

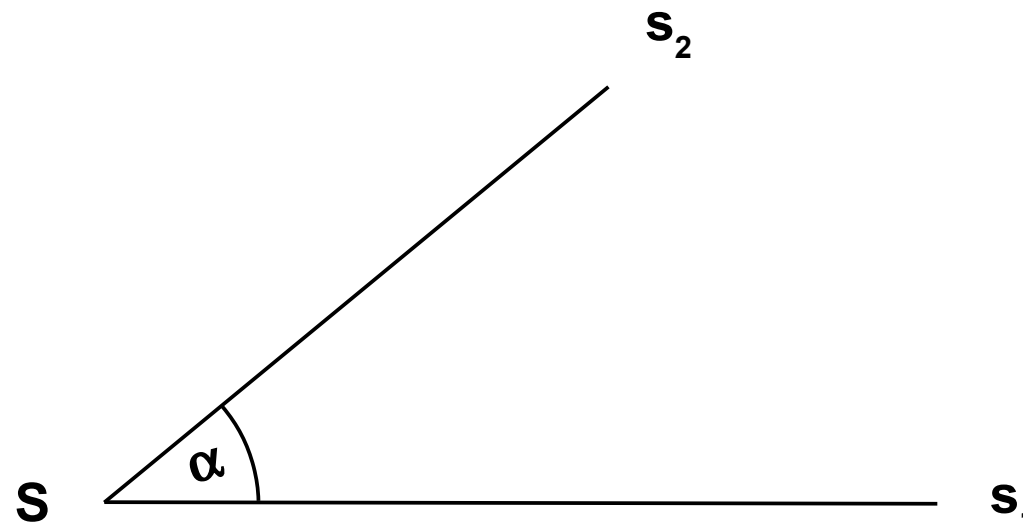
Ordnung der Vierecke

Arno Fehringer

März 2022

Grundkenntnisse zu Winkeln

Ein Winkel besteht aus zwei Strahlen s_1 , s_2 mit gemeinsamen Anfangspunkt S . Der Punkt S heißt auch **Scheitel**, und die zwei Strahlen heißen **Schenkel** des Winkels.



Winkel werden mit Buchstaben des **Griechischen Alphabets** bezeichnet kombiniert mit einem **Kreisbogen**, der die beiden Schenkel miteinander verbindet .

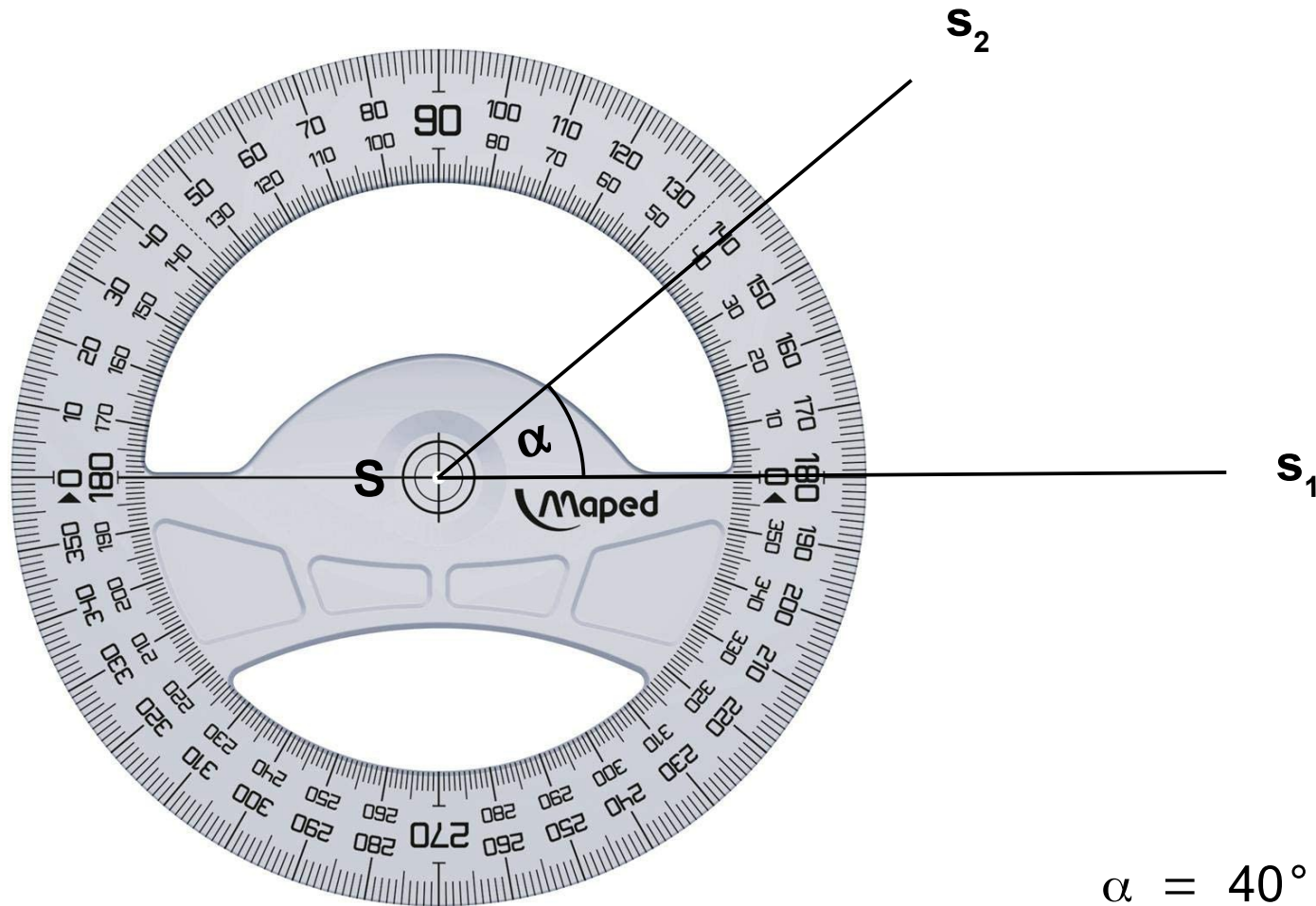
Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	m	Υ	υ	psilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	n	Φ	ϕ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	$\omicron$	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/kiechle/uebl/griechAlphabet.html>

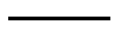
Messung von Winkeln mit dem Winkelmesser in Grad (°) .

Die Winkelskala geht von 0° - 360° .



$$\alpha = 40^\circ$$

Winkelbereiche und Bezeichnungen



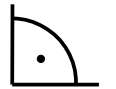
Nullwinkel

0°



spitzer Winkel

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$



rechter Winkel

90°



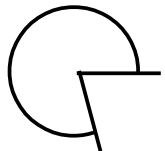
stumpfer Winkel

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$



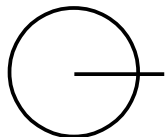
gestreckter Winkel

180°



überstumpfer Winkel

$180^\circ < \alpha < 360^\circ$



Vollwinkel

360°

Winkelsätze an Geraden

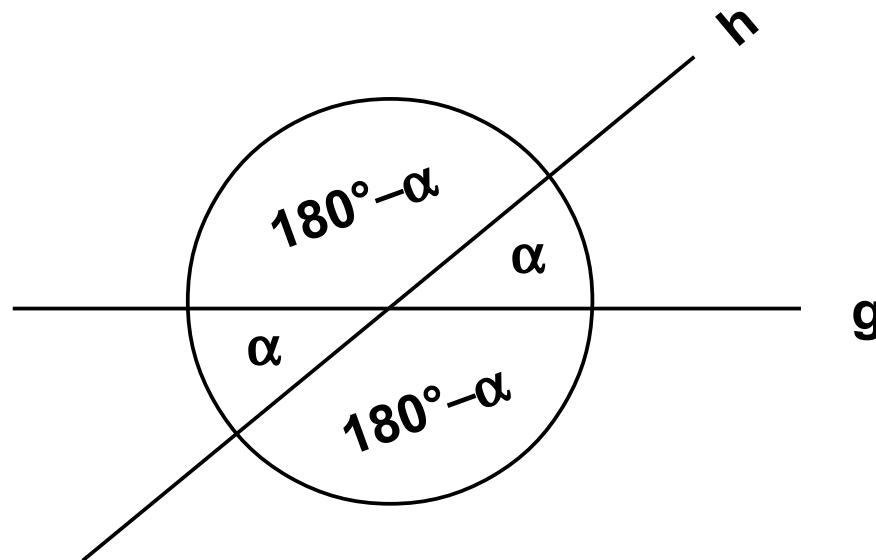
Für Winkel an zwei sich schneidenden Geraden gelten folgende Sätze :

Nebenwinkelsatz:

Nebenwinkel sind zusammen 180° .

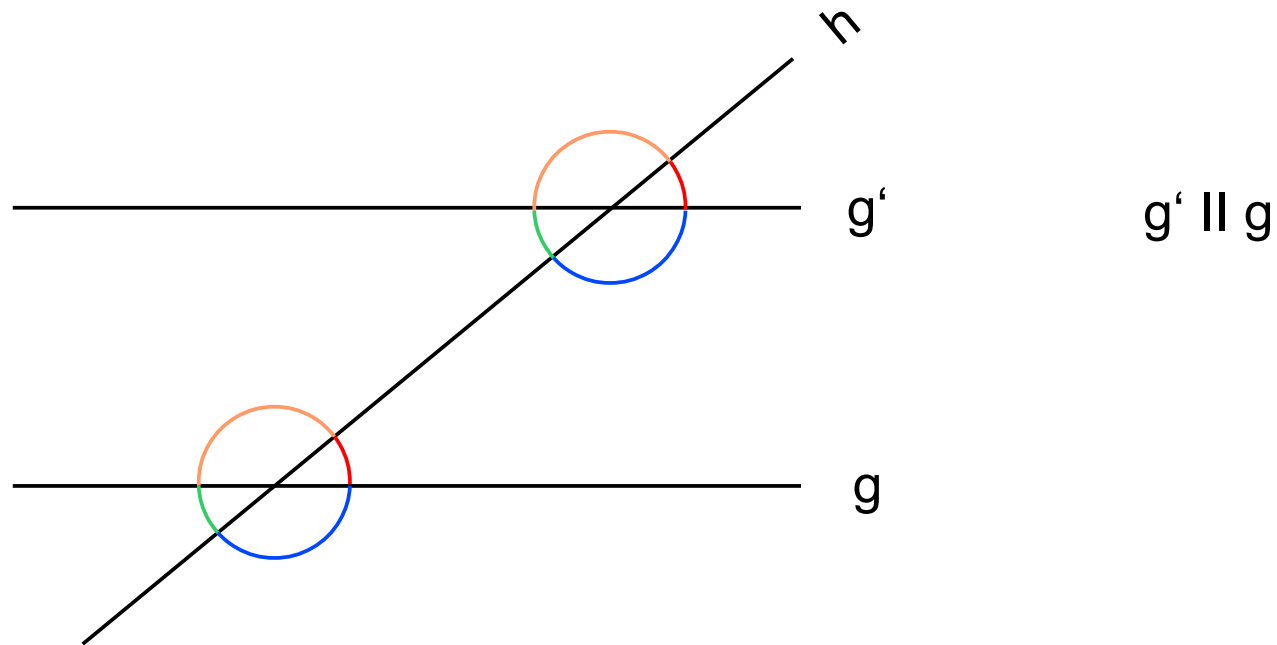
Gegenwinkelsatz :

Gegenwinkel sind gleich groß .



Stufenwinkelsatz:

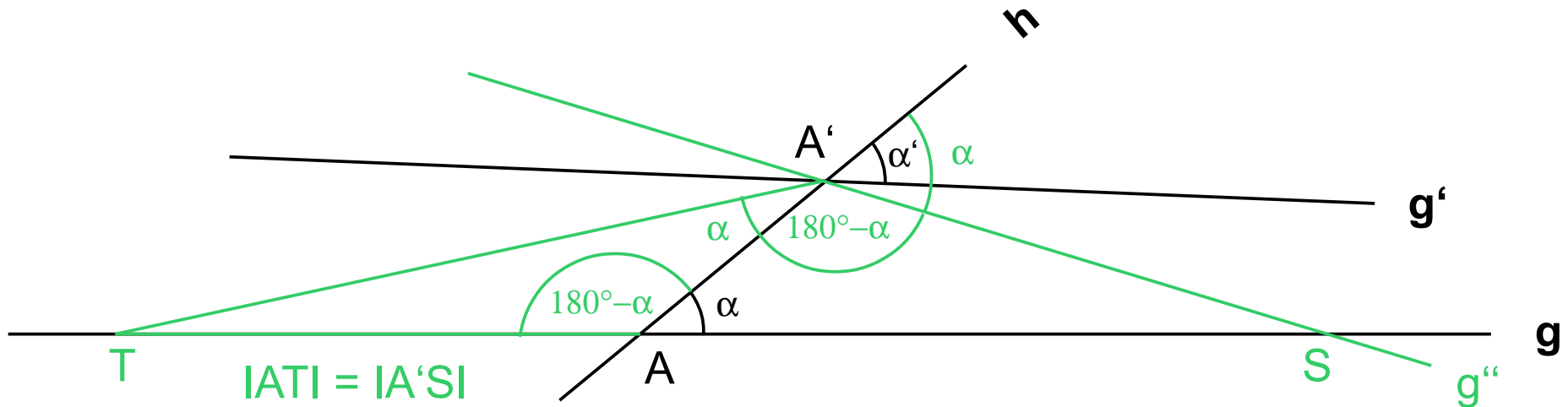
Werden zwei parallele Geraden g und g' von einer Geraden h geschnitten, so sind Stufenwinkelpaare gleich groß .



Bemerkung : Stufenwinkelpaare haben jeweils gleiche Farbe !

Exakte Formulierung des Stufenwinkelsatzes :

Werden zwei Geraden g und g' von einer dritten Geraden h in den Punkten A und A' geschnitten, so gilt : $\alpha = \alpha' \Leftrightarrow g \parallel g'$

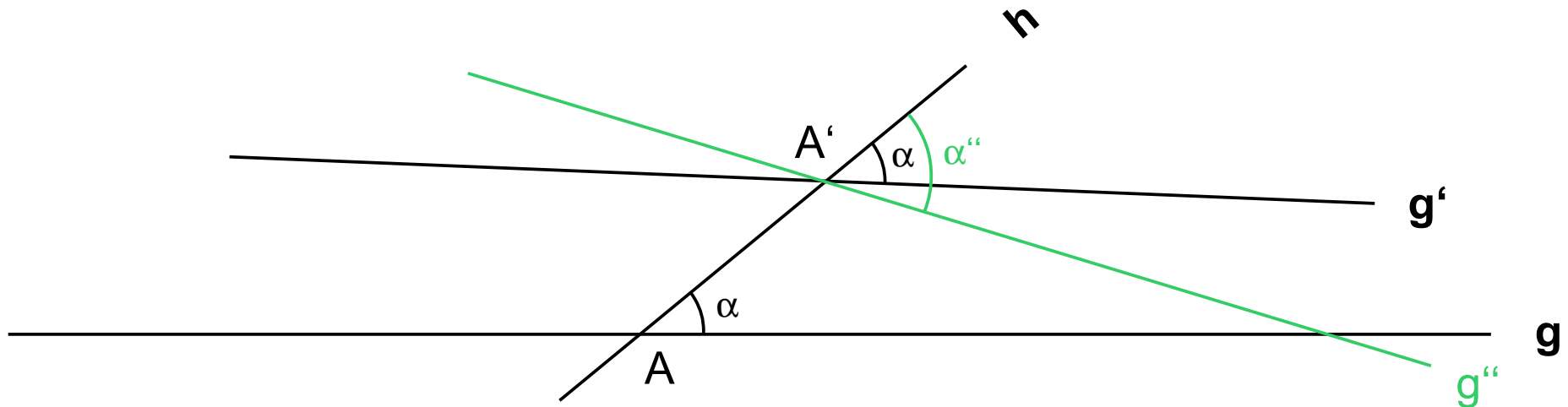


Beweis : „ $\Leftarrow$ “

Sei . $g \parallel g'$ Angenommen $\alpha \neq \alpha'$, etwa $\alpha > \alpha'$. Dann gilt $g'' \cap g = \{S\}$ und $\triangle AA'S \cong \triangle A'AT$ nach dem Kongruenzaxiom sws .

Dann folgt aber, dass ST eine Gerade ist mit $ST \cap g = \{S, T\}$ im Widerspruch dazu, dass zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben .

Die Annahme $\alpha \neq \alpha'$ ist also falsch, das heißt $\alpha = \alpha'$ ist wahr .

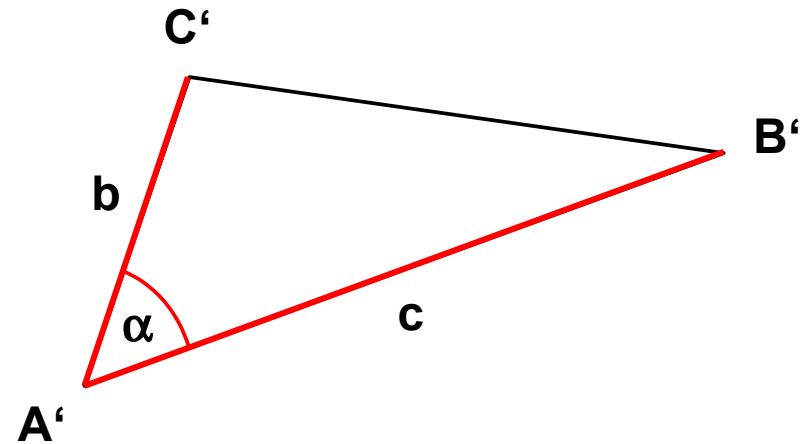
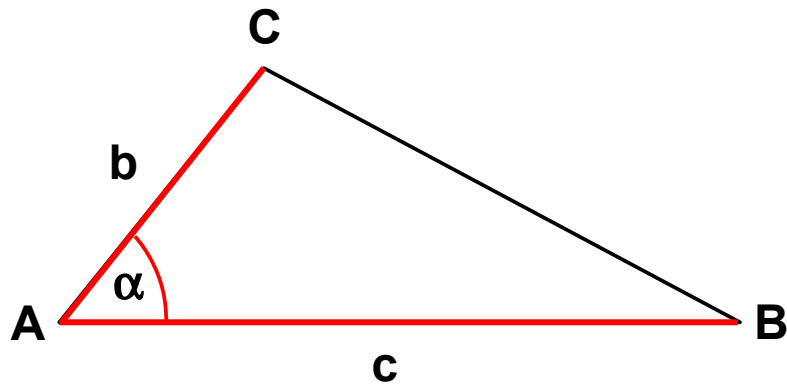


Beweis : „ $\Rightarrow$ “

Sei $\alpha = \alpha'$. Angenommen $g \nparallel g'$. Dann gibt es durch den Punkt A' nach dem Parallelenaxiom genau eine Gerade g'' mit $g'' \parallel g$. Dann müsste aber nach dem vorigen Beweis $\alpha = \alpha''$ sein, im Widerspruch zur Tatsache, dass $\alpha \neq \alpha''$ ist . Also ist $g \parallel g'$ wahr .

Das Axiom sws

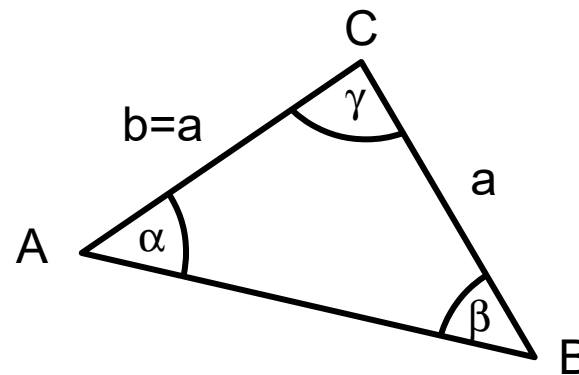
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so stimmen sie in allen Seiten und Winkeln überein, sind also gleich .



Man schreibt : $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Aus dem **Axiom sws** folgt sofort der sogenannte **Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke** :

In jedem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den gleichen Schenkeln a und $b=a$, den Basiswinkeln α , β und dem Winkel γ gilt : $\alpha = \beta$



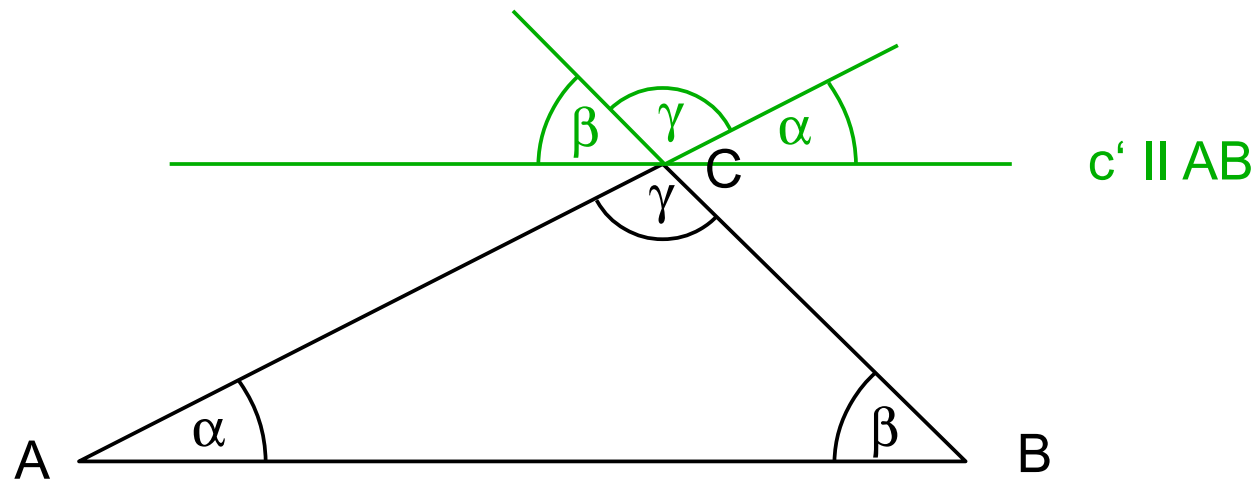
Beweis :

Die Dreiecke $\triangle ACB$ und $\triangle BCA$ stimmen im Winkel γ und den anliegenden Seiten a und $b=a$ überein, und sind deshalb kongruent .
Daraus folgt speziell die Übereinstimmung in den entsprechenden Winkeln α und β , also $\alpha = \beta$.

Winkelsummensatz im Dreieck

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .

Beweis :

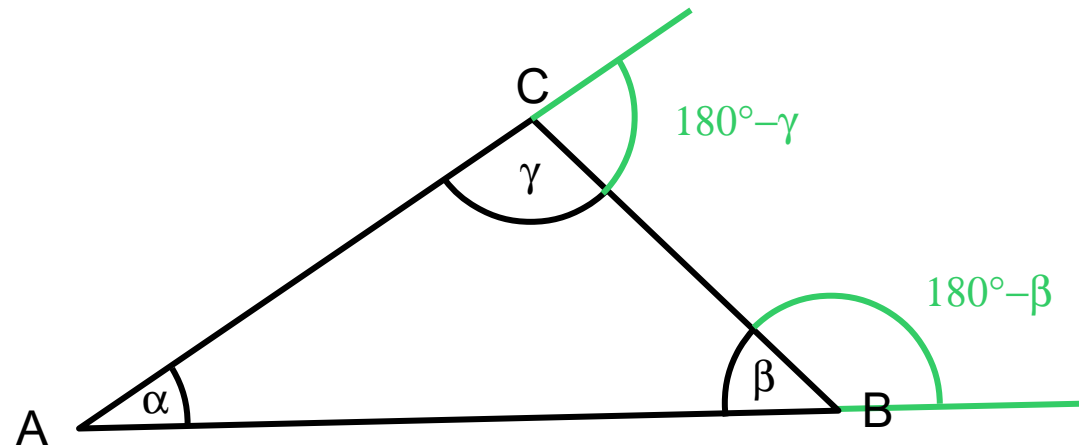


Zeichne die Gerade c' durch C parallel zur Geraden AB , die Stufenwinkel zu α und β und den Gegenwinkel von γ . Dann ergibt sich $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

q.e.d.

Folgerung (1) :

In jedem Dreieck $\triangle ABC$ ist jeder Winkel an eine Ecke jeweils kleiner als die Außenwinkel an den anderen beiden Ecken, zum Beispiel :
 $\alpha < 180^\circ - \beta$, $\alpha < 180^\circ - \gamma$



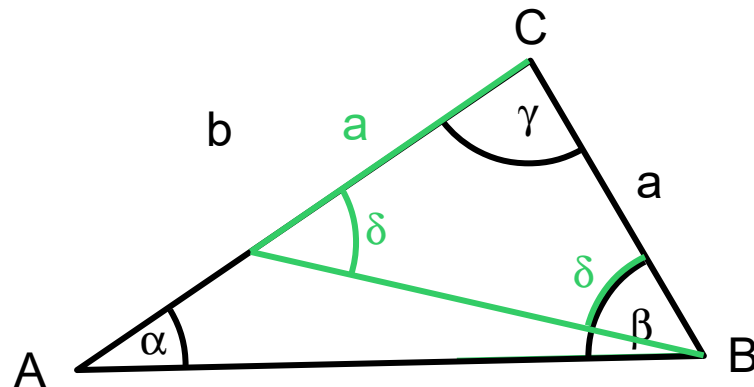
Beweis :

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma < 180^\circ - \beta$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma < 180^\circ - \gamma$$

Folgerung (2) :

In jedem Dreieck $\triangle ABC$ liegt dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenüber, zum Beispiel : $\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b$



Beweis : „ $\Leftarrow$ “

Sei $a < b$. Dann folgt nach **Folgerung (1)** und dem **Basiswinkelsatz** für **gleichschenklige Dreiecke**, dass $\alpha < \delta < \beta$ ist .

Beweis : „ $\Rightarrow$ “

Sei $\alpha < \beta$. Angenommen $a \geq b$.

Im Fall $a = b$ folgte nach dem Basiswinkelsatz für Dreiecke, dass $\alpha = \beta$ ist. Im Fall $a > b$ folgte nach dem vorigen Beweis, dass $\alpha > \beta$ ist .

In beiden Fällen erhält man jeweils einen Widerspruch zur Voraussetzung .

Also ist die Behauptung $a < b$ wahr .

Die Dreiecksungleichung

In jedem $\triangle ABC$ mit den Seiten a , b , c gelten folgende Ungleichungen :

$$a + b > c \quad , \quad b + c > a \quad , \quad c + a > b$$

Beweis :

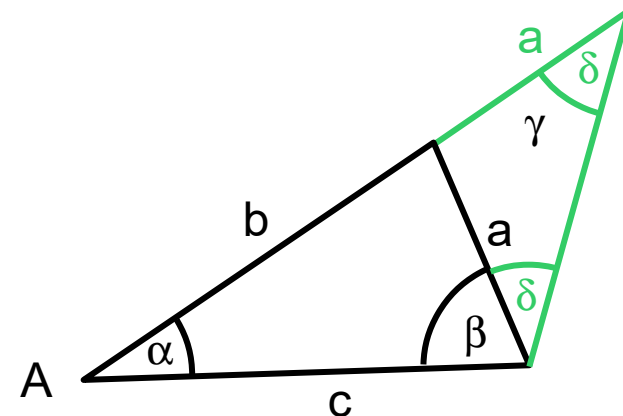
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $a < b < c$ ist .

Wegen $\delta + \beta > \delta$ folgt $a + b > c$.

Nach Voraussetzung folgt :

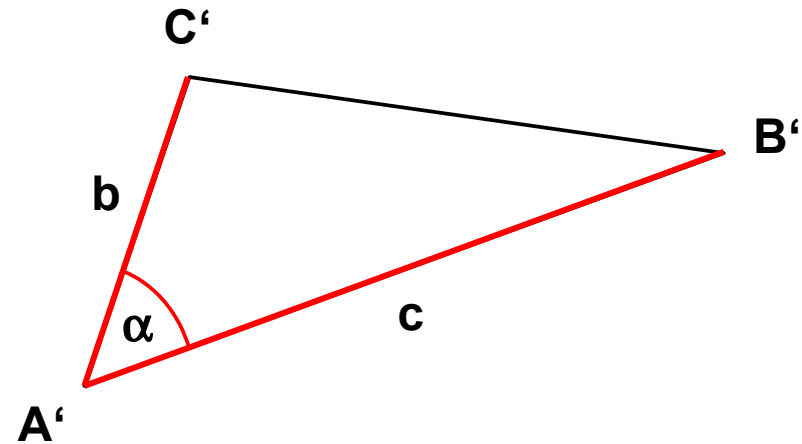
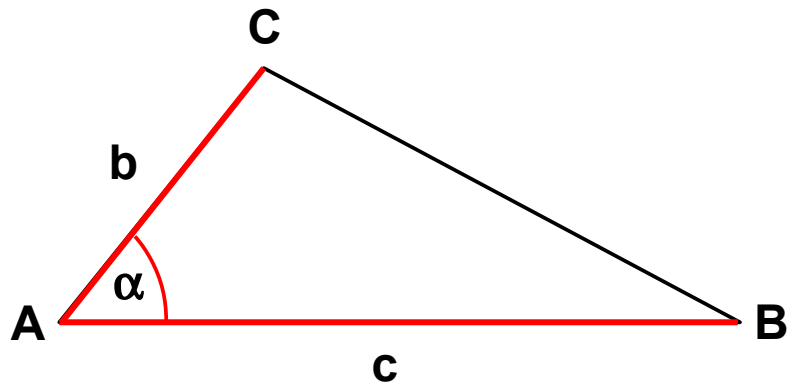
$$b + c \geq a + c > a$$

$$c + a \geq b + a > b$$



Das Axiom sws und weitere Winkelsätze am Dreieck

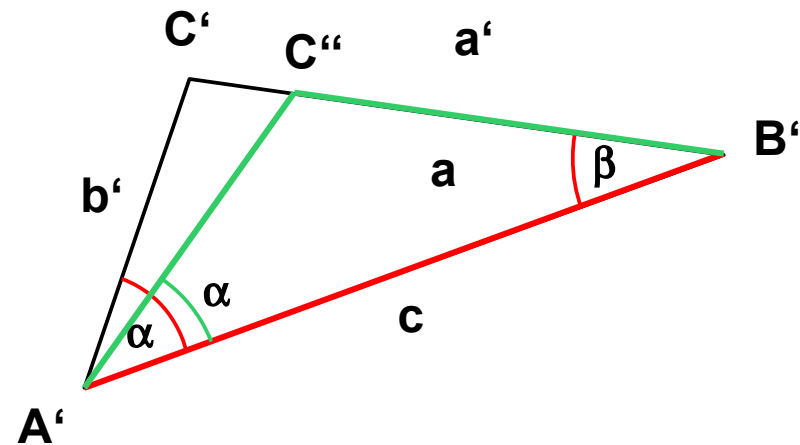
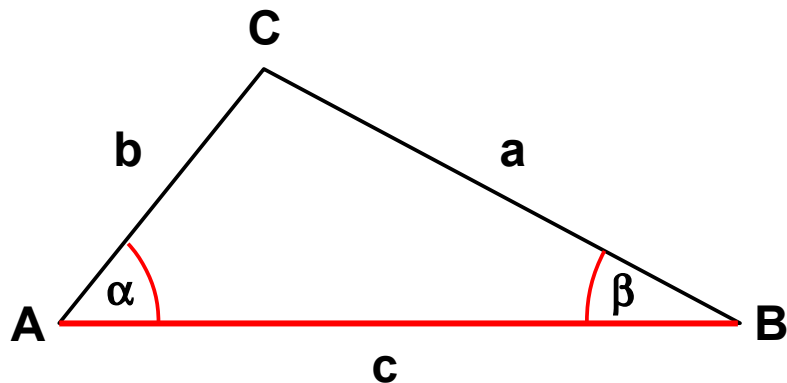
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so stimmen sie in allen Seiten und Winkeln überein, sind also gleich .



Man schreibt : $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Satz wsw

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln überein, so stimmen sie in allen Seiten und Winkeln überein, sind also gleich.



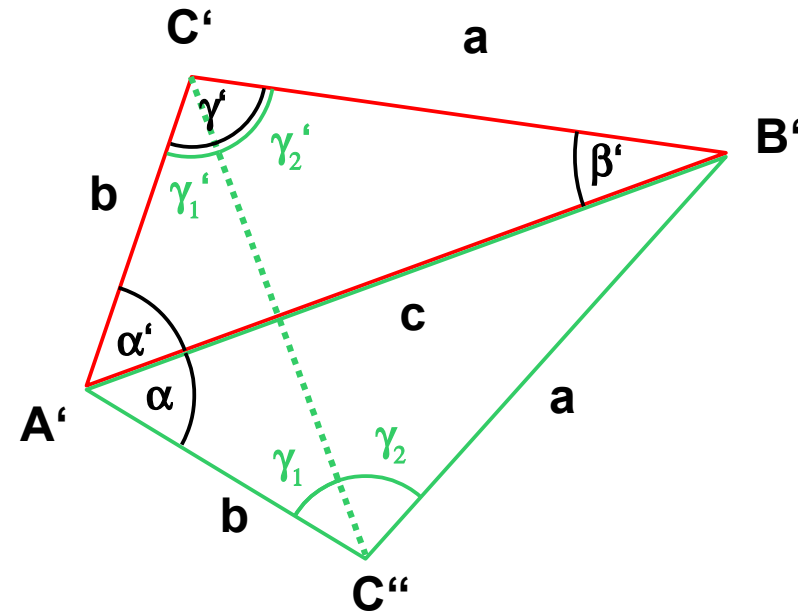
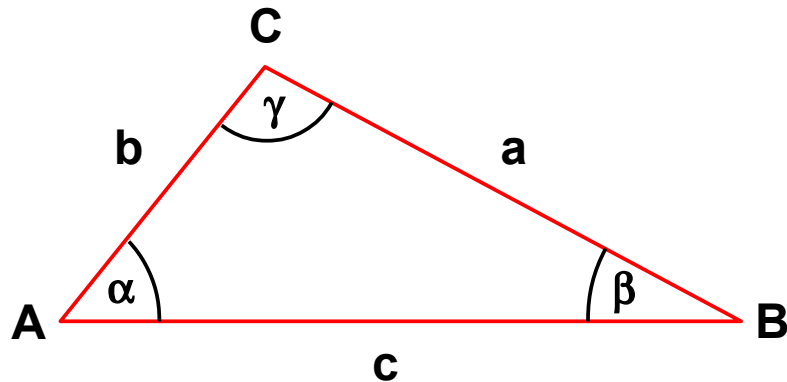
Beweis :

Angenommen $a' > a$. Dann gäbe es einen Punkt C'' auf $\overline{B'C'}$ mit $|B'C''| = a$, und es gälte nach **Axiom sws**, dass $\triangle A'B'C'' = \triangle ABC$. Dann wäre aber $\alpha > \alpha$ ein Widerspruch. Also gilt $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

q.e.d.

Satz sss

Stimmen zwei Dreiecke in allen Seiten überein, so stimmen sie in allen Winkeln überein, sind also gleich .



Beweis :

Man konstruiert nach dem **Axiom sws** das Dreieck $\triangle A'B'C'' = \triangle ABC$.

Nach dem **Axiom sws** gilt $\triangle C'C''A' = \triangle C''C'A'$ und $\triangle C'C''B' = \triangle C''C'B'$,
also $\gamma_1' = \gamma_1$ und $\gamma_2' = \gamma_2$, also $\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2' = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$.

Wiederum nach dem **Axiom sws** ist dann $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

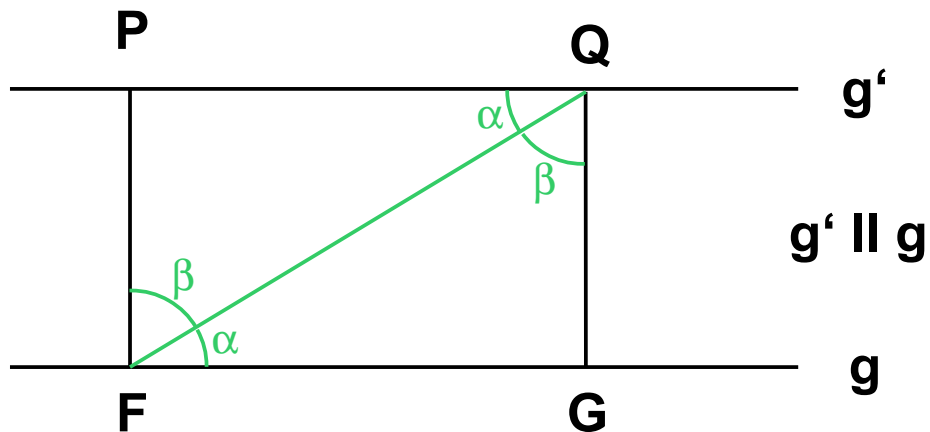
q.e.d.

Satz

Gegeben seien zwei parallele Geraden g und g' . Wenn man von zwei beliebigen Punkten $P, Q \in g'$ die **Lote auf g** mit den **Fußpunkten** $F, G \in g$ zeichnet, so gilt $|PF| = |QG|$.

Anders gesagt : **Der Abstand zweier paralleler Geraden ist konstant !**

Beweis :



Nach dem **Satz wsw** gilt $\triangle FPQ = \triangle QGF$ und deshalb $|PF| = |QG|$.

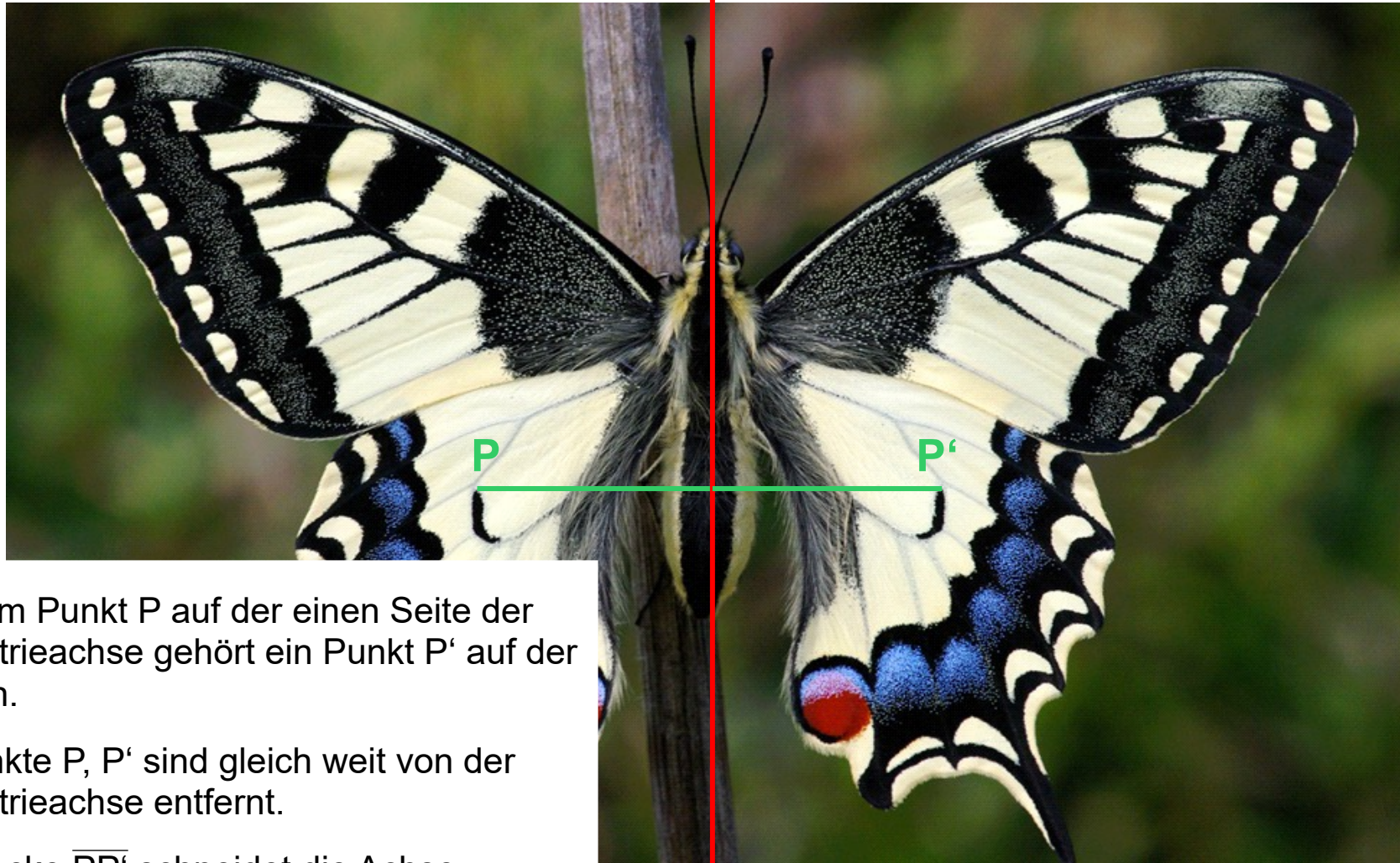
q.e.d.

Symmetrie in der Natur



[Schwalbenschwanz \(Schmetterling\) – Wikipedia](#)

Symmetrie in der Natur



Zu jedem Punkt P auf der einen Seite der Symmetrieachse gehört ein Punkt P' auf der anderen.

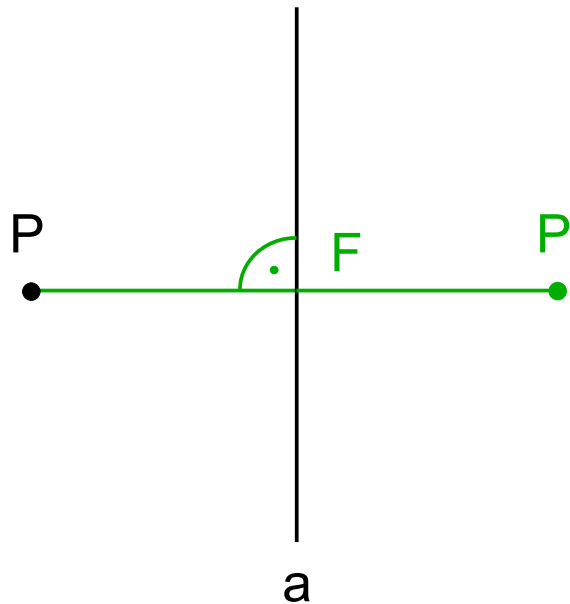
Die Punkte P , P' sind gleich weit von der Symmetrieachse entfernt.

Die Strecke $\overline{PP'}$ schneidet die Achse rechtwinklig.

Symmetrieachse

Achsenspiegelungen

Gegeben sei die Gerade a . Zu jedem Punkt P konstruiert man den Punkt P' wie folgt :



$$|PF| = |P'F|$$

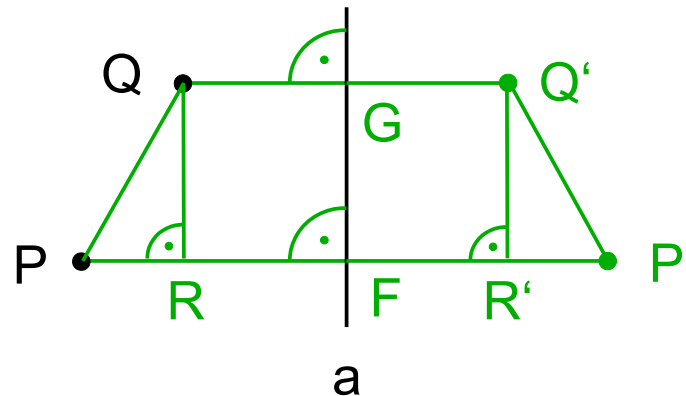
Der **Punkt P'** heißt **Bildpunkt von P** unter der **Achsenspiegelung an der Achse a** .
Der Punkt P heißt **Urbildpunkt**.

Eigenschaften der Achsenspiegelung

- (1) **Abstandstreue :**
Der Abstand der Bildpunkte ist gleich dem Abstand der Urbildpunkte .
- (2) **Streckentreue**
Das Bild einer Strecke ist eine Strecke .
- (3) **Winkeltreue**
Der Bildwinkel ist gleich dem Urbildwinkel .
- (4) **Geradentreue**
Das Bild einer Geraden ist eine Gerade .
- (5) **Vertauschung der Orientierung**
Das Dreieck $\triangle ABC$ und das Bilddreieck $\triangle A'B'C'$ sind entgegengesetzt orientiert .

Beweis der Eigenschaften der Achsenspiegelung

(1) Abstandstreue :



Die Gerade QQ' ist nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes parallel zu PP' .

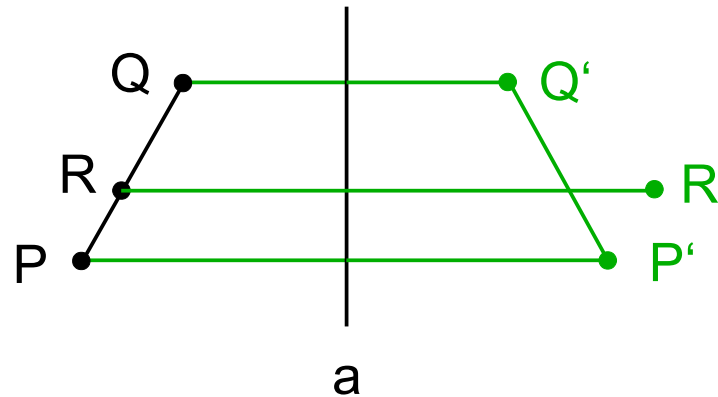
Damit ist der Abstand $|QR| = |Q'R'|$.

Außerdem sind QR , GF und $Q'R'$ parallel, so das gilt :

$$|PR| = |PF| - |RF| = |P'F| - |R'F| = |P'R'| .$$

Die Dreiecke $\triangle PRQ$ und $\triangle P'R'Q'$ sind nach dem **Axiom sws** identisch, das heißt insbesondere $|P'Q'| = |PQ|$.

(2) Streckentreue :



Wegen der Abstandstreue **(1)** gilt :

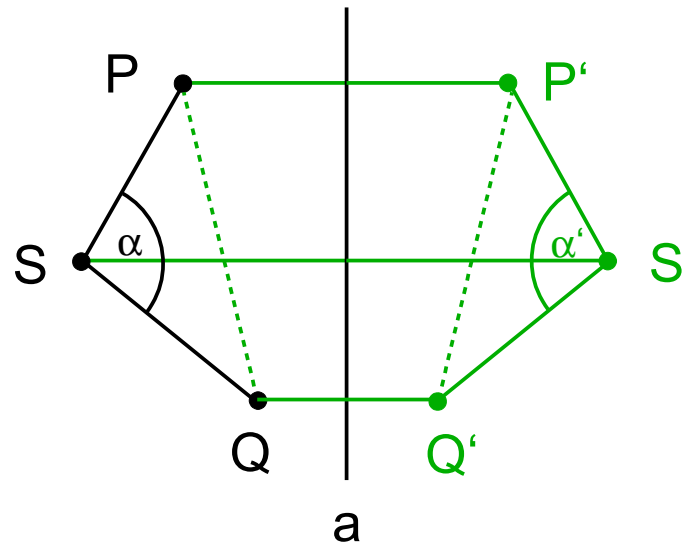
$$|\overline{P'Q'}| = |\overline{PQ}|$$

$$|\overline{P'Q'}| = |\overline{PR}| + |\overline{RQ}|$$

$$|\overline{P'Q'}| = |\overline{P'R'}| + |\overline{R'Q'}|$$

Also ist $R' \in \overline{P'Q'}$.

(3) **Winkeltreue :**



Nach dem **Satz sss** gilt $\triangle PSQ = \triangle P'S'Q'$, also auch $\alpha = \alpha'$.

(4) **Geradentreue :**

Die Geradentreue folgt aus der Strecken- und Winkeltreue .

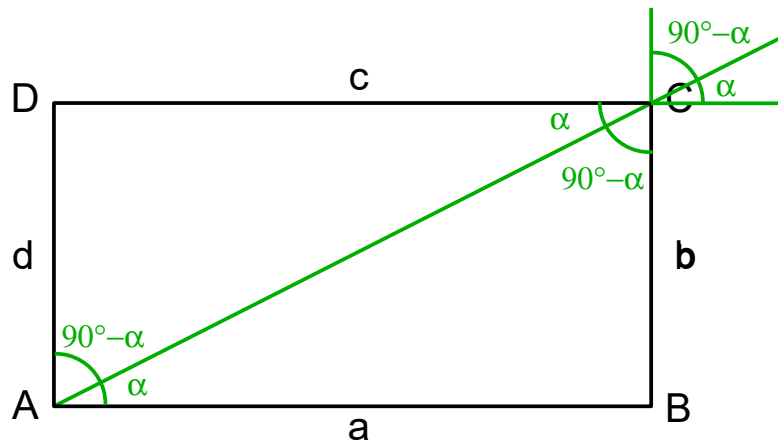
(5) **Vertauschung der Orientierung**
Das sieht man !

q.e.d.

Vierecke

Bekannte besondere Vierecke sind **Rechteck**, **Quadrat**, **Parallelogramm**, **Raute**, **Trapez** und **Drachen** .

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit **4 rechten Winkeln** !



Satz wsw :

$$\triangle ACD = \triangle CAB$$

$$c = a \quad , \quad d = b$$

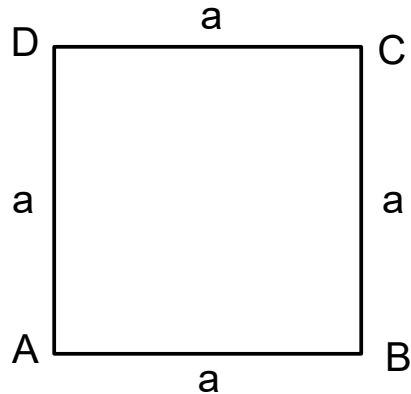
Umkehrung Stufenwinkelsatz :

$$c \parallel a \quad , \quad d \parallel b$$

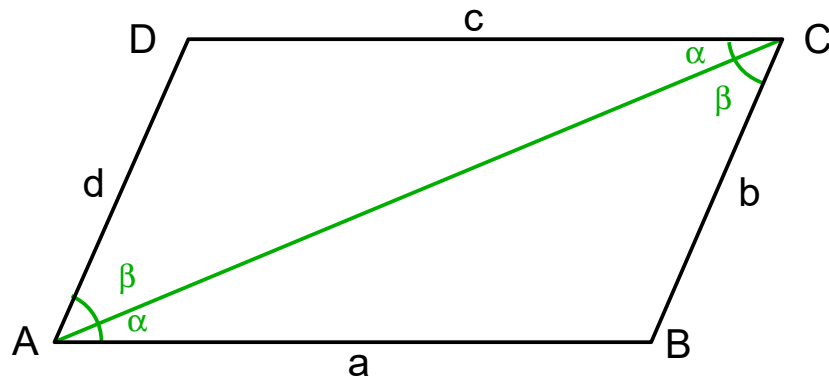
Bei einem Rechteck sind **gegenüberliegende Seiten gleichlang und parallel** !

Ein **Quadrat** ist ein Rechteck mit 4 gleichlangen Seiten !

Deshalb hat es 4 rechte Winkel und gegenüberliegende Seiten sind parallel !



Beim Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten parallel !



$$c \parallel a, \quad d \parallel b$$

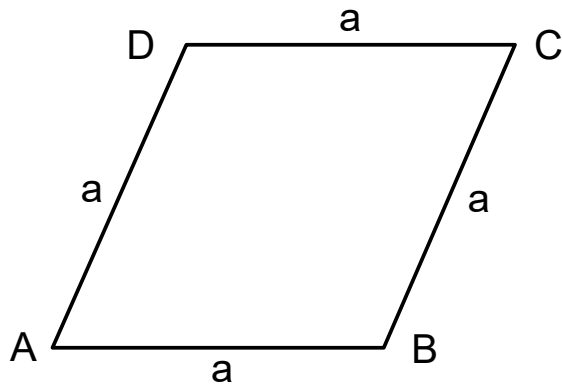
Stufenwinkelsatz, Satz wsw :

$$c = a, \quad d = b$$

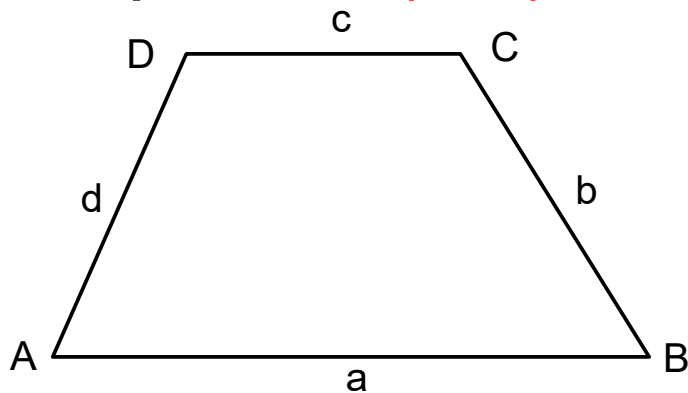
Beim Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang !

Außerdem sind gegenüberliegende Winkel gleich groß !

Eine **Raute** ist ein Parallelogramm mit 4 gleichlangen Seiten !
Deshalb sind gegenüberliegende Seiten parallel und gegenüberliegende Winkel gleich groß !

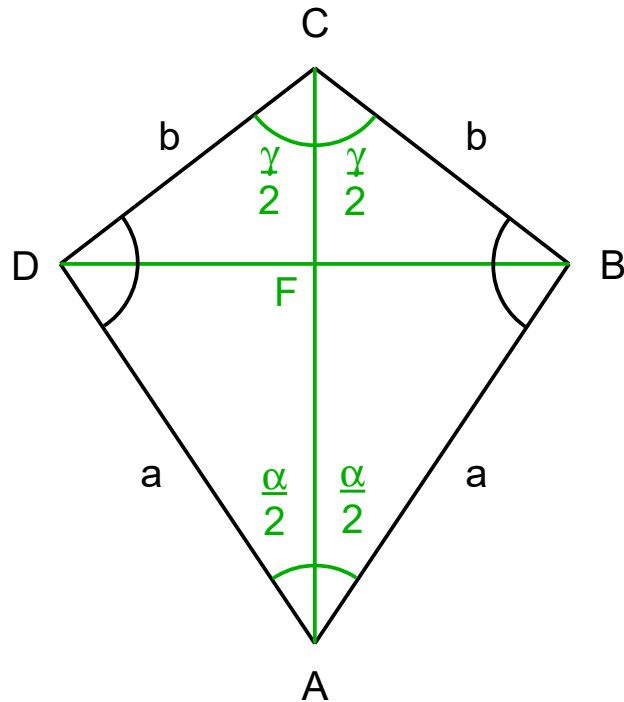


Ein **Trapez** hat 1 paar paralleler Seiten !



$c \parallel a$

Ein **Drachen** hat 2 Paare gleichlanger nebeneinanderliegender Seiten !



Satz sss :

$$\triangle ACD = \triangle ACB$$

$$\delta = \beta$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Axiom sws :

$$\triangle DFC = \triangle BFC$$

$$IDFI = IBFI$$

$$AC \perp BD$$

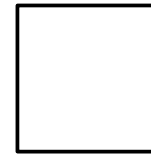
Ein **Drachen** hat also 1 Diagonale als Symmetrieachse !
Die andere wird durch die Achse halbiert !

Vierecke (minimalistisch)



Rechteck

a



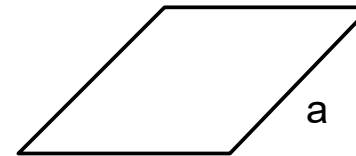
Quadrat

a



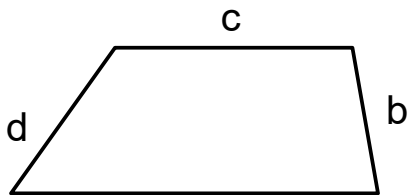
Parallelogramm

a



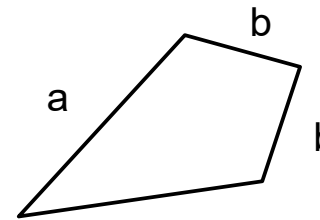
Raute

a



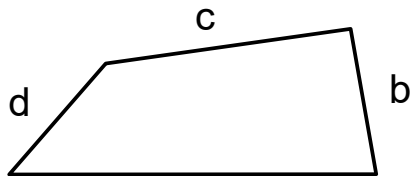
Trapez

a



Drachen

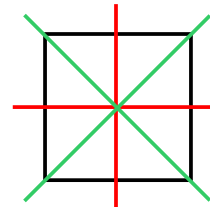
a



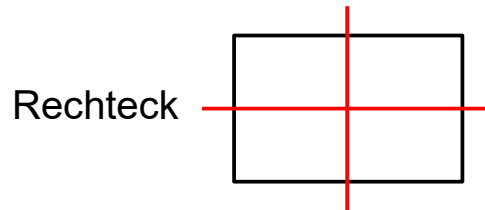
Allgemeines
viereck

a

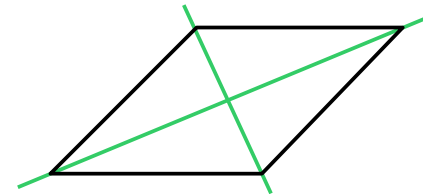
Ordnung der Vierecke nach Symmetrieachsen



Quadrat

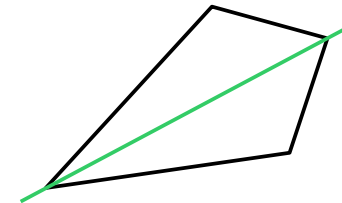
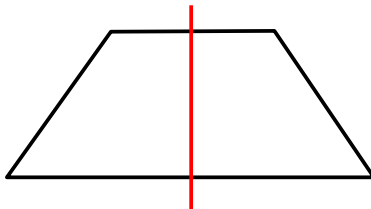


Rechteck



Raute

Gleichseitiges
Trapez

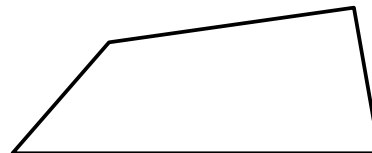


Drachen

Trapez



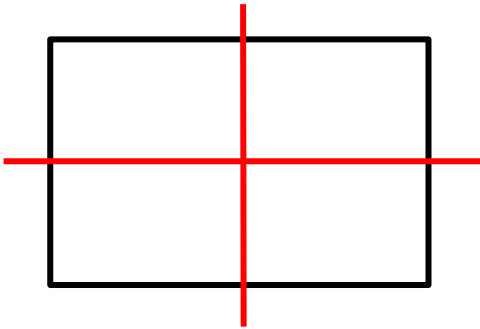
Allgemeines
viereck



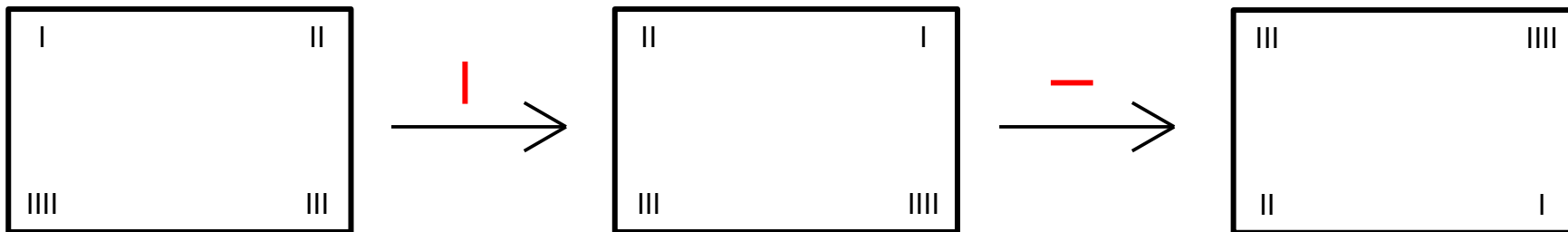
Parallelogramm

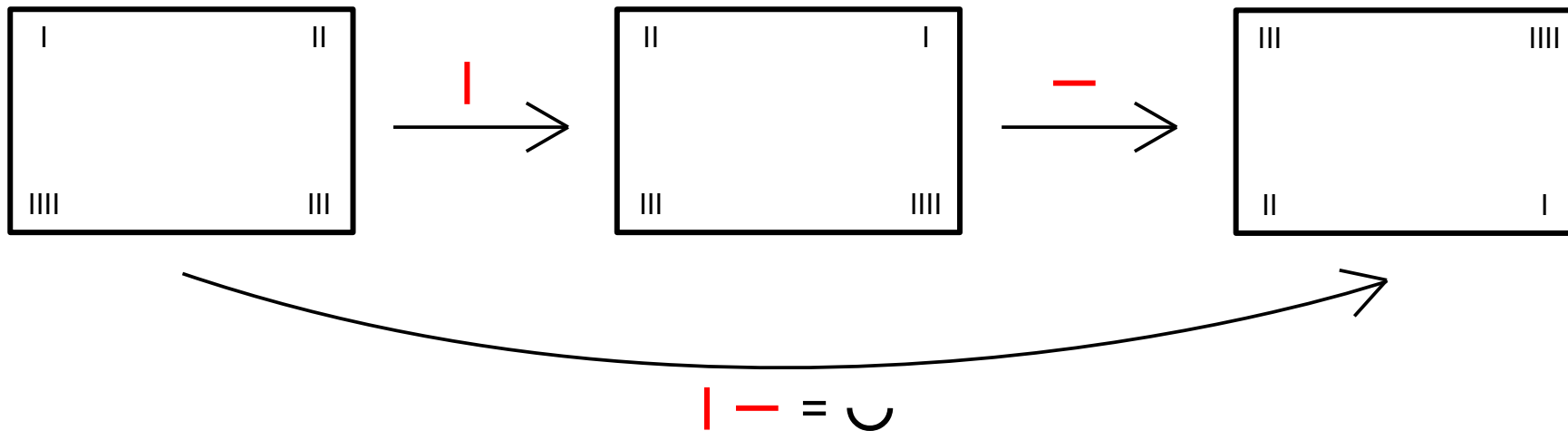
Weiterführende Betrachtungen des Rechtecks

Das Rechteck hat 2 Symmetriachsen, die jeweils durch die Mitten gegenüberliegender Seiten gehen.



Wie verändert sich die Lage des Rechtecks, wenn es zuerst an der senkrechten Achse und das so erhaltene Rechteck anschließend an der waagrechten Achse gespiegelt wird ?





Die Hintereinanderschaltung der zwei Spiegelungen kann durch einen sogenannten **u-turn**, also durch eine **halbe Drehung** oder eine 180°-Drehung ersetzt werden. Das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der Symmetrieachsen.

Dies wird formal beschrieben durch : $| - = \cup$

Mit Hilfe der dem Skriptum beigefügten Karten kam man nun folgende Fragen beantworten :

$$| - = ?$$

$$- | = ?$$

$$| | = ?$$

$$- - = ?$$

Ergebnis :

$$| \text{ --- } = \cup$$

$$\text{--- } | = \cup$$

$$| \quad | = \bigcirc$$

$$\text{--- } \text{--- } = \bigcirc$$

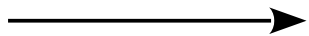
Das kreisförmige Symbol stellt einen **o-turn** dar, also eine **Null Drehung** oder ganze Drehung, bzw. eine 0°-Drehung oder eine 360°-Drehung .

Man hat nun aus zwei Achsenspiegelungen durch **Hintereinanderschaltung** oder **Verknüpfung** 2 weitere Abbildungen erzeugt und hat somit insgesamt 4 Abbildungen :

$$| \quad \text{--- } \quad \bigcirc \quad \cup$$

Verknüpfungstabelle für die 4 Abbildungen $|$, $-$, $\bigcirc$, $\cup$ des Rechtecks

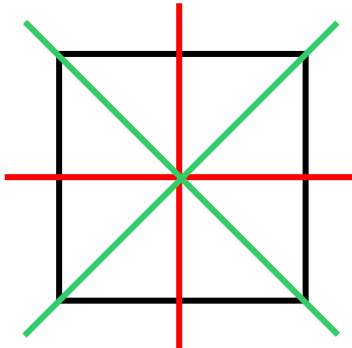
Leserichtung



	$ $	$-$	$\bigcirc$	$\cup$
$ $	$\bigcirc$	$\cup$	$ $	$-$
$-$	$\cup$	$\bigcirc$	$-$	$ $
$\bigcirc$	$ $	$-$	$\bigcirc$	$\cup$
$\cup$	$-$	$ $	$\cup$	$\bigcirc$

Weiterführende Betrachtungen des Quadrats

Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen, 2 Achsen durch die Seitenmitten gegenüberliegender Seiten und 2 diagonale Achsen .



Wie sieht die Verknüpfungstabelle für die 4 Achsenspiegelungen des Quadrats aus ? Verwende zur Beantwortung das entsprechende Kartenmaterial !

Verknüpfungstabelle für die 4 Achsenspiegelungen des Quadrats

		—	↘	↗
	○	⌢	⌣	⌤
—	⌢	○	⌤	⌣
↘	⌤	⌣	○	⌢
↗	⌣	⌤	⌢	○

Feststellung : Es sind Viertel- und Dreiviertel-Drehungen entstanden .
 Das Quadrat besitzt jetzt 8 Abbildungen, nämlich
 4 Achsenspiegelungen und
 4 Drehungen .

Verknüpfungstabelle für die 4 Achsenspiegelungen des Quadrats

Umordnung der Tabelle nach dem Grad der Drehungen !

		\	-	/
	○	⌒	⌒	⌒
\	⌒	○	⌒	⌒
-	⌒	⌒	○	⌒
/	⌒	⌒	⌒	○

Verknüpfungstabelle für die 8 Abbildungen des Quadrats

		\	-	/	○	⌒	⌓	⌔
	○	⌒	⌓	⌔				
\	⌔	○	⌒	⌓				
-	⌒	⌓	○	⌒				
/	⌒	⌓	⌔	○				
○								
⌒								
⌓								
⌔								

Verknüpfungstabelle für die 8 Abbildungen des Quadrats

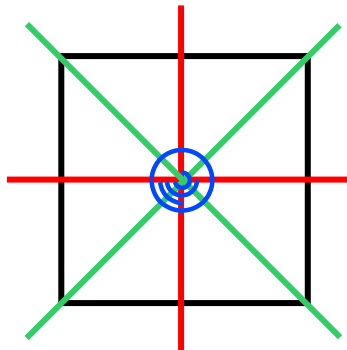
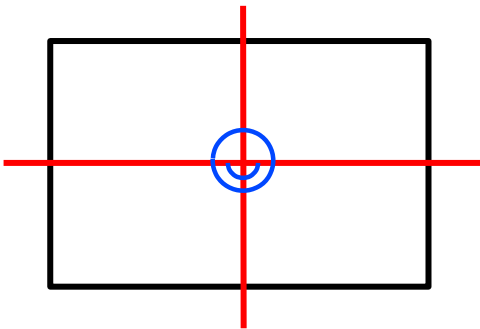
	I	\	-	/	O	┐	└	┌
I	O	┐	└	┌	I	\	-	/
\	┌	O	┐	└	\	-	/	I
-	└	┌	O	┐	-	/	I	\
/	┐	└	┌	O	/	I	\	-
O	I	\	-	/	O	┐	└	┌
┐	/	I	\	-	┐	└	┌	O
└	-	/	I	\	└	┌	O	┐
┌	\	-	/	I	┌	O	┐	└

Rückblick auf die bekannten Vierecke

Wir haben gesehen, dass das Rechteck und das Quadrat neben den Achsensymmetrien auch über Drehsymmetrien verfügen.

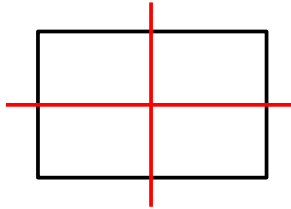
Beim Rechteck sind es die Null- und die Halbdrehung : ○ , ∪

Beim Quadrat sind es die Null-, Viertel-, Halb-, Dreiviertel-Drehung : ○ , ∪ , ∪ , ∪

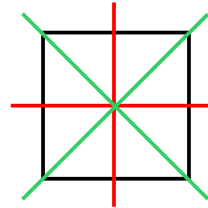


Es bleibt also die Frage, ob andere Vierecke ebenfalls Drehsymmetrien besitzen ?

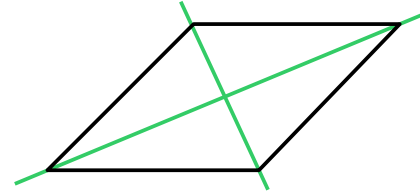
Rechteck



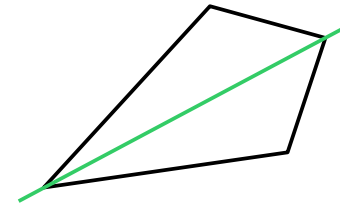
Quadrat



Raute



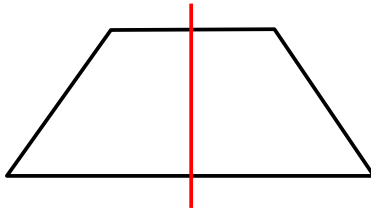
Drachen



Parallelogramm



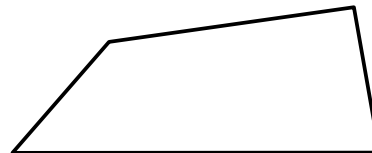
Gleichseitiges
Trapez



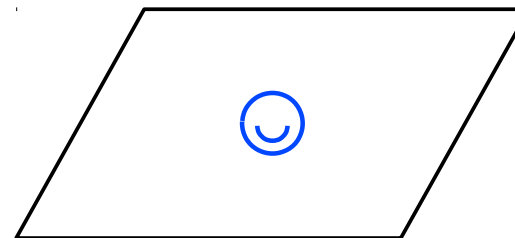
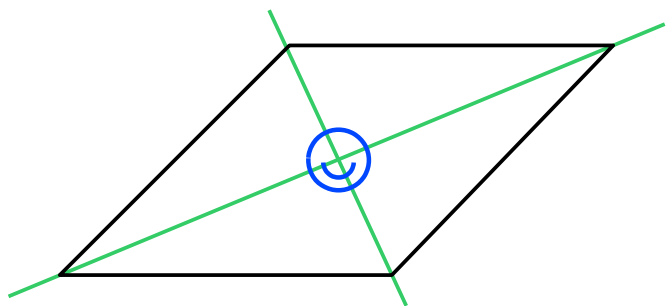
Trapez



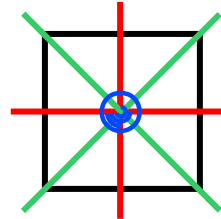
Allgemeines
viereck



Weitere Vierecke mit Drehsymmetrien sind die Raute und das Parallelogramm.
Beide haben Die Drehsymmetrien der Null- und der Halbdrehung : ○ , ∪

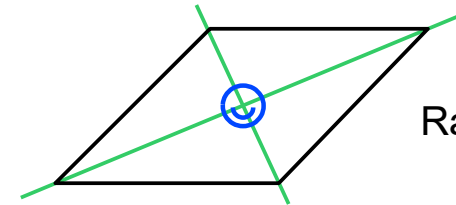
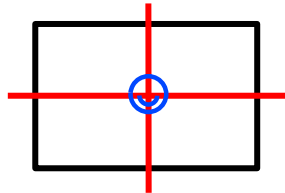


Ordnung der Vierecke nach Achsen- und Drehsymmetrien



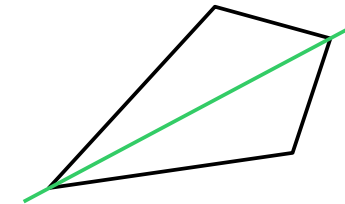
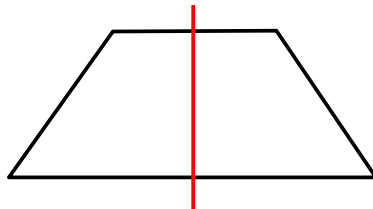
Quadrat

Rechteck



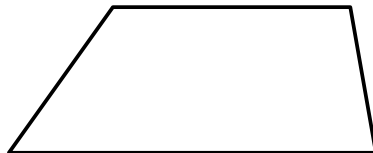
Raute

Gleichseitiges
Trapez

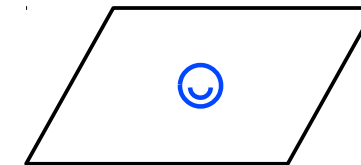
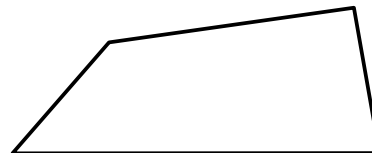


Drachen

Trapez



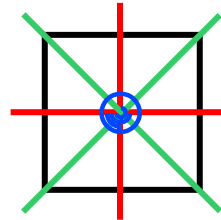
Allgemeines
viereck



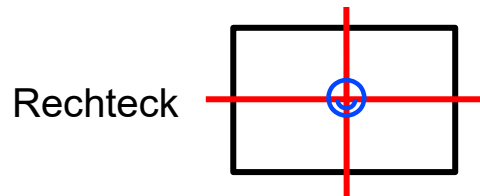
Parallelogramm

Ordnung der Vierecke nach Achsen- und Drehsymmetrien

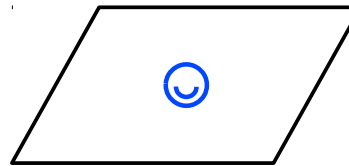
(Stimmiger !)



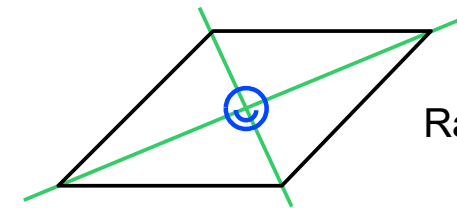
Quadrat



Rechteck

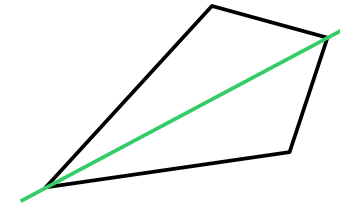
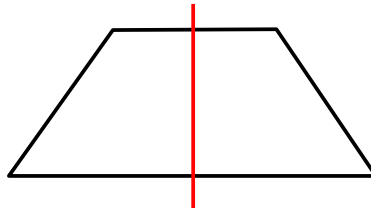


Parallelogramm

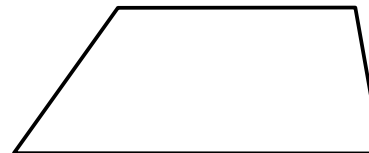


Raute

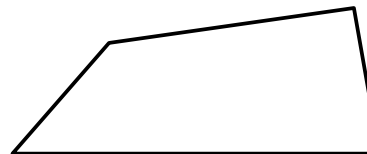
Gleichseitiges
Trapez



Drachen



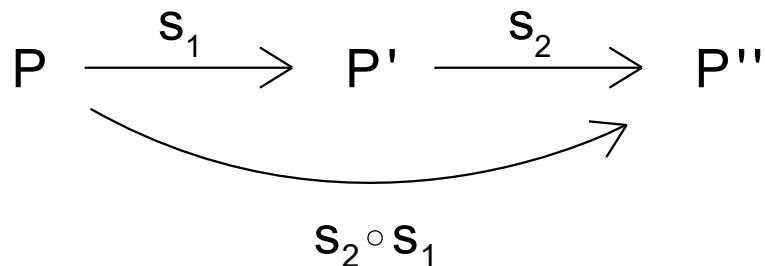
Trapez



Allgemeines
Viereck

Allgemeine Betrachtung der Verknüpfung von Achsenspiegelungen

Gegeben seien zwei Achsenspiegelungen mit den Spiegelachsen s_1 , s_2 .
Gesucht ist die Verknüpfung $s_2 \circ s_1$?

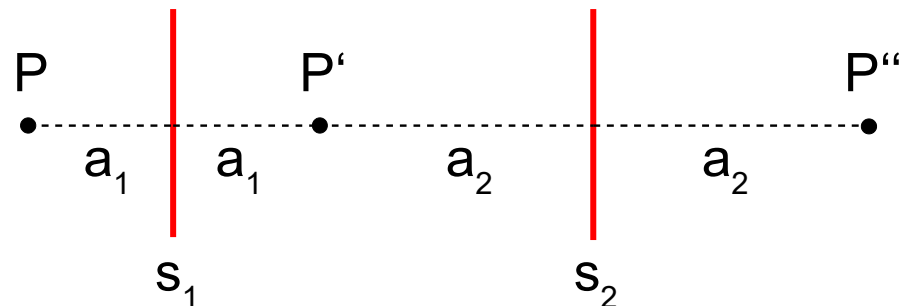


Schreibweise :

$$P' = s_1(P) \quad , \quad P'' = s_2(P') = s_2(s_1(P))$$

1. Fall :

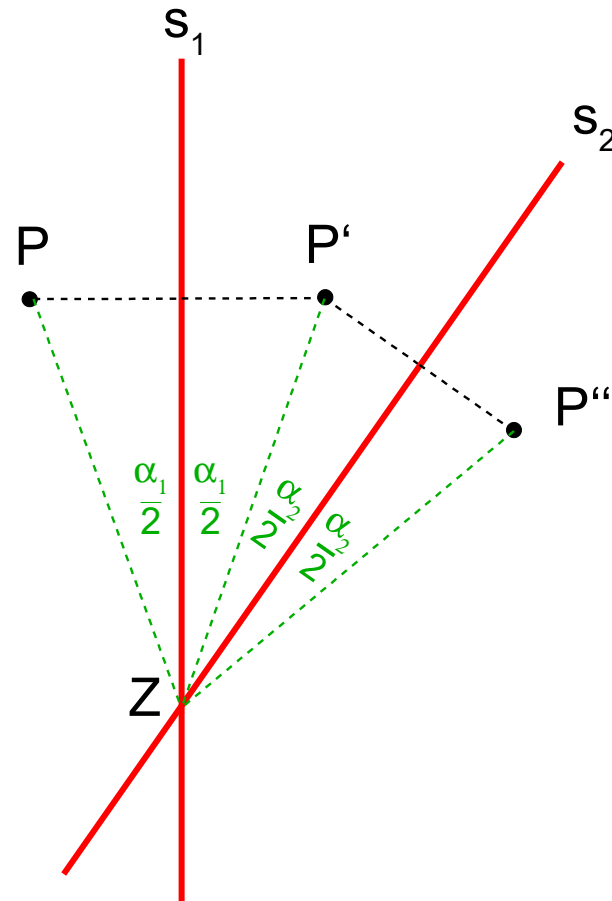
$s_1 \parallel s_2$, Abstand a



Die Verknüpfung $s_2 \circ s_1$ ist eine **Verschiebung** (senkrecht zu den Achsen) um $2a = 2a_1 + 2a_2$.

2. Fall :

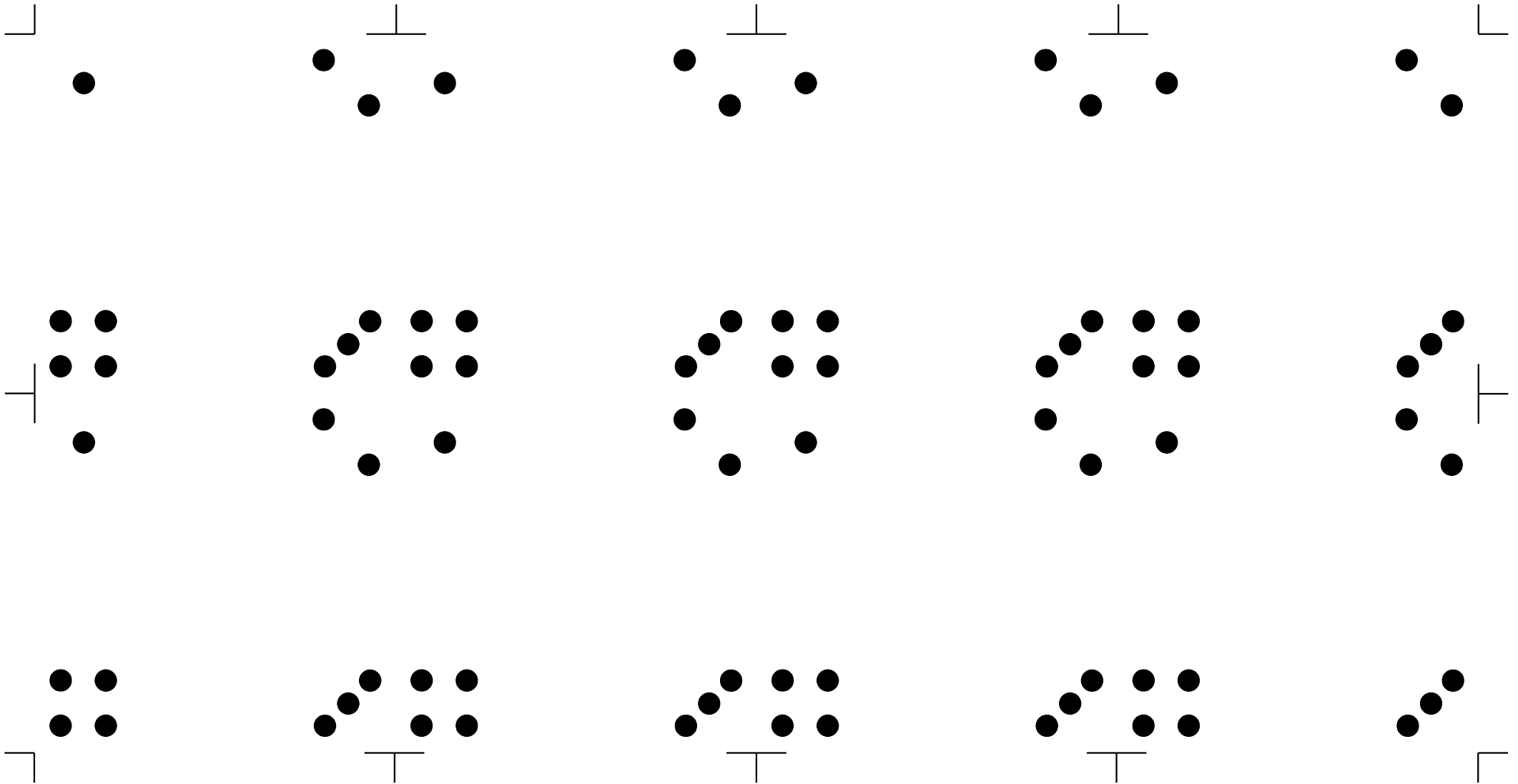
$$s_1 \nparallel s_2, \quad s_1 \cap s_2 = \{Z\}$$



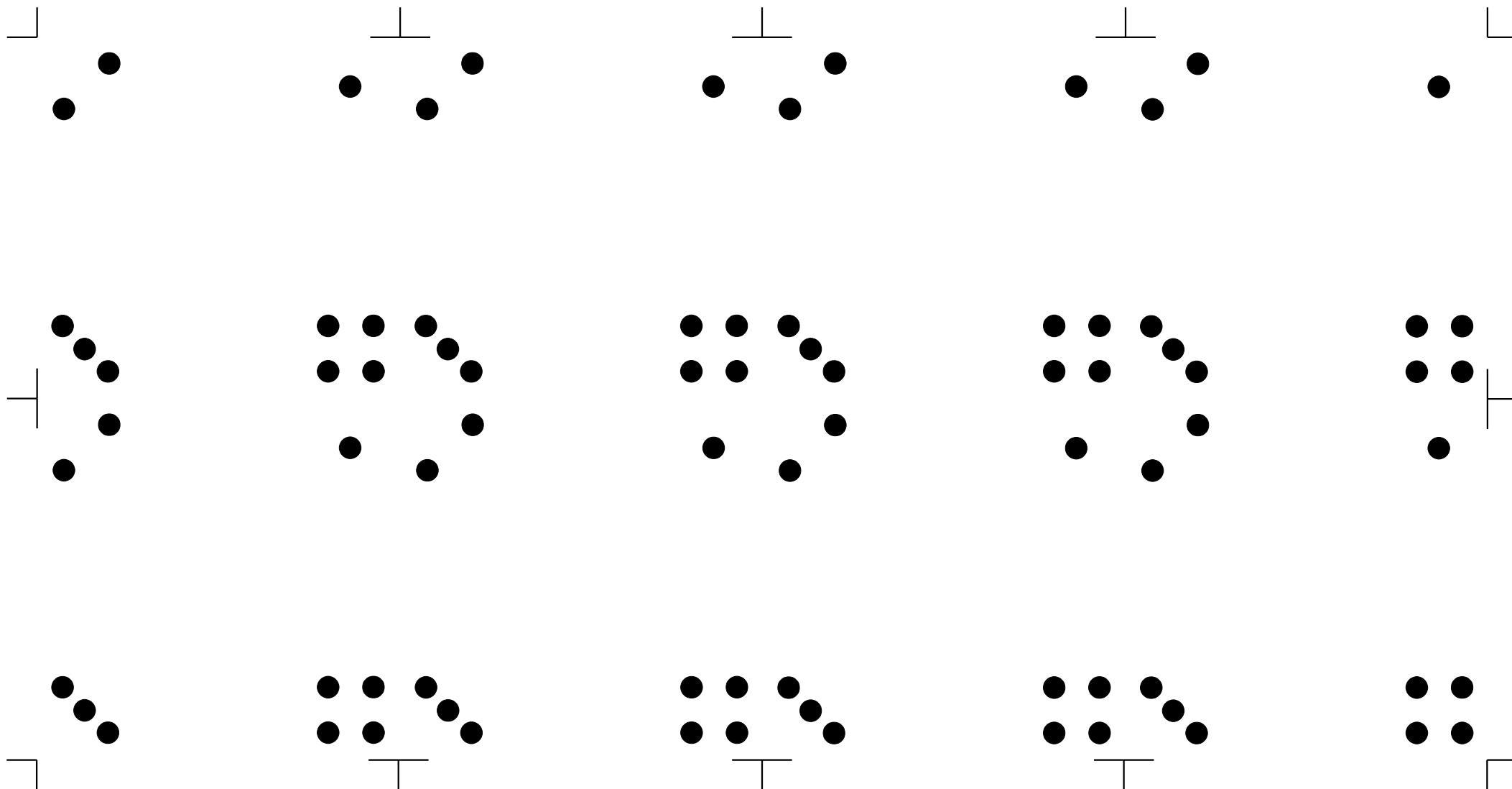
Die Verknüpfung $s_2 \circ s_1$ ist eine **Drehung um Z mit Winkel $2\alpha = 2\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\right)$** ,
wobei $\alpha = \angle s_2 s_1$.

Einige Definitionen und Axiome der Geometrie, die im Skriptum verwendet wurden .

- (I) Durch zwei Punkte gibt es genau eine Gerade .
- (II) Zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt .
- (III) Zwei Geraden sind **parallel**, wenn sie keinen Schnittpunkt haben .
- (IV) Winkel an Geraden haben 180° .
- (V) **Parallelen-Axiom** :
Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es genau eine Gerade durch diesen Punkt, welche zur gegebenen Geraden parallel ist .
- (VI) **Lot-Axiom** :
Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es genau eine Gerade durch diesen Punkt, welche die gegebene Gerade senkrecht schneidet.
Der Schnittpunkt heißt **Lotfußpunkt** .
- (VII) **Axiom sws** :
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so stimmen sie in allen Winkeln überein, sind also gleich .



Vorlagen für quadratische Karten; Vorderseite



Vorlagen für quadratische Karten; Rückseite