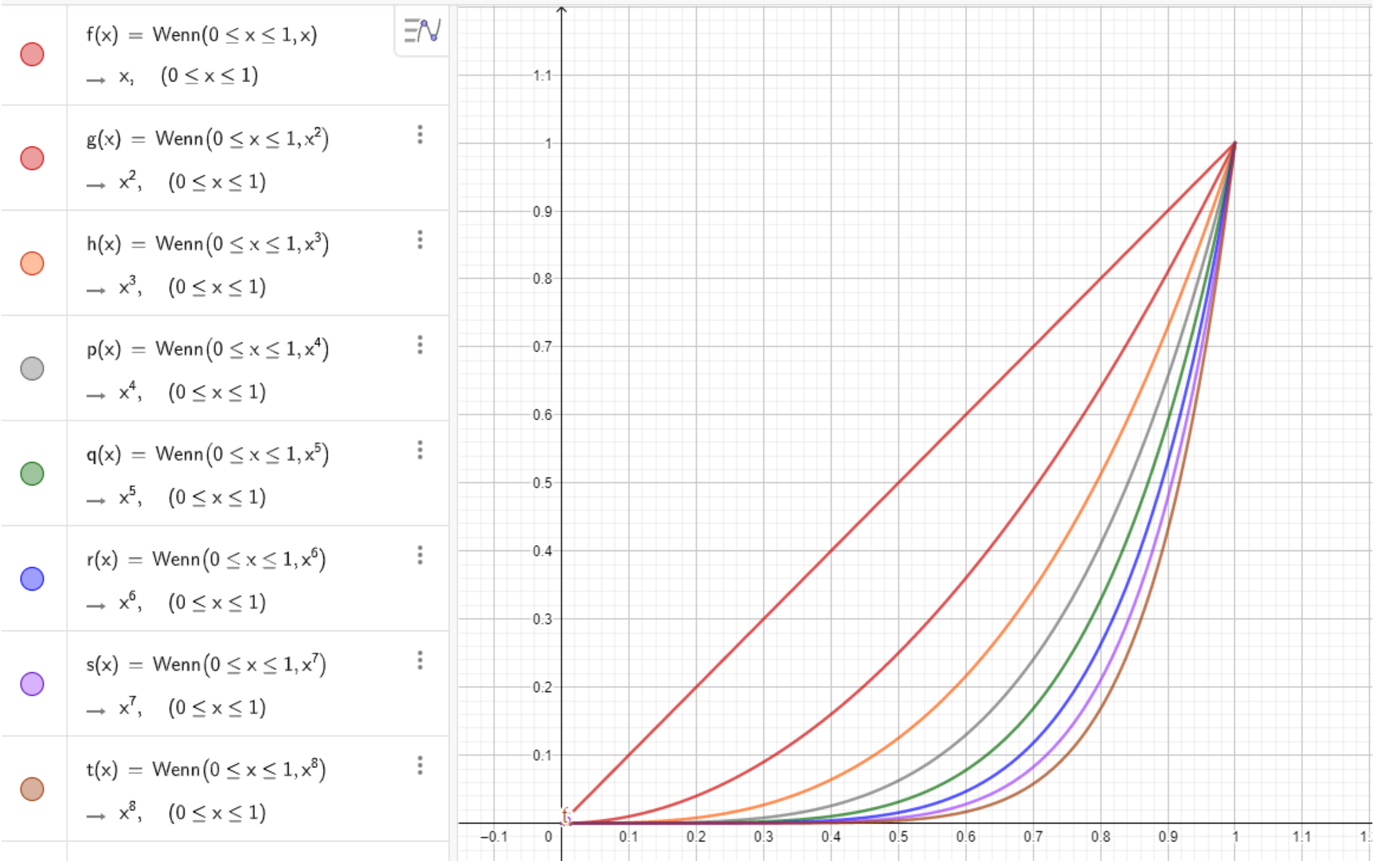
# Grenzkurven

Arno Fehringer

März 2022

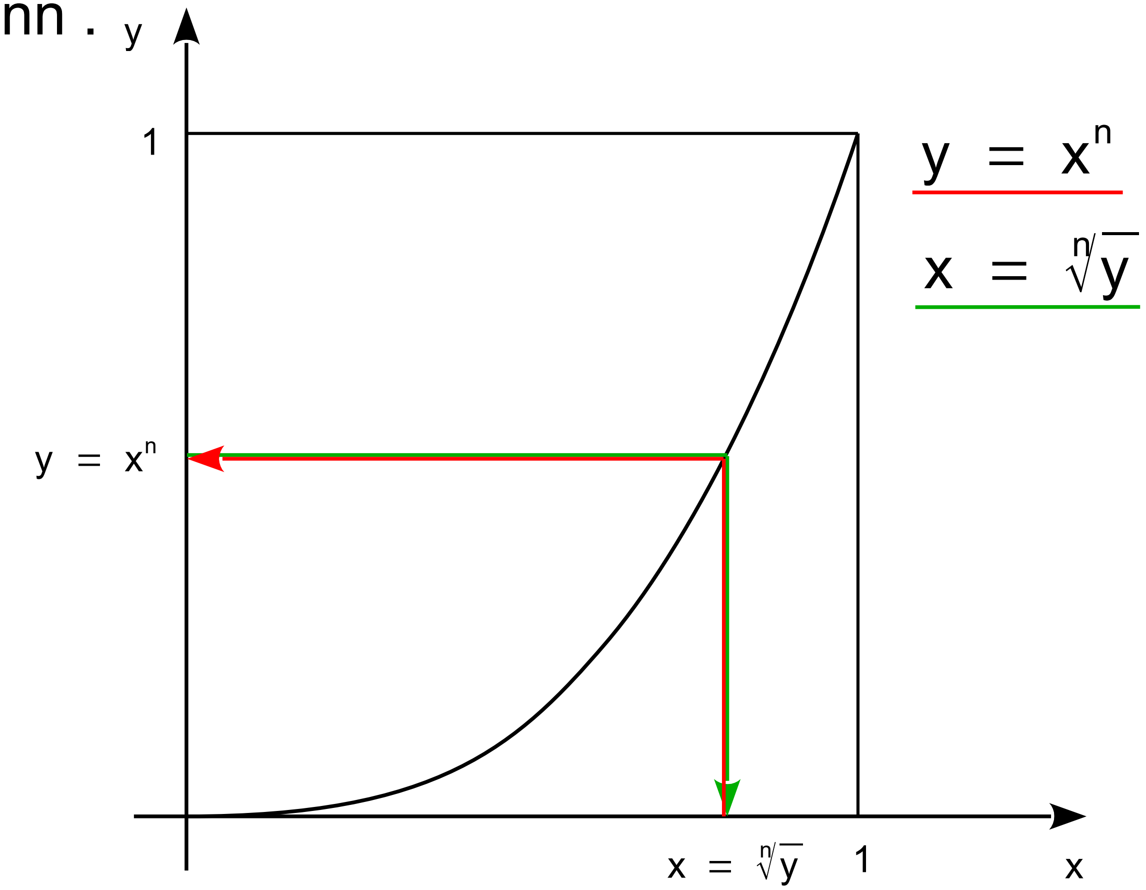
Gegeben sei die Funktionenfolge $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0;1]$ mit $y = f_n(x) = x^n$ . Die Graphen bilden die Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .




Wie findet man die Grenzkurve $K$ von $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

## Vorüberlegungen

**(0)** Die Funktionen der Funktionenfolge $y = x^n$ , $n \in \mathbb{N}$ sind umkehrbar, so dass man auch die Folge der Umkehrfunktionen $x = \sqrt[n]{y}$ , $n \in \mathbb{N}$ betrachten kann .



**(1)** Für $x \in (0;1)$ gilt : Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{n+1} < x^n$ .

Das heißt, die Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **streng monoton fallend** .

Der Grenzwert ist : $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$

**Beweis:**

$$x < 1 \quad | \cdot x$$

$$x^2 < x \quad | \cdot x$$

$$x^3 < x^2 \quad | \cdot x$$

$$x^4 < x^3 \quad | \cdot x$$

usw.

$$x^{n+1} < x^n$$

$0<x<1$ , $\frac{1}{x}>1$ , etwa $\frac{1}{x}=1+q$

$$\frac{1}{x^n}=(1+q)^n \geq 1+nq$$

$$x^n \leq \frac{1}{1+nq}$$

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

**(2)** Für $y \in (0;1)$ gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{y} < \sqrt[n+1]{y}$ und $\sqrt[n]{y} < 1$ .
Das heißt, die Folge $\left(\sqrt[n]{y}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **streng monoton wachsend** und beschränkt . Der Grenzwert ist : $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{y} = 1$

**Beweis:**

$$\sqrt[n]{y} < \sqrt[n+1]{y}$$

$$y^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n+1}} \qquad | \quad ^{\wedge}n(n+1)$$

$$y^{n+1} < y^{n} \qquad \text{wahre Aussage nach } \mathbf{(1)}$$

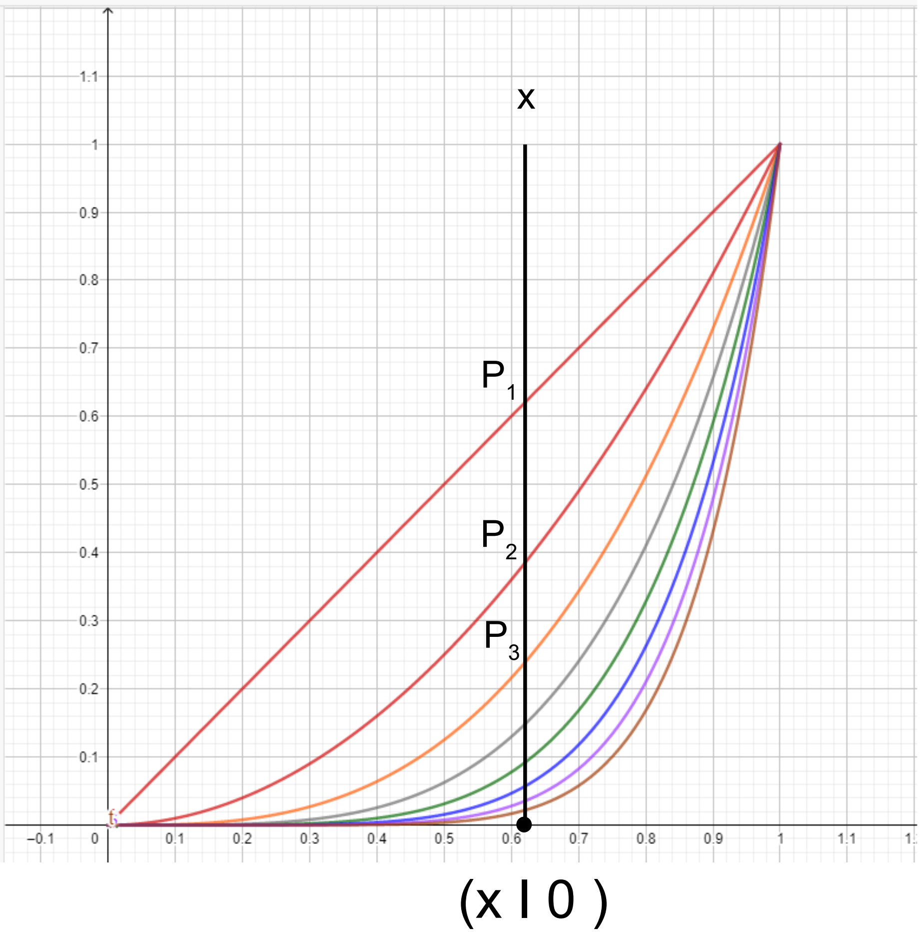
Angenommen, $l = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{y} < 1$ . Dann gäbe es ein $\epsilon > 0$ und ein $n_0$ mit $l - \epsilon < \sqrt[n]{y} < l + \epsilon < 1$ für alle $n > n_0$ .

$$\left(l-\epsilon\right)^n \;<\; y \;<\; \left(l+\epsilon\right)^n \quad \text{für alle} \quad n>n_0 \quad .$$

Wegen $l \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \left(l-\epsilon\right)^n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \left(l+\epsilon\right)^n \;=\; 0$ wäre $y=0$ im Widerspruch zur Voraussetzung .

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} \;=\; 1$ .

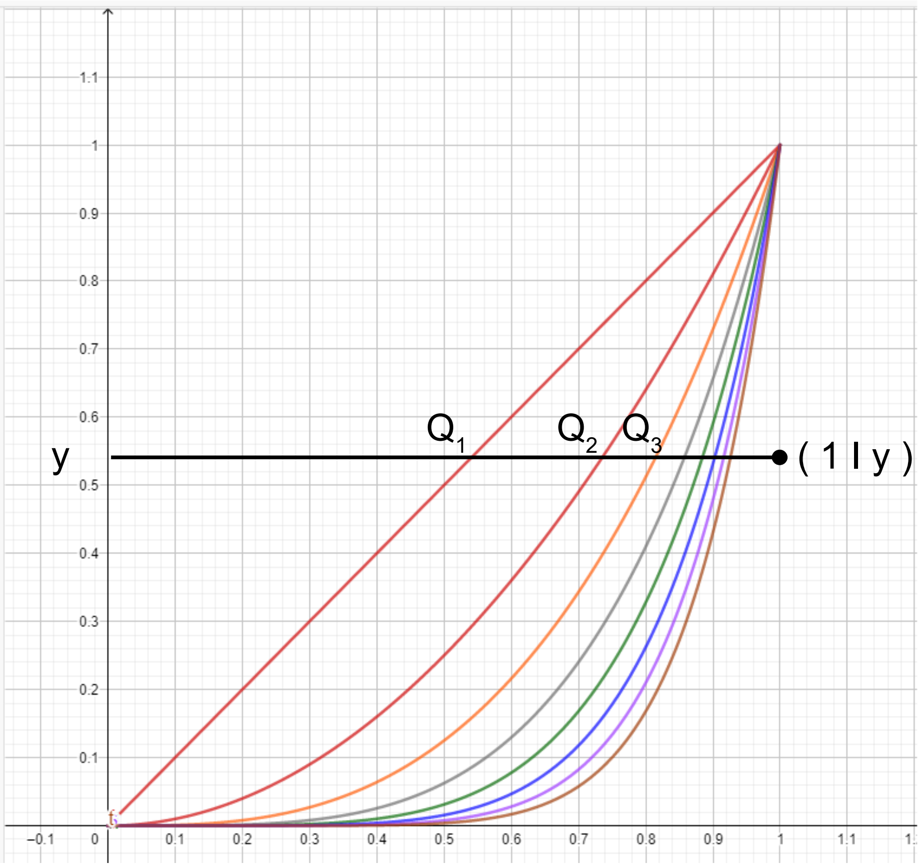
Für die senkrechte Gerade $x$ mit $0 \leq x < 1$ betrachten wir die Schnittpunkte $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .




$$\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(x \mid y^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(x \mid y^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(x \mid 0\right)$$

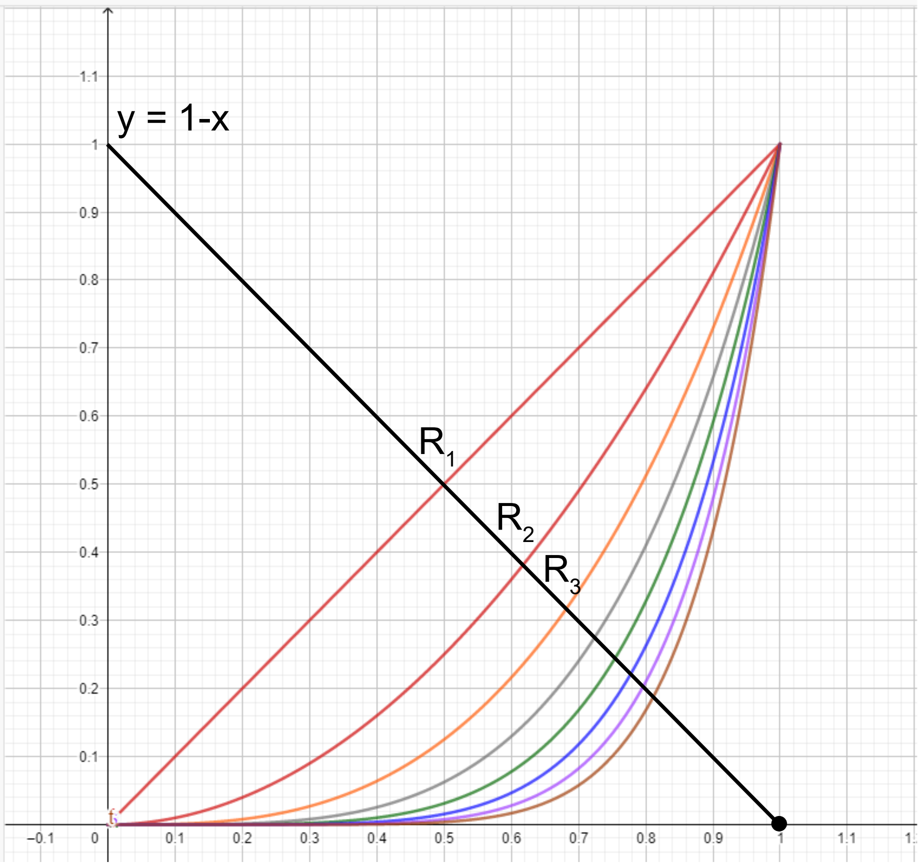
Für die waagrechte Gerade $y$ mit $0<y\leq 1$ betrachten wir die Schnittpunkte $\left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ : $x = \sqrt[n]{y}$ .




$$\left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\sqrt[n]{y} \mid y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sqrt[n]{y} \mid y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 \mid y\right)$$

Für die schräge Gerade $y = 1 - x$ betrachten wir die Schnittpunkte $\left(R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ .




$$y = 1 - x \qquad y = x^n$$

$$1 - x = x^n$$

$$1 = x + x^n$$

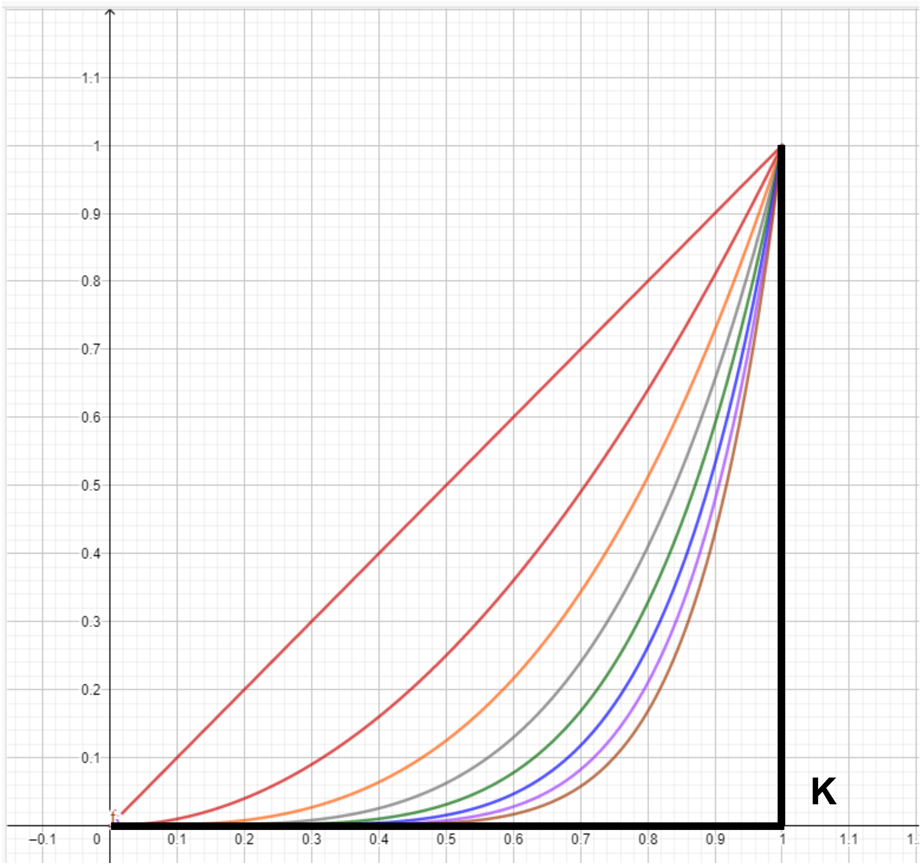
$$1 = x\left(1 + x^{n-1}\right)$$

$$x = \frac{1}{1 + x^{n-1}} \qquad y = 1 - \frac{1}{1 + x^{n-1}}$$

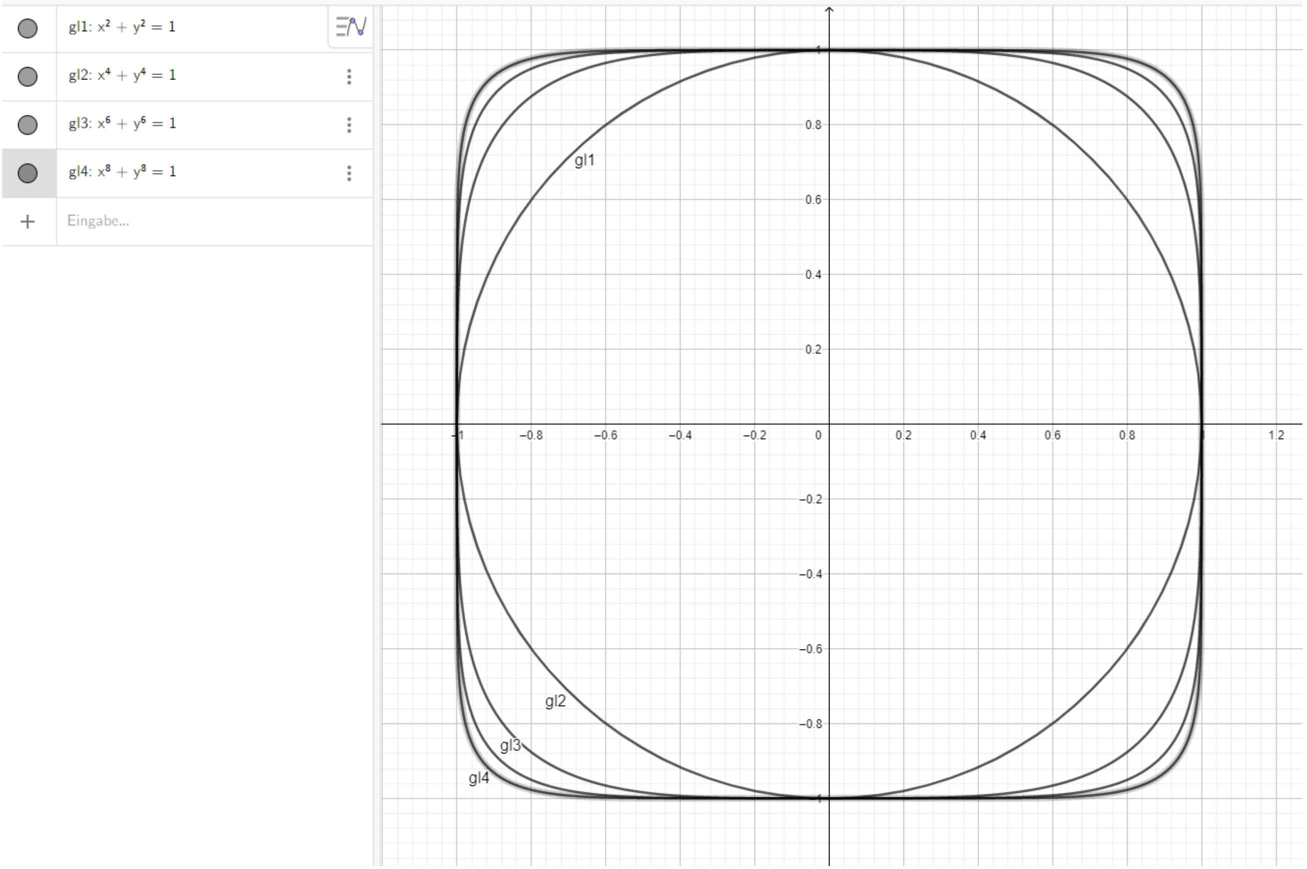
$$\left(R_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{1+x^{n-1}} \;\middle|\; 1 - \frac{1}{1+x^{n-1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(R_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 \mid 0\right)$$

Damit ist nun gezeigt, dass die Grenzkurve $K$ aus allen Punkten der Menge
$K = \{(x|0) \mid 0 \le x < 1\} \cup \{(1|y) \mid 0 < y \le 1\} \cup (1|0)$ besteht :

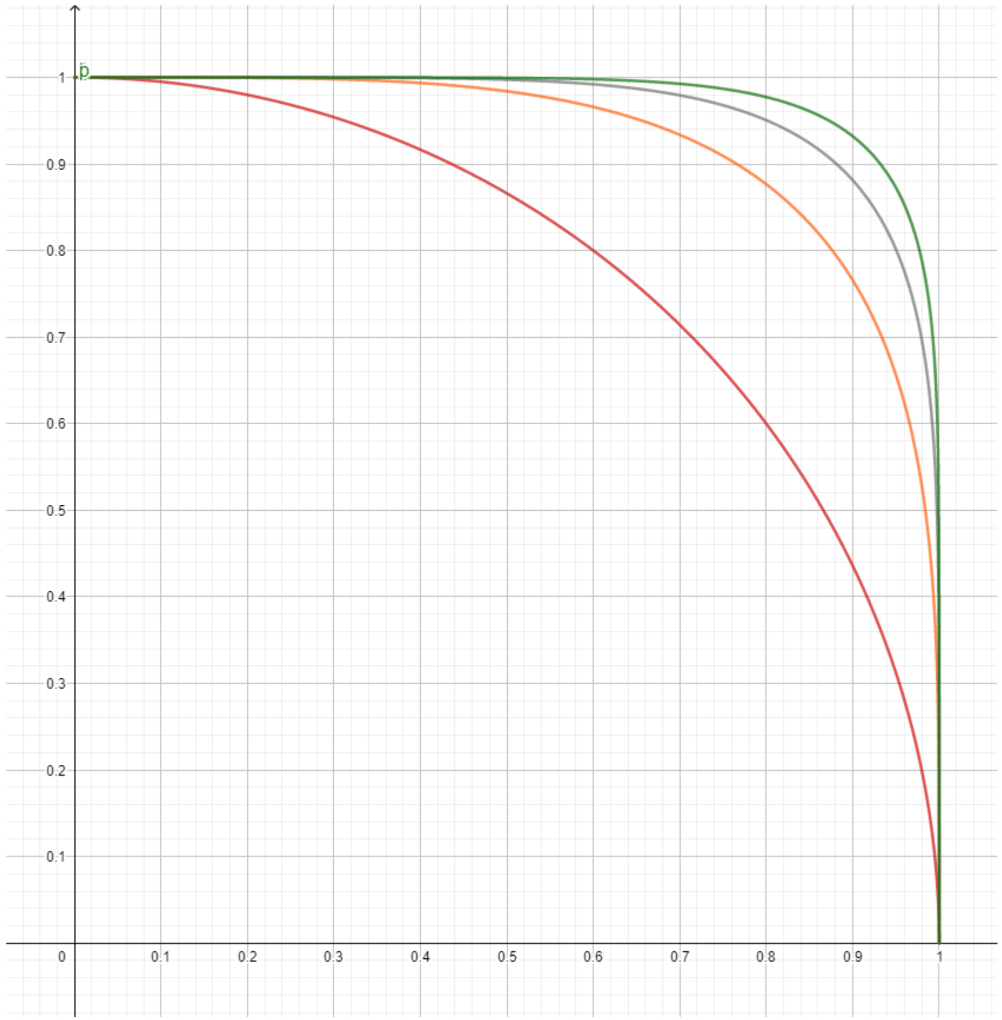


Gegeben sei die Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N},\,\text{gerade}}$ mit $x^n + y^n = 1^n$.




Wie findet man die Grenzkurve $K$ von $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N},\,\text{gerade}}$ ?

Reduktion des Problems auf die geviertelte Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N},\,\text{gerade}}$ mit $x^n + y^n = 1^n \quad , \quad x, y \in [0;1]$ :

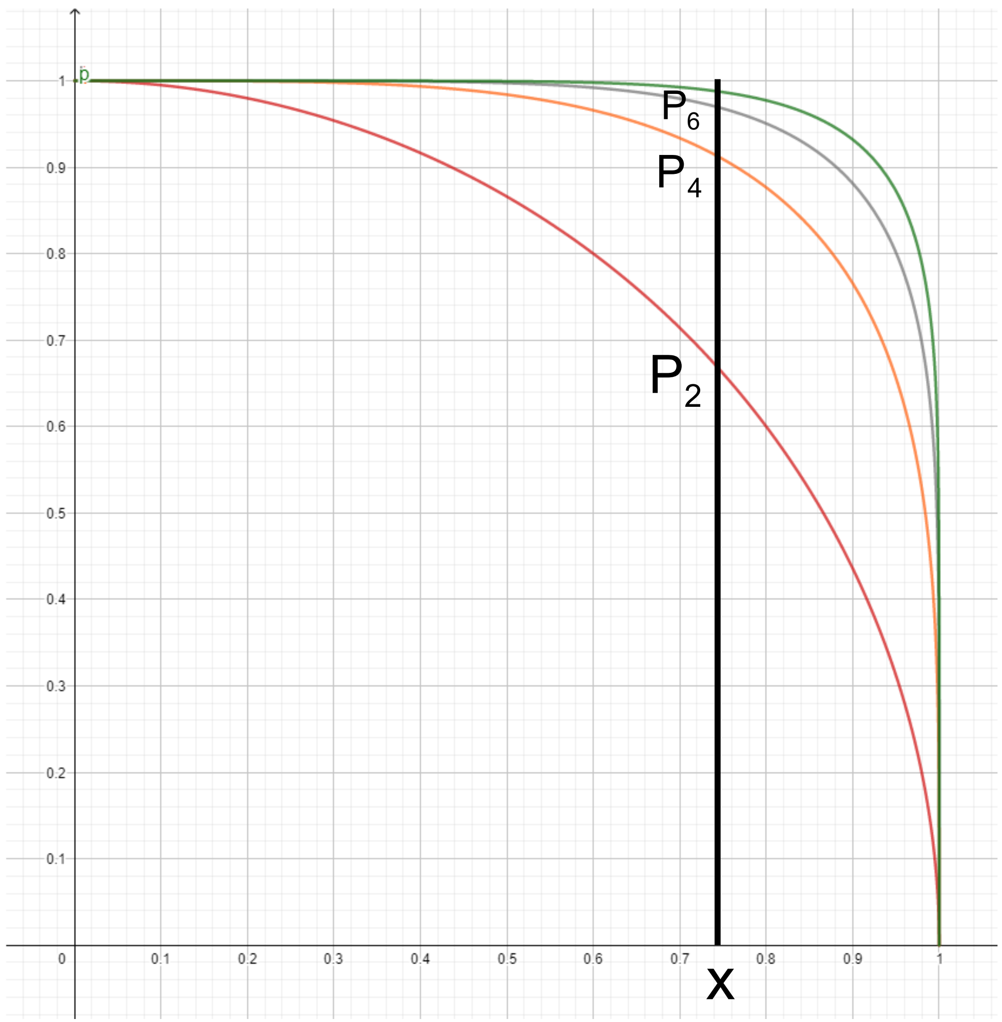



$$x^n + y^n = 1^n$$

$$y = \sqrt[n]{1 - x^n}$$

$$x = \sqrt[n]{1 - y^n}$$

Für die senkrechte Gerade $x$ , $x \in (0;1)$ betrachten wir die Schnittpunkte mit der Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n \in \mathbb{N},\, \text{gerade}}$ , $x^n + y^n = 1^n$ , $x, y \in [0;1]$ :




$$\left(P_n\right)_{n \in \mathbb{N}\, \text{gerade}} = \left(\left(x \mid y_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}\, \text{gerade}}$$

$$\left(P_n\right)_{n \in \mathbb{N}\, \text{gerade}} = \left(\left(x \mid \sqrt[n]{1-x^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}\, \text{gerade}}$$

Wegen $\sqrt[n]{1-x} \le \sqrt[n]{1-x^n} = y_n < 1$ und $\lim\limits_{n \text{ gerade} \to \infty} \sqrt[n]{1-x} = 1$

ist auch $\lim\limits_{n \text{ gerade} \to \infty} y_n = 1$

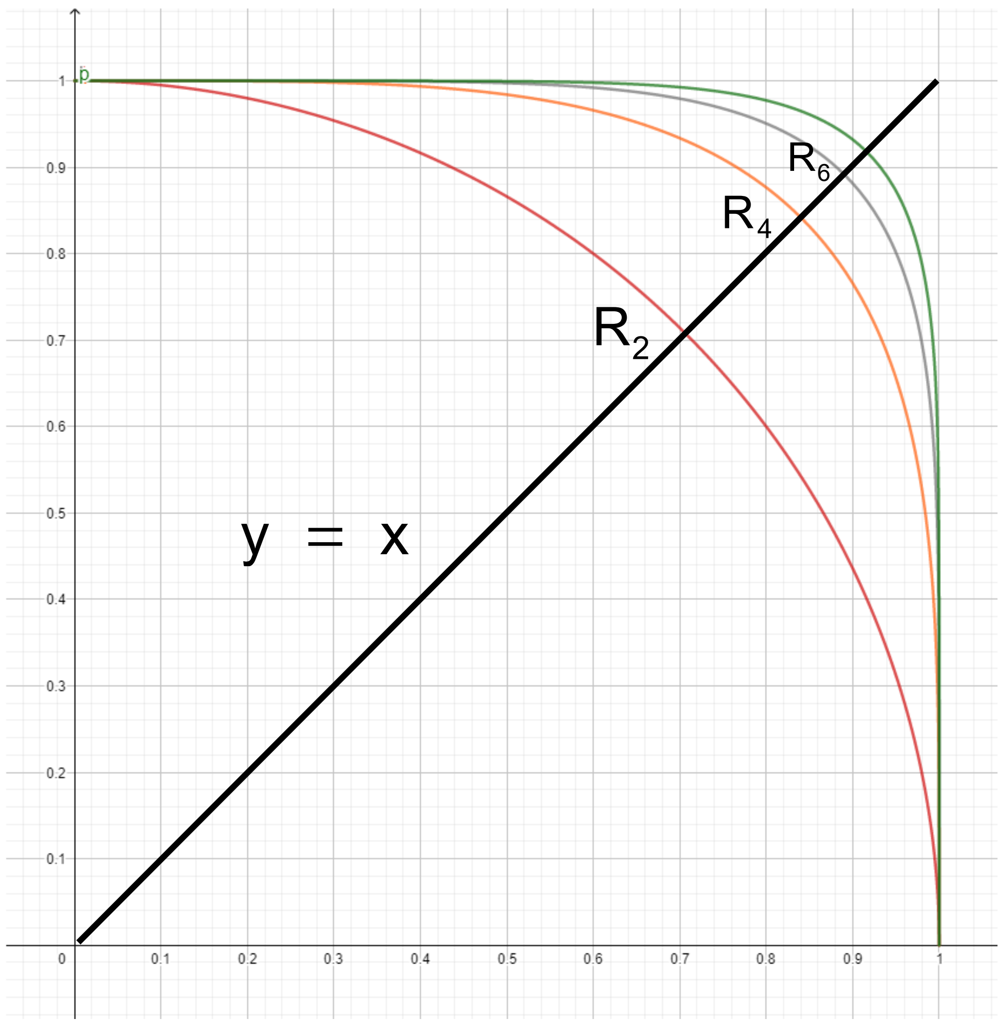
und damit $\lim\limits_{n \text{ gerade} \to \infty} P_n\left(x \mid y_n\right) = \left(x \mid 1\right)$ .

Aus Symmetriegründen kann man für die waagrechte Gerade $y$ , $y \in (0;1)$ die Folge der Schnittpunkte $\left(Q_n\right)_{n \in \mathbb{N} \text{ gerade}} = \left(\left(x_n \mid y\right)\right)_{n \in \mathbb{N} \text{ gerade}}$ betrachten :

$$\left(Q_n\right)_{n \in \mathbb{N} \text{ gerade}} = \left(\left(\sqrt[n]{1-y^n} \mid y\right)\right)_{n \in \mathbb{N} \text{ gerade}}$$

$$\lim_{n \text{ gerade} \to \infty} Q_n = \left(1 \mid y\right)$$

Für die schräge Gerade $y = x$ , $x \in (0;1)$ betrachten wir die Schnittpunkte mit der Kurvenschar $(K_n)_{n\in\mathbb{N},\,\text{gerade}}$ , $x^n + y^n = 1^n$ , $x,y \in [0;1]$ :




$$y = x \qquad x^n + y^n = 1$$

$$x^n + x^n = 1$$

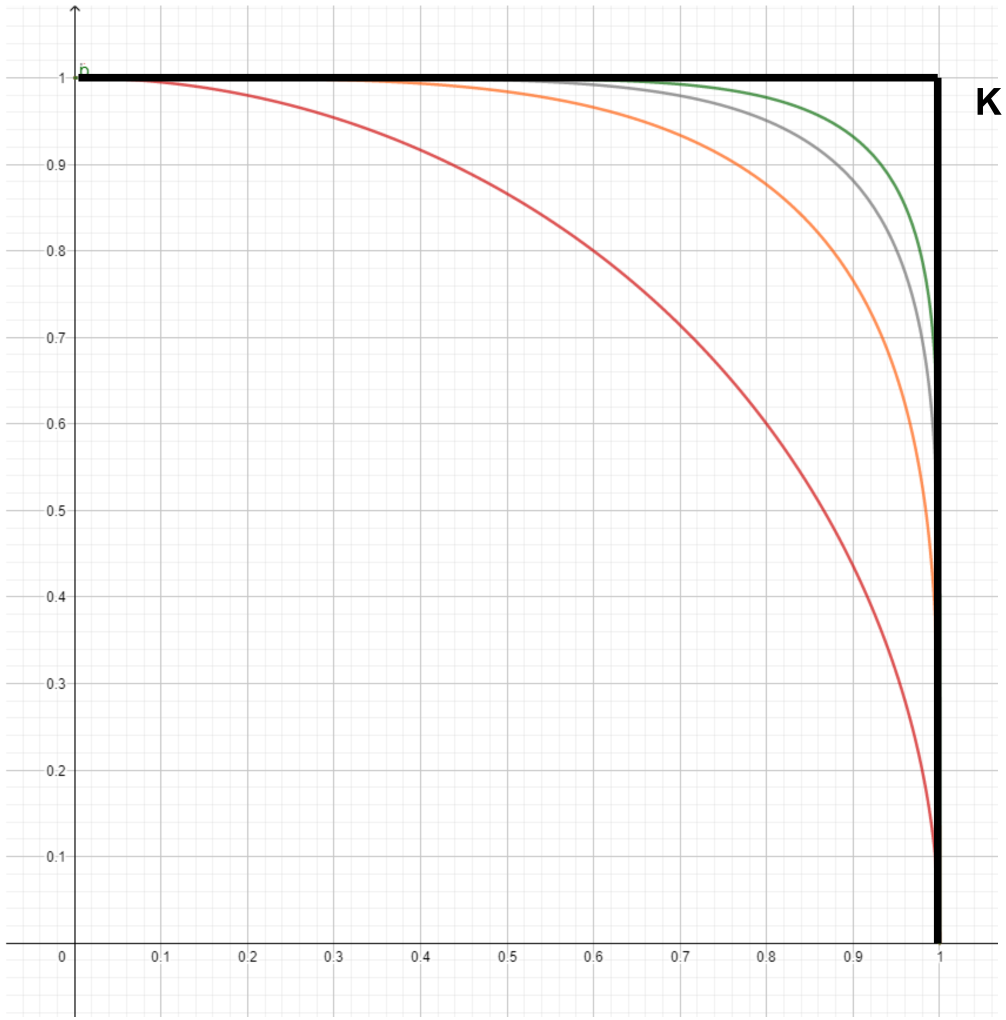
$$2x^n = 1$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$$(R_n)_{n\in\mathbb{N}\,\text{gerade}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \;\middle|\; \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\lim_{n\,\text{gerade}\to\infty} R_n = (1 \mid 1)$$

Damit ist nun gezeigt, dass die Grenzkurve $K$ aus allen Punkten der Menge
$K = \{(x|1) \mid 0 \le x < 1\} \cup \{(1|y) \mid 0 \le y < 1\} \cup (1|1)$ besteht :



Die Grenzkurve der Kurvenschar $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N},\,\text{gerade}}$ mit $x^n + y^n = 1^n$ ist also das Quadrat mit Mittelpunkt im Ursprung und Kantenlänge 2 !