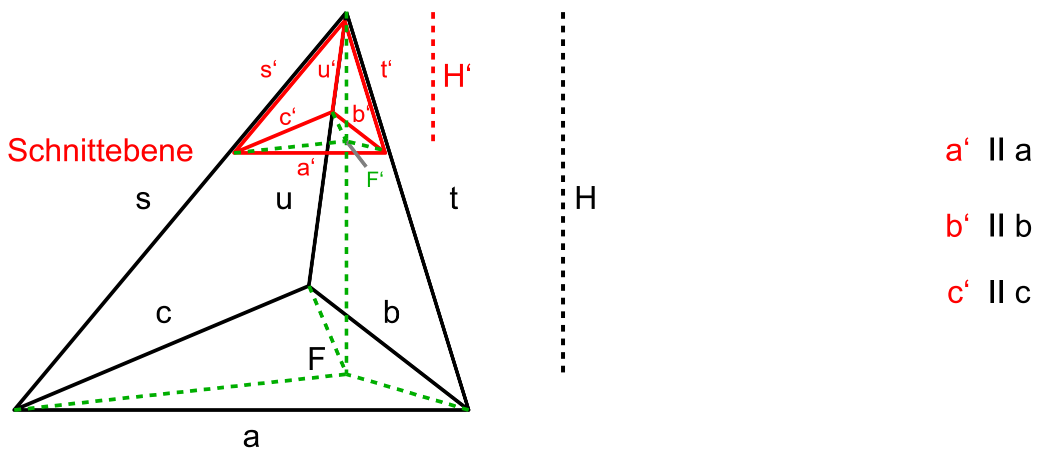
$$\frac{b''}{b'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow b'' = \frac{a}{a'}\, b' \Rightarrow b'' = b$$

$$\frac{c''}{c'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow c'' = \frac{a}{a'}\, c' \Rightarrow c'' = c$$

Die Dreiecke $\Delta ab''c''$ und Δabc stimmen in allen Seiten überein und deshalb auch in allen Winkeln .

Speziell haben die ähnlichen Dreiecke $\Delta a'b'c'$ und Δabc die Winkel α' , β' , γ' .

Flächenbetrachtung der ähnlichen Dreiecke $\Delta a'b'c'$ und Δabc



Denkt man sich die Höhen H und H' der durch die Schnittebene erzeugten Pyramiden sowie die dazugehörenden Höhenfußpunkte F und F' eingezeichnet und betrachtet die entsprechenden Strahlensatzfiguren, so folgt nach dem **1. Strahlensatz** :

$$\frac{s'}{s} = \frac{H'}{H} \ , \quad \frac{t'}{t} = \frac{H'}{H} \ , \quad \frac{u'}{u} = \frac{H'}{H}$$

Nach dem **2. Strahlensatz** gilt :

$$\frac{a'}{a} = \frac{s'}{s} \ , \quad \frac{b'}{b} = \frac{t'}{t} \ , \quad \frac{c'}{c} = \frac{u'}{u}$$

Deshalb folgt

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{H'}{H} \ ,$$

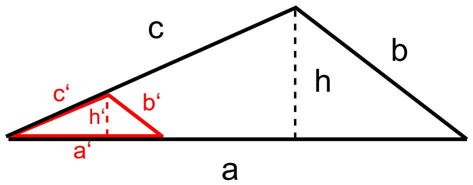
und speziell

$$\boxed{a' = \frac{H'}{H} \, a} \ , \quad \boxed{b' = \frac{H'}{H} \, b} \ , \quad \boxed{c' = \frac{H'}{H} \, c} \ .$$

Setzt man vorübergehend $v := \dfrac{H'}{H}$, so folgt :

$$\underline{a' = v \, a} \ , \quad \underline{b' = v \, b} \ , \quad \underline{c' = v \, c}$$

Nun betrachtet man die Strahlensatzfigur bestehend aus den ähnlichen (und winkelgleichen) Dreiecken $\Delta a'b'c'$ und Δabc :



Es gilt $a' = v\ a$, $b' = v\ b$, $c' = v\ c$.

Zur Berechnung der Dreiecksflächen betrachtet man noch die Hohen h' , h auf den Grundseiten a' , a .

Nach dem **2. Strahlensatz** gilt dann $\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c} = v$ und daraus folgend $h' = v\ h$.

Für die Flächeninhalte folgt :

$$G' = \frac{a'h'}{2} = \frac{va\ \ vh}{2} = v^2\ \frac{ah}{2} = v^2\ G$$

$$\boxed{G' = v^2\ G}$$

Speziell :

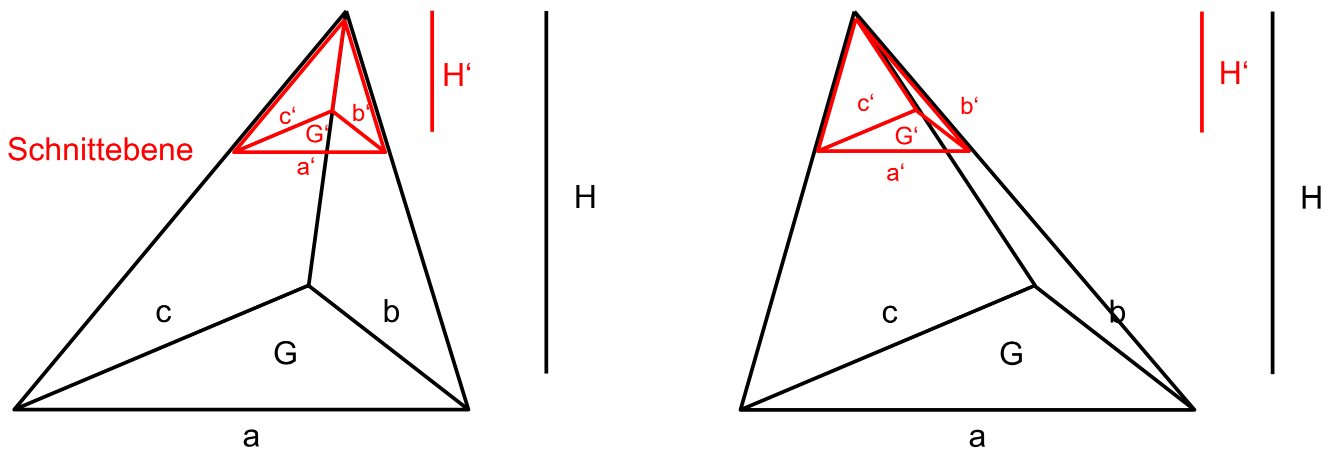
$$\boxed{G' = \left(\frac{H'}{H}\right)^2\ G}$$

Satz :

Für die Flächeninhalte G' und G der ähnlichen Dreiecke $\Delta a'b'c'$ und Δabc mit $a' = v\ a$, $b' = v\ b$, $c' = v\ c$, gilt :

$$\boxed{G' = v^2\ G}$$

Das Prinzip des Cavalieri für Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe



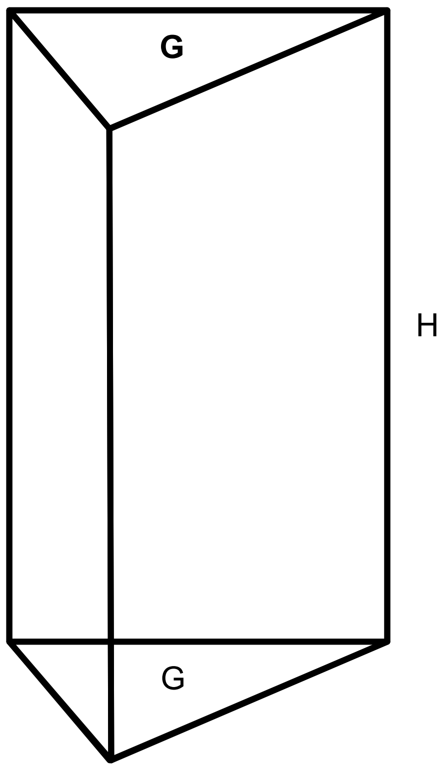
Die Schnittflächen beider Pyramiden sind ähnlich zur Grundfläche und berechnen sich nach den vorigen Überlegungen zu $\boxed{G' = \left(\frac{H'}{H}\right)^2 G}$.

Damit gilt für Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe das **Prinzip des Cavalieri** :

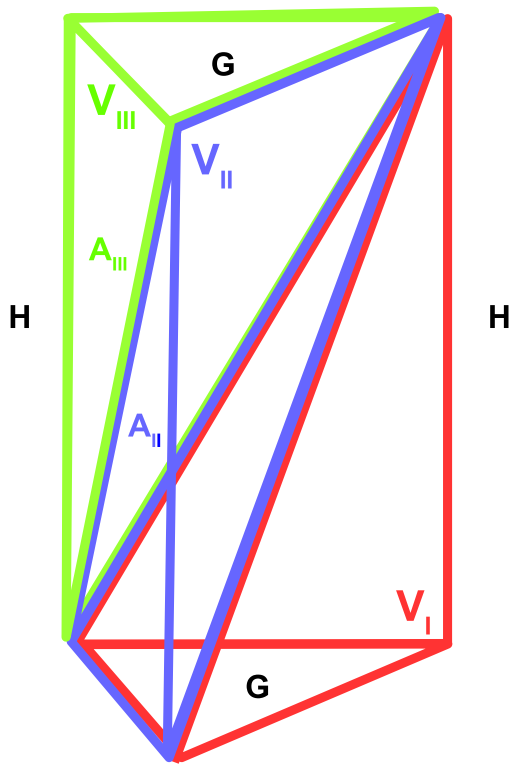
Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe werden in gleicher Höhe in gleicher Fläche geschnitten und sind damit **volumengleich** .

Zerlegung eines dreiseitigen Prismas in 3 volumengleiche Pyramiden

Ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe H zerlegt man in drei **volumengleiche** Pyramden wie folgt :



,



Nach dem **Cavalieri-Prinzip** folgt :

$$V_I \;=\; GH \;=\; V_{III}$$

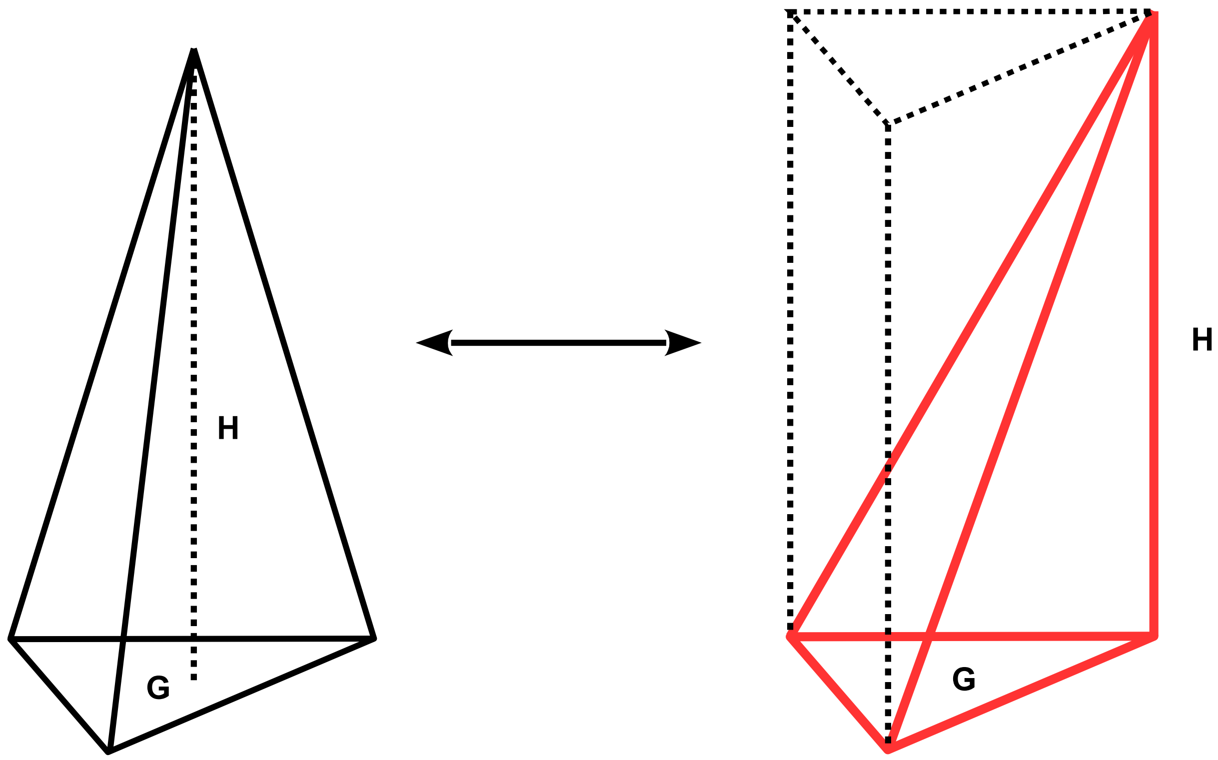
$$V_{II} \;=\; A_{II} h_{II} \;=\; A_{III} h_{III} \;=\; V_{III}$$

Also gilt

$$\boxed{V_I \;=\; V_{II} \;=\; V_{III} \;=\; \frac{1}{3} GH} \;.$$

Volumenformel der dreiseitigen Pyramide

Gegeben sei die dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe H.



Zur Volumenbestimmung betrachtet man die Pyramide des entsprechenden Prismas mit der Grundfläche G und der Höhe H, deren Volumen gleich $\frac{1}{3}GH$ ist.

Nach dem **Cavalieriprinzip** ist dann auch das Volumen der gegebenen Pyramide gleich, also

$$\boxed{V = \frac{1}{3}GH}$$

Volumen der Kugel V_{Kugel}

1. Voraussetzung : Kreisfläche $\boxed{A_{Kreis} = \pi r^2}$

Man erhält diese Formel durch Folgen von regelmäßigen Polygonen (Vielecken), welche den Kreis von innen und außen annähern.
Speziell kann man die Polygonfolgen $\underline{P_6}$, $\underline{P_{12}}$, $\underline{P_{24}}$, . . . bzw. die Folge $\overline{P_6}$, $\overline{P_{12}}$, $\overline{P_{24}}$, . . . nehmen.
Für die Flächeninhalte der Polygone ergibt sich eine Intervallschachtelung $\left[\underline{A_{6n}} \; ; \; \overline{A_{6n}}\right]_{n \in \mathbb{N}} = \left[\underline{z_{6n}}\, r^2 \; ; \; \overline{z_{6n}}\, r^2\right]_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Zentrum πr^2 , welches den Flächeninhalt des Kreises darstellt. Die sogenannte **Kreiszahl** π ist näherungsweise $3,14$.

2. Voraussetzung : Kegelvolumen $\boxed{V_{Kegel} = \frac{1}{3}\,\pi r^2\,H}$

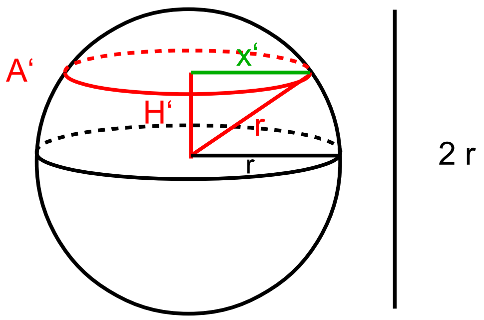
Die Annäherung des Grundkreises von innen und außen durch eine Polygonfolge liefert zugleich eine Näherung des Kegels von innen und außen durch eine Pyramidenfolge und eine Intervallschachtelung für die Pyramidenvolumina

$$\left[\underline{V_{6n}} \; ; \; \overline{V_{6n}}\right]_{n \in \mathbb{N}} = \left[\frac{1}{3}\underline{A_{6n}}H \; ; \; \frac{1}{3}\overline{A_{6n}}H\right]_{n \in \mathbb{N}}$$

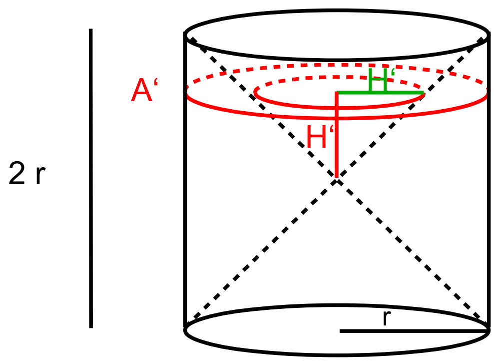
mit dem Zentrum $\frac{1}{3}\,\pi r^2\,H$, welches das Volumen des Kegels darstellt .

Als nächstes zeigen wir, das die folgenden Körper das **Cavalieri-Prinzip** erfüllen :

Kugel



Zylinder mit Doppelkegelaushöhlung



Kreisfläche :

$$A' = \pi x'^2$$

$$A' = \pi \sqrt{r^2 - H'^2}^{\,2}$$

$$\underline{A' = \pi\left(r^2 - H'^2\right)}$$

Kreisringfläche :

$$A' = \pi r^2 - \pi H'^2$$

$$\underline{A' = \pi\left(r^2 - H'^2\right)}$$

Die Kugel und der ausgehöhlte Zylinder haben in gleicher Höhe gleiche Schnittflächen, sind also nach dem **Cavalieri-Prinzip volumengleich** :

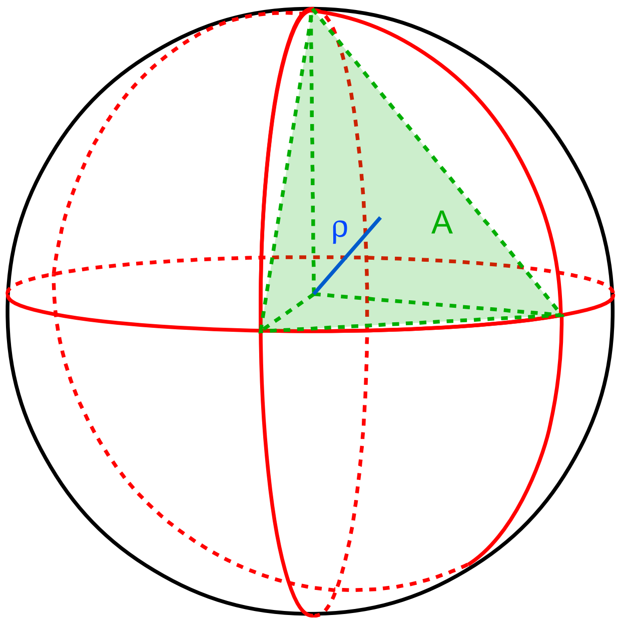
$$V_{Kugel} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$\boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3}$$

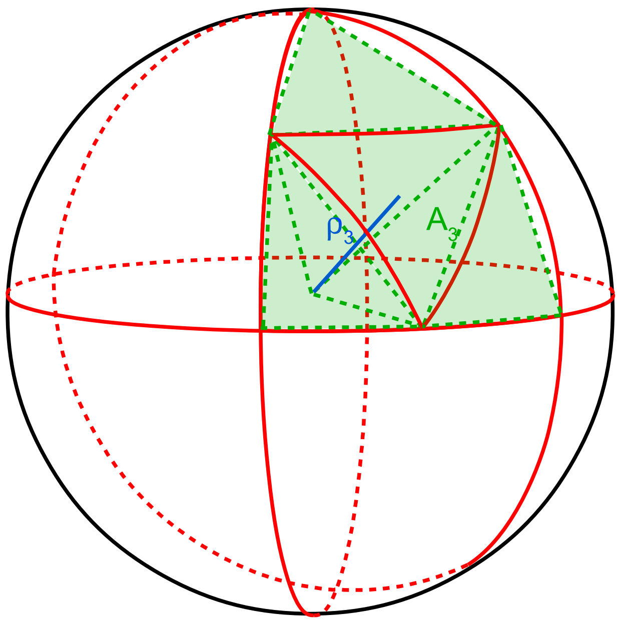
Oberfläche der Kugel O_{Kugel}

Die Kugel wird in 8 Oktanten aufgeteilt und die Ecken des Oktanten mit dem Mittelpunkt der Kugel verbunden. Die Oberfläche der Kugel wird hierdurch in 8 Kugeldreiecke zerlegt.

Ein Oktant kann durch eine dreiseitige Pyramide der Fläche A und der Höhe ρ angenähert werden, und das Kugelvolumen ist in der 0-ten Näherung gleich $\underline{V_0} = 8 \cdot \frac{1}{3} A \rho$



Um eine bessere Annäherung an das Kugelvolumen zu bekommen, verfeinert man die Zerlegung indem man jedes Kugeldreieck in 4 kleinere Dreiecke aufteilt. Hierzu verbindet man die Mittelpunkte der Kugeldreieckseite.



Das Kugelvolumen dieser 4-ten Näherung ist :

$$\underline{V_4} = 8\left(\frac{1}{3}\ A_1\ \rho_1 + \frac{1}{3}\ A_2\ \rho_2 + \frac{1}{3}\ A_3\ \rho_3 + \frac{1}{3}\ A_4\ \rho_4\right)$$

Schreibweise : $\underline{V_4} = 8 \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{3}\ A_i\ \rho_i$

Führt man diesen Prozess, dass jedes Kugeldreieck in 4 weitere Kugeldreiecke aufgeteilt wird, fort, bekommt man schließlich immer bessere Näherungen für das Kugelvolumen :

$$\underline{V_0} \leq \underline{V_4} \leq \underline{V_{4^2}} \leq \underline{V_{4^3}} \leq \ .\ .\ . \leq \underline{V_{4^n}} \leq \ .\ .\ .$$

Schätzt man nun die 4^n -ten Näherungen nach unten und oben ab, ergeben sich folgende Ungleichungen :

$$8 \sum_{i=1}^{4^n} \frac{1}{3}\ A_i\ \min\{\rho_i\} \leq \underline{V_{4^n}} = 8 \sum_{i=1}^{4^n} \frac{1}{3}\ A_i\ \rho_i \leq 8 \sum_{i=1}^{4^n} \frac{1}{3}\ A_i\ \max\{\rho_i\}$$

$$\frac{1}{3}\left(8 \sum_{i=1}^{4^n} A_i\right) \min\{\rho_i\} \leq \underline{V_{4^n}} \leq \frac{1}{3}\left(8 \sum_{i=1}^{4^n} A_i\right) \max\{\rho_i\}$$

Hier bedeutet $\min\{\rho_i\}$ das Minimum und $\max\{\rho_i\}$ das Maximum aller in der Zerlegung vorkommenden Pyramidenhöhen .

Lässt man nun n gegen unendlich streben, $n \longrightarrow \infty$, so ergeben sich folgende Grenzwerte :

$$\min\{\rho_i\} \longrightarrow r \quad , \quad \max\{\rho_i\} \longrightarrow r \quad , \quad 8 \sum_{i=1}^{4^n} A_i \longrightarrow O_{Kugel}$$

$$\frac{1}{3}\left(8 \sum_{i=1}^{4^n} A_i\right) \min\{\rho_i\} \leq \underline{V_{4^n}} \leq \frac{1}{3}\left(8 \sum_{i=1}^{4^n} A_i\right) \max\{\rho_i\}$$

Strebt nach $\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$$\frac{1}{3}\ O_{kugel}\ r \qquad V_{Kugel} = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3 \qquad \frac{1}{3}\ O_{kugel}\ r$$

Also folgt :

$$\frac{1}{3}\ O_{kugel}\ r = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$$

$$\boxed{O_{kugel} = 4\ \pi\ r^2}$$