Pythagoreische Zahlentripel

Arno Fehringer, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

April 2014

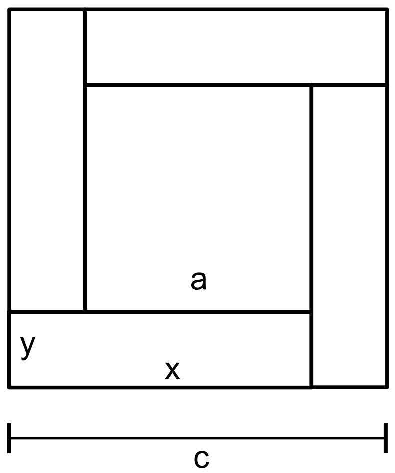
Quellen:

Müller, G ; Steinbring H; Wittmann, E. Ch. : Arithmetik als Prozess ; Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung 2004

Ifrah, G. : Universalgeschichte der Zahlen ; Campus

Pythagoreische Zahlentripel (Pythagoras ~500 v. Chr.)

Fügt man einem Quadrat der Seitenlänge a vier geeignete Rechtecke mit den Seiten x, y hinzu, so erhält man ein Quadrat der Seitenlänge c .



Für die Flächen gilt :

$$a^2 + 4xy = c^2$$

Mit $a = x - y$ und $c = x + y$ folgt :

$$(x-y)^2 + 4xy = (x+y)^2 \quad .$$

Falls x, y Quadratzahlen sind, $x = u^2$, $y = v^2$, erhält man die **Pythagoreische Formel** :

$$(u^2-v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2+v^2)^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

mit $a = u^2-v^2$, $b = 2uv$ und $c = u^2+v^2$.

Sind die Zahlen a, c, u, v alles **natürliche Zahlen** , dann heißt das Tripel (a, b, c) **Pythagoreisches Zahlentripel** , abgekürzt **PZT** .

<u>Bemerkung</u> : Das Tripel (a, b, c) = (3, 4, 5) ist ein Pythagoreisches Zahlentripel.
Die Aufgabe ist, alle Pythagoreischen Zahlentripel zu finden !

Eigenschaften der Pythagoreischen Zahlentripel (PZT)

(1) Vervielfachung

Sei $(a\ \ b\ \ c)$ ein PZT .
Ist $a' = va$, $b' = vb$, $c' = vc$ mit $v \neq 0$, so ist $(a'\ \ b'\ \ c')$ ebenfalls ein PZT :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$v^2a^2 + v^2b^2 = v^2c^2$$

$$(va)^2 + (vb)^2 = (vc)^2$$

$$a'^{\,2} + b'^{\,2} = c'^{\,2}$$

(2) Primitive Pythagoreische Zahltripel

Ist $a^2 + b^2 = c^2$ und der **größte gemeinsame Teiler** $(a;b;c) = t > 1$, so folgt :

$$(ta')^2 + (tb')^2 = (tc')^2$$

$$t^2ta'^{\,2} + t^2b'^{\,2} = t^2c'^{\,2} \quad \cdot$$

$$a'^{\,2} + b'^{\,2} = c'^{\,2}$$

Außerdem ist $(a';b';c') = 1$, denn angenommen $(a';b';c') = t' > 1$, so würde folgen :

$a = ta' = tt'a''$, $b = tb' = tt'b''$, $c = tc' = tt'c''$ mit

$tt' > t$ und $tt' \mid a,b,c$. Es gäbe also eine größeren gemeinsamen Teiler als t ,

im Widerspruch zu $(a;b;c) = t$.

Definition :
Ein Pythagoreisches Zahlentripel $(a\ \ b\ \ c)$ mit $(a;b;c) = 1$ heißt **primitives Pythagoreisches Zahlentripel** .

Bemerkung :
Jedes Pythagoreische Zahlentripel ist entweder primitiv oder es ist Vielfaches eines primitiven Pythagoreischen Zahlentripels .

(3) Gerad- bzw. Ungeradzahligkeit bei primitiven Pythagoreische Zahltripeln

Die Zahlen a, b, c eines primitiven PZT können nicht alle gerade sein, da da $(a;b;c) = 2$ wäre im Widerspruch zu $(a;b;c) = 1$.

Können die Zahlen a, b, c alle ungerade sein ?
Nein, denn aus a, b ungerade würde c^2 und damit c gerade folgen .

Nimmt man jetzt einmal an , c sei gerade , $c = 2c'$.

1. Fall : a^2 , b^2 sind gerade .

Dann folgt :

$a = 2a'$, $b = 2b'$, im Widerspruch zu $(a;b;c) = 1$.

2. Fall : a^2 , b^2 sind ungerade .

Dann folgt :

$$a = 2a'+1 \quad , \quad b = 2b'+1 \quad ,$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 = (2c')^2$$

$$4a'^2+4a'+1+4b'^2+4b'+1 = 4c'^2$$

$$4a'^2+4a'+4b'^2+4b'+2 = 4c'^2$$

$$2a'^2+2a'+2b'^2+2b'+1 = 2c'^2$$

$$2(a'^2+a'+b'^2+b')+1 = 2c'^2$$

Die letzte Gleichung ist falsch, da eine ungerade Zahl nicht zugleich gerade sein kann .

Die Zahl c muss also ungerade sein .

Wenn nun a, b beide gerade oder beide ungerade sind , müsste $a^2+b^2 = c^2$ bzw. c zugleich gerade und ungerade sein , was unmöglich ist .

Die Konsequenz ist :

Von den Zahlen a , b ist immer eine ungerade und die andere gerade . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei a ungerade und b gerade.

Konsequenzen für die Parameter u, v eines **primitiven Pythagoreischen Zahlentripels**

$$b = 2uv \quad , \quad a = u^2 - v^2 \quad , \quad c = u^2 + v^2 \quad \text{mit} \quad u > v > 0$$

$$a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$

$$a^2 + b^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$$

$$a^2 + b^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$$

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da $c = u^2 + v^2$ ungerade sein muss , müssen u, v unterschiedliche Paritäten haben , oder anders gesagt $u + v$ muss ungerade sein .

Angenommen $(u;v) = t > 1$.

Dann ist

$$u = tu' \quad , \quad v = tv' \quad ,$$

$$b = t^2 2u'v' \quad , \quad a = t^2(u'^2 - v'^2) \quad , \quad c = t^2(u'^2 + v'^2) \quad ,$$

$t^2 > 1$ und $t^2 \mid a, b, c$, im Widerspruch zur Primitivität von $(a \;\; b \;\; c)$.

Es muss also $(u;v) = 1$ **sein** .

Tabellierung von primitiven Pythagoreischen Zahlentripeln

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Die wichtigste Frage ist nun :
Erhält man über diese Konstruktion alle primitiven Pythagoreischen Zahlentripel ?

Falls zu einem gegebenen **primitiven Pythagoreischen Zahlentripel** $(a \;\; b \;\; c)$ solche u, v existieren mit

$$a = u^2 - v^2 \quad , \quad b = 2uv \quad , \quad c = u^2 + v^2$$

kann man diese berechnen :

$$u^2 = \frac{c+a}{2} \quad , \quad v^2 = \frac{c-a}{2}$$

Es folgt weiter :

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

Da a , c ungerade sind , gilt dies auch für $c+a$, $c-a$, und es folgt :

$$\frac{b^2}{4} = \frac{c+a}{2}\,\frac{c-a}{2}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c+a}{2}\,\frac{c-a}{2}$$

Wenn man jetzt zeigen kann, dass $\left(\frac{c+a}{2} \; ; \; \frac{c-a}{2}\right) = 1$ ist, müssen wegen der letzten Gleichung beide Faktoren Quadrate sein , etwa

$$\frac{c+a}{2} = u^2 \quad , \quad \frac{c-a}{2} = v^2 \quad .$$

Dann würde folgen :

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = u^2 v^2$$

$$\frac{b}{2} = uv$$

$$b = 2uv$$

Wir zeigen nun :

$$\left(\frac{c+a}{2} \; ; \; \frac{c-a}{2}\right) = 1 \quad .$$

Angenommen, es wäre $\left(\frac{c+a}{2} \; ; \; \frac{c-a}{2}\right) = t > 1 \quad .$

Dann würde folgen :

$$t \mid c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} \quad \text{und} \quad t \mid a = \frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2} \quad .$$

Wegen $c = tc'$, $a = ta'$ folgt :

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = t^2 c'^2 - t^2 a'^2$$
$$b^2 = t^2\left(c'^2 - a'^2\right)$$

Die Primzahlzerlegung von b^2 sagt nun, dass nur gerade Exponenten vorkommen.

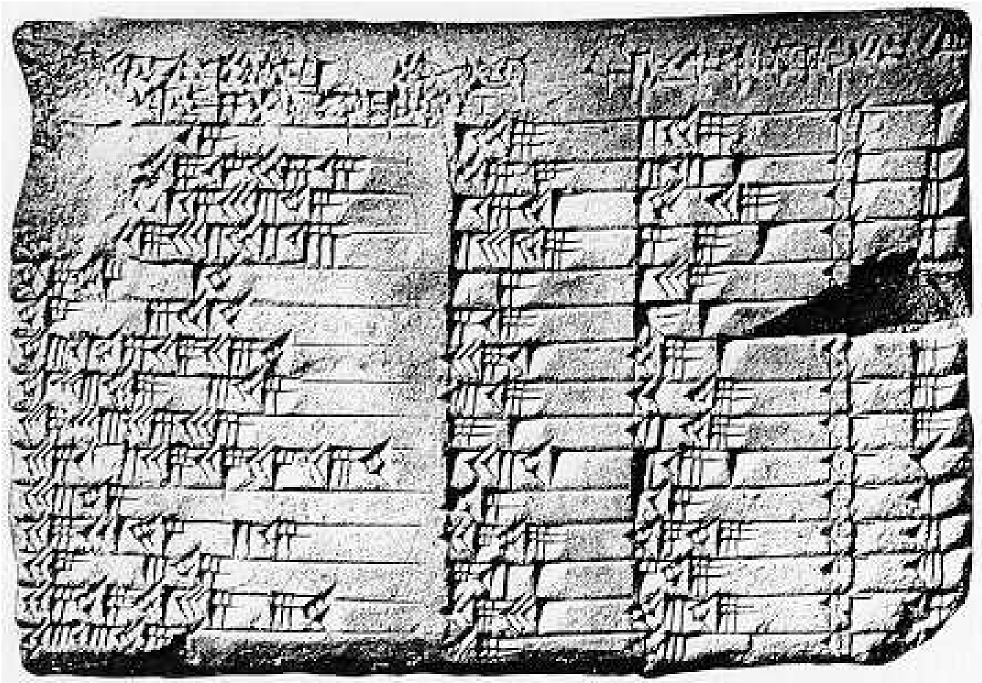
Deshalb folgt :

$$b^2 = t^2 b'^2 \quad \text{mit} \quad b'^2 = c'^2 - a'^2 \quad \text{und}$$

$$b = tb' \quad .$$

Die Zahl $t > 1$ ist also Teiler von von a , b , c im Widerspruch zu $(a;b;c) = 1$.

Pythagoreische Zahlentripel in Babylon
Die Keilschrifttafel „Plimpton 322“



12,7 x 8,8 cm

Die Keilschrifttafel mit der Katalog-Nummer 322 der **Plimpton Sammlung der Columbia Universität** stammt aus altbabylonischer Zeit -1900 bis -1600.

Die (im Sexagesimalsystem dargestellten) Zahlen der 2. und 3. Spalte von links sind ganzzahlige Werte für die Breite b und Diagonale d eines Rechtecks.

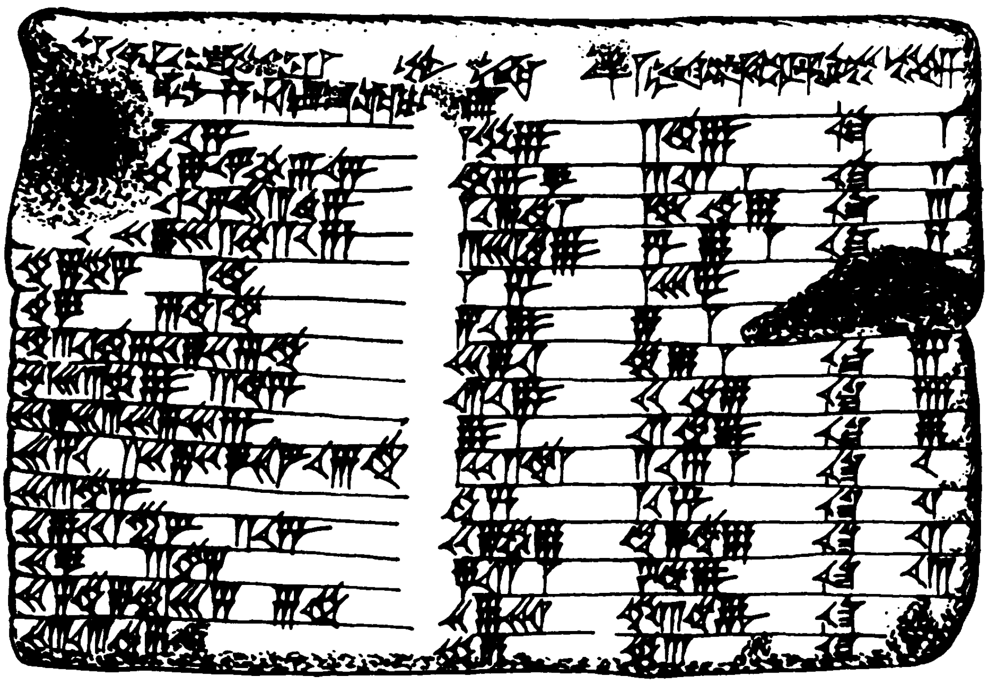
Errechnet man daraus die Höhe h , so erhält man ebenfalls gazzahlige Werte.
Es handelt sich hierbei um die bekannten **Pythagoreischen Zahlentripel**.

In der linken Spalte sind die Verhältniszahlen $\frac{d^2}{h^2}$ dargestellt.

Die rechte Spalte ist die **Numerierung** der 15 Zeilen.

Es dürfte sich um das Reststück einer ursprünglich größeren Tafel handeln.

Pythagoreische Zahlentripel in Babylon
Die Keilschrifttafel „Plimpton 322“



12,7 x 8,8 cm

Die Keilschrifttafel mit der Katalog-Nummer 322 der **Plimpton Sammlung der Columbia Universität** stammt aus altbabylonischer Zeit -1900 bis -1600.

Die (im Sexagesimalsystem dargestellten) Zahlen der 2. und 3. Spalte von links sind ganzzahlige Werte für die Breite b und Diagonale d eines Rechtecks.

Errechnet man daraus die Höhe h , so erhält man ebenfalls gazzahlige Werte.
Es handelt sich hierbei um die bekannten **Pythagoreischen Zahlentripel**.

In der linken Spalte sind die Verhältniszahlen $\frac{d^2}{h^2}$ dargestellt.

Die rechte Spalte ist die **Numerierung** der 15 Zeilen.

Es dürfte sich um das Reststück einer ursprünglich größeren Tafel handeln.

Babylonische Keilschrift-Zahlzeichen / Sexagesimales Positionssystem

1	𒁹	10	𒌋
2	𒈫	20	𒎙
3	𒐈	30	𒌍
4	𒐉	40	𒐏
5	𒐊	50	𒐐
6	𒐋		
7	𒐌		
8	𒐍		
9	𒐎	59	𒐐𒐎

Transkription / Ergänzung / Korrektur / (ursprünglicher Wert)
(Sexagesimalsystem)

(d/h)²	b	d	
1:59:0:15	1:59	2:49	1
1:56:56:58:14:50:6:15	56:7	1:20:25 (3:12:1)	2
1:55:7:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
1:53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:9:1	4
1:48:54: 1:40	1:5	1:37	5
1:47:6:41:40	5:19	8:1	6
1:43:11:56:28:26:40	38:11	59:1	7
1:41:33:45:14:3:45 (59)	13:19	20:49	8
1:38:33:36:36	8:1 (9:1)	12:49	9
1:35:10:2:28:27:24:16:40	1:22:41	2:16:1	10
1:33:45	3/4 (45)	5/4 (1:15)	11
1:29:21:54:2:15	27:59	48:49	12
1:27:3:45	2:4:1 (7:12:1)	4:49	13
1:25:38:51:35:6:40	29:31	53:49	14
1:23:13:46:	28 (56)	53	15

Transkription / Ergänzung / Korrektur / (ursprünglicher Wert)
((d/h)²=Sexagesimal h, b, d = Dezimal)

(d/h)²	$h=d^2-b^2$	b	d	
1:59:0:15	120	119	169	1
1:56:56:58:14:50:6:15	3456	3367	4825 (193)	2
1:55:7:41:15:33:45	4800	4601	6649	3
1:53:10:29:32:52:16	13500	12709	18541	4
1:48:54: 1:40	72	65	97	5
1:47:6:41:40	360	319	481	6
1:43:11:56:28:26:40	2700	2291	3541	7
1:41:33:45:14:3:45 (59)	960	799	1249	8
1:38:33:36:36	600	481 (541)	769	9
1:35:10:2:28:27:24:16:40	6480	4961	8161	10
1:33:45	1	3/4 (45)	5/4 (75)	11
1:29:21:54:2:15	2400	1679	2929	12
1:27:3:45	240	161 (161^2)	289	13
1:25:38:51:35:6:40	2700	1771	3229	14
1:23:13:46:	45	28 (53)	53	15

Berechnung des sexagesimalen Wertes in der 1. Spalte in Zeile 7 :

$3541^2/2700^2=$**1**,719983676
0,719983676·60=**43**,19902058
0,19902058·60=**11**,94123457
0,94123457·60=**56**,47407432
0.47407432·60=**28**,4444592
0,4444592·60=**26**,667552-
0,667552·60=**40**,05312 = ? (Rundungsfehler)

Die ganzzahligen Anteile sind die Ziffern im Sexagesimalsystem: **1:43:11:56:28:26:40**

Transkription / Ergänzung / Korrektur / (ursprünglicher Wert)
((d/h)²=Sexagesimal b, d = Dezimal)

(d/h)²	h=2uv	$h=d^2 - b^2$	b	d	
1:59:0:15	2·12·5	120	119	169	1
1:56:56:58:14:50:6:15	2·64·27	3456	3367	4825 (193)	2
1:55:7:41:15:33:45	2·75·32	4800	4601	6649	3
1:53:10:29:32:52:16	2·125·54	13500	12709	18541	4
1:48:54: 1:40	2·9·4	72	65	97	5
1:47:6:41:40	2·20·9	360	319	481	6
1:43:11:56:28:26:40	2·54·25	2700	2291	3541	7
1:41:33:45:14:3:45 (59)	2·32·15	960	799	1249	8
1:38:33:36:36	2·25·12	600	481 (541)	769	9
1:35:10:2:28:27:24:16:40	2·81·40	6480	4961	8161	10
1:33:45		1	3/4 (45)	5/4 (75)	11
1:29:21:54:2:15	2·48·25	2400	1679	2929	12
1:27:3:45	2·15·8	240	161 (161²)	289	13
1:25:38:51:35:6:40	2·50·27	2700	1771	3229	14
1:23:13:46:	2·7·2	45	28 (53)	53	15

Die Tripel h, b, d sind **Pythagoreische Zahlentripel** (PZT), es gilt also
$h^2 + b^2 = d^2$.

Man erhält sämtliche (primitiven) PZT nach der Formel
$h=2uv$, $b=u^2-v^2$, $d=u^2+v^2$,
wobei u>v und u,v teilerfremde nicht zugleich ungerade Zahlen sind.

Die Werte in der Tabelle für u und v enthalten nur die Primteiler 2,3,5, wodurch h ebenfalls nur diese Primteiler enthält und die Brüche d/h und (d/h)² endlich werden.

Würde man für u, v alle Werte ≤ 125 wählen, so dass u, v jeweils nur die Primteiler 2,3,5 enthalten, gäbe es genau 16 Möglichkeiten.

15 davon sind in der Tabelle enthalten.

Die 16. Möglichkeit ist:

1:33:45	2·2·14	4	3	5	11

Die Korrektur von Zeile 11 würde folgendes ergeben:

1:31:9:9:25:42:2:15	2·125·64	16000	11529	19721	11