Kreis im Raum

Vorbetrachtungen :

Gegeben sei ein normierter Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ und $n_3 \neq 0$ und n_1 , n_2 nicht beide gleich Null .

Gesucht ist ein dazu orthogonaler normierter Vektor $\vec{e} = v\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}$

mit $\vec{n} \cdot \vec{e} = 0$ und $|\vec{e}|^2 = v^2\left(n_1^2 + n_2^2 + e_3^2\right) = 1$!

Rechnung :

$$\vec{n} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} v \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = v\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3 e_3\right) = 0$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3 e_3 = 0$$

$$\underline{e_3 = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_3}}$$

$$|\vec{e}|^2 = v^2 n_1^{\,2} + v^2 n_2^{\,2} + v^2 e_3^{\,2} = 1$$

$$v^2 \left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + e_3^{\,2}\right) = 1$$

$$v^2 \left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + \left(- \frac{n_1^{\,2} + n_2^{\,2}}{n_3}\right)^2\right) = 1$$

$$v^2 \left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + \frac{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)^2}{n_3^{\,2}}\right) = 1$$

$$v^2 \frac{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right) n_3^{\,2} + \left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)^2}{n_3^{\,2}} = 1$$

$$v^2 \frac{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)\left(n_3^{\,2} + n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)^2}{n_3^{\,2}} = 1$$

$$v^2 \frac{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}{n_3^{\,2}} = 1$$

$$\underline{v = \frac{n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}}}$$

$$\vec{e} = v\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \frac{n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ -\dfrac{n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{e} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_1 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\[2ex] \dfrac{n_2 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\[2ex] -\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)} \end{pmatrix}}$$

Bildet man nun den Vektor $\vec{f} = \vec{n} \times \vec{e}$, so hat man ein orthonormiertes Vektordreibein $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{n}$:

$$\vec{f} = \vec{n} \times \vec{e}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{n_1 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\ \\ \dfrac{n_2 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\ \\ -\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -n_2 \sqrt{n_1^2 + n_2^2} - \dfrac{n_2 n_3^2}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\ \\ n_1 \sqrt{n_1^2 + n_2^2} + \dfrac{n_1 n_3^2}{\sqrt{\left(n_1^{\ 2} + n_2^{\ 2}\right)}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n_2\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)}{\sqrt{\left(n_1{}^2 + n_2{}^2\right)}} \\ \\ \dfrac{n_1\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)}{\sqrt{\left(n_1{}^2 + n_2{}^2\right)}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{f} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n_2}{\sqrt{\left(n_1{}^2 + n_2{}^2\right)}} \\ \\ \dfrac{n_1}{\sqrt{\left(n_1{}^2 + n_2{}^2\right)}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Das orthonormierte Dreibein $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{n}$ zu einem normierten Vektor $\vec{n}$:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_1 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] \dfrac{n_2 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] -\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n_2}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] \dfrac{n_1}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Gleichung eines Kreises $K_{\vec{M};r}$ **in der Ebene mit Stützpunkt** $\vec{M}$ **und Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ **:**

$$K_{\vec{M};r} \quad : \qquad \vec{x} = \vec{M} + r\cos(\varphi)\vec{e} + r\sin(\varphi)\vec{f} \quad , \qquad \varphi \in [0;2\pi)$$

$$\text{mit} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_1 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] \dfrac{n_2 n_3}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] -\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n_2}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] \dfrac{n_1}{\sqrt{\left(n_1^{\,2} + n_2^{\,2}\right)}} \\[2ex] 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{\vec{M};r} \quad : \quad \vec{x} = \vec{M} + r\cos(\varphi)\vec{e} + r\sin(\varphi)\vec{f} \quad , \quad \varphi \in [0;2\pi)$$