Geraden, Kreise und Ellipsen

Arno Fehringer

April 2022

Voraussetzungen :
Satz des Pythagoras, Strahlensätze, quadratische Gleichungen

Quellen :
https://de.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

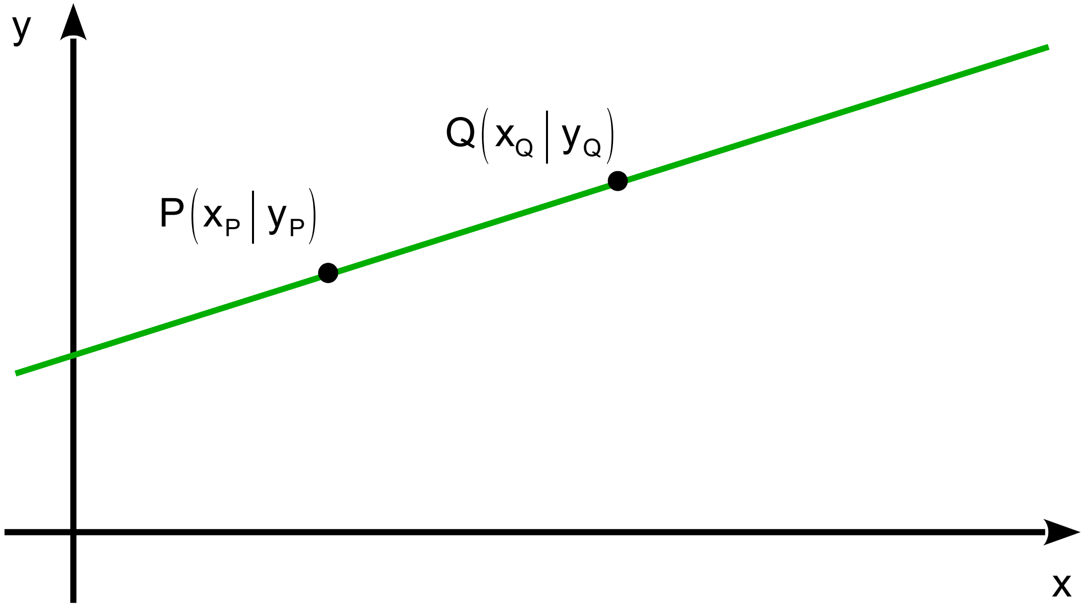
https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/gaertnerkonstruktion/3348

Die Beschreibung geometrischer Objekte mit Hilfe von Gleichungen geht auf den französischen Mathematiker und Philosophen **René Descartes (1596 - 1650)** zurück .

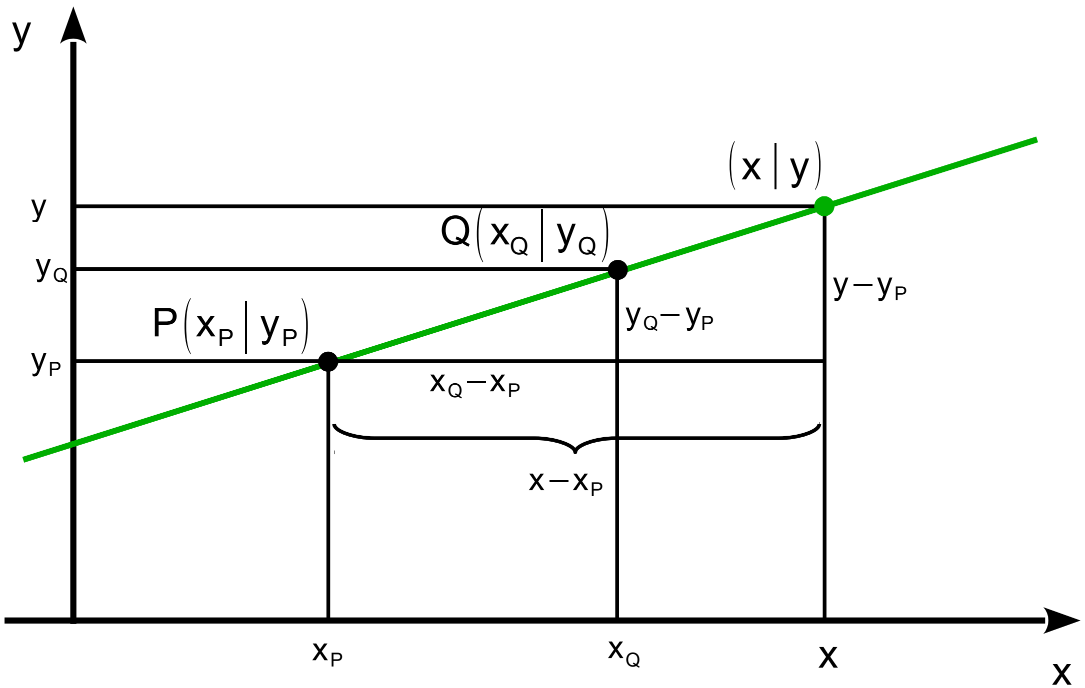
Portrait von René Descartes von 1648
Frans Hals, holländischer Maler, 1582 - 1566

Gleichung einer Geraden

Gegeben seien die Punkte $P\left(x_P \mid y_P\right)$, $Q\left(x_Q \mid y_Q\right)$ in der Ebene .
Gesucht ist die Gleichung der Geraden $g = PQ$ durch die beiden Punkte !



Herleitung der Gleichung der Geraden durch die Punkte $P\left(x_P \mid y_P\right)$, $Q\left(x_Q \mid y_Q\right)$ für $x_P \neq x_Q$:



Nach dem **2. Strahlensatz** gilt :
$$\frac{y-y_p}{x-x_p} = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$$

Die Umformung liefert :

$$\frac{y-y_p}{x-x_p} = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$$

$$y-y_p = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}\left(x-x_p\right)$$

$$y = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}\left(x-x_P\right) + y_P$$

$$y = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}x - \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}x_P + y_P$$

Setze : Steigung $m := \dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$, y-Achsenabschnitt $c := -\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}x_P + y_P$

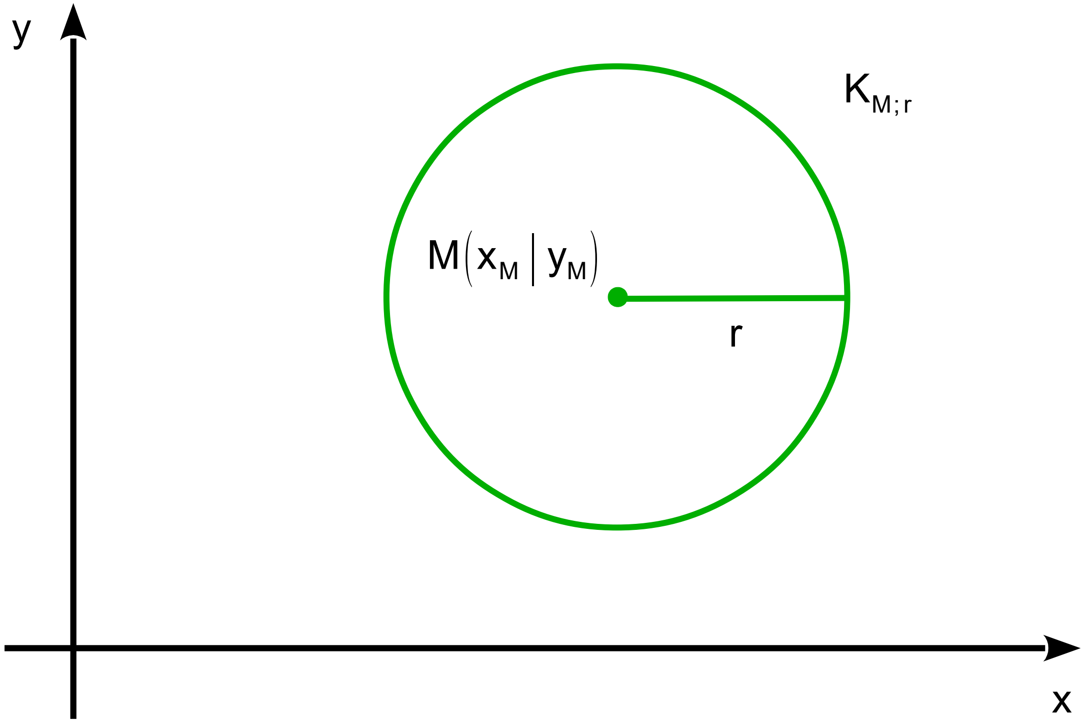
$$\boxed{y = mx + c}$$

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P\left(x_P \mid y_P\right)$, $Q\left(x_Q \mid y_Q\right)$ für $x_P = x_Q$ ist die **senkrechte Gerade** mit der Gleichung :

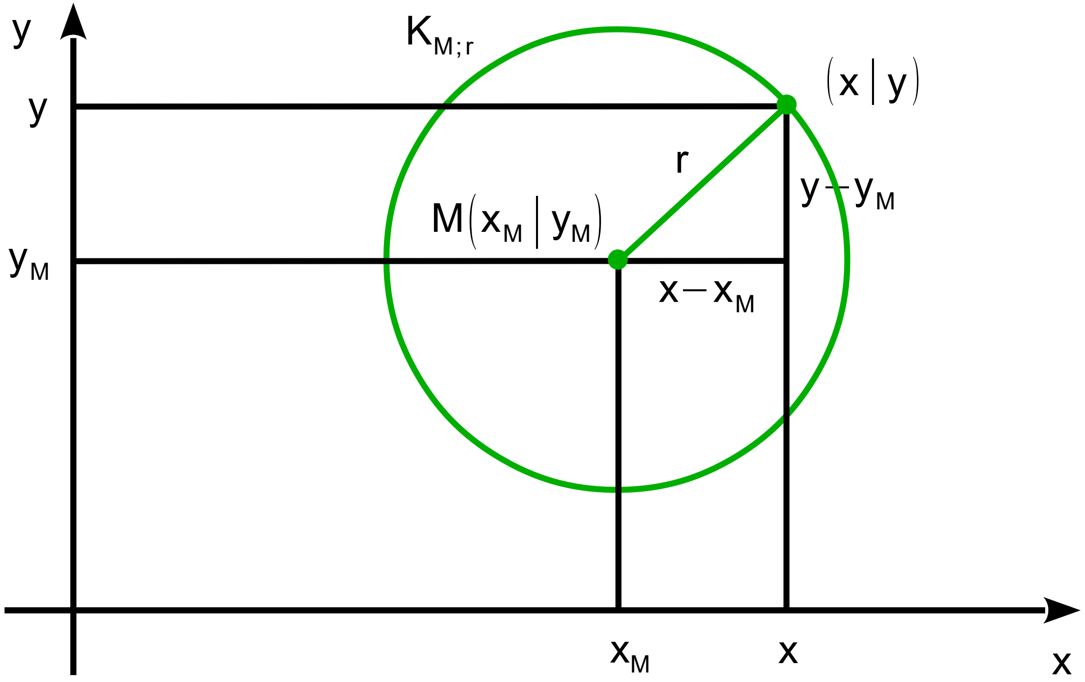
$$\boxed{x = x_P}$$

Gleichung eines Kreises

Gegeben seien der Punkt $M\left(x_M \mid y_M\right)$ in der Ebene und $r > 0$.
Gesucht ist die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r !



Herleitung der Kreisgleichung



Nach dem **Satz des Pythagoras (~ 500 v. Chr.)** gilt :

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2}$$

Schnittpunkte von Gerade und Kreis

Gegeben seien die Gerade g und der Kreis $K_{M;r}$, $M\left(x_M \mid y_M\right)$, $r > 0$:

$$g \quad : \quad y = mx + c$$

$$K_{M;r} \quad : \quad \left(x - x_M\right)^2 + \left(y - y_M\right)^2 = r^2$$

$$\left(x - x_M\right)^2 + \left(mx + c - y_M\right)^2 = r^2$$

$$\left(x - x_M\right)^2 + \left(mx + c - y_M\right)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x_M x + x_M{}^2 + m^2 x^2 + 2m\left(c - y_M\right)x + \left(c - y_M\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2 x^2 - 2x_M x + 2m\left(c - y_M\right)x + x_M{}^2 + \left(c - y_M\right)^2 = r^2$$

$$\left(1 + m^2\right)x^2 - 2\left(x_M - m\left(c - y_M\right)\right)x + x_M{}^2 + \left(c - y_M\right)^2 - r^2 = 0$$

$$\left(1+m^2\right)x^2 \;-\; 2\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right)x \;+\; {x_M}^2+\left(c-y_M\right)^2-r^2 \;=\; 0$$

Für diese quadratische Gleichung in x gibt es die Lösungsformel :

$$x_{1/2} = \frac{2\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right) \pm \sqrt{4\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right)^2-4\left(1+m^2\right)\left({x_M}^2+\left(c-y_M\right)^2-r^2\right)}}{2\left(1+m^2\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{2\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right) \pm 2\sqrt{\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right)^2-\left(1+m^2\right)\left({x_M}^2+\left(c-y_M\right)^2-r^2\right)}}{2\left(1+m^2\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right) \pm \sqrt{\left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right)^2-\left(1+m^2\right)\left({x_M}^2+\left(c-y_M\right)^2-r^2\right)}}{1+m^2}$$

Der Radikant ist $\quad R = \left(x_M-m\left(c-y_M\right)\right)^2-\left(1+m^2\right)\left({x_M}^2+\left(c-y_M\right)^2-r^2\right)$

Den Radikanden kann man noch vereinfachen :

$$R \;=\; \left(x_M - m\left(c - y_M\right)\right)^2 - \left(1 + m^2\right)\left(x_M{}^2 + \left(c - y_M\right)^2 - r^2\right)$$

$$R \;=\; x_M^2 - 2\,m\,x_M\left(c - y_M\right) + m^2\left(c - y_M\right)^2 - \left(x_M{}^2 + \left(c - y_M\right)^2 - r^2\right) - m^2\left(x_M{}^2 + \left(c - y_M\right)^2 - r^2\right)$$

$$R \;=\; x_M^2 - 2\,m\,x_M\left(c - y_M\right) + m^2\left(c - y_M\right)^2 - x_M{}^2 - \left(c - y_M\right)^2 + r^2 - m^2\,x_M{}^2 - m^2\left(c - y_M\right)^2 + m^2\,r^2$$

$$R \;=\; \cancel{x_M^2} - 2\,m\,x_M\left(c - y_M\right) + \cancel{m^2\left(c - y_M\right)^2} - \cancel{x_M{}^2} - \left(c - y_M\right)^2 + r^2 - m^2\,x_M{}^2 - \cancel{m^2\left(c - y_M\right)^2} + m^2\,r^2$$

$$R \;=\; -2\,m\,x_M\left(c - y_M\right) - \left(c - y_M\right)^2 + r^2 - m^2\,x_M{}^2 + m^2\,r^2$$

$$R \;=\; -2\,m\,x_M\left(c - y_M\right) - \left(c - y_M\right)^2 - m^2\,x_M{}^2 + \left(1 + m^2\right)r^2$$

$$R \;=\; -\left(m\,x_M + c - y_M\right)^2 + \left(1 + m^2\right)r^2$$

$$x_{1/2} \;=\; \frac{\left(x_M - m\left(c - y_M\right)\right) \;\pm\; \sqrt{-\left(m\,x_M + c - y_M\right)^2 + \left(1 + m^2\right)r^2}}{1 + m^2}$$

Die Theorie der quadratischen Gleichungen sagt, dass es 0, genau 1 oder genau 2 Lösungen geben kann, und zwar in Abhängigkeit des Radikanden $-\left(m\,x_M+c-y_M\right)^2+\left(1+m^2\right)r^2 \;<\;=\;>\; 0$, also $\left(1+m^2\right)r^2 \;<\;=\;>\; \left(m\,x_M+c-y_M\right)^2$:

$\left(1+m^2\right)r^2 < \left(m\,x_M+c-y_M\right)^2 \quad\Rightarrow$ 0 Lösungen

In diesem Fall schneidet die Gerade g den Kreis K in keinem Punkt. Diese Gerade nennt man **Passante** (frz.: passer = vorbei gehen) .

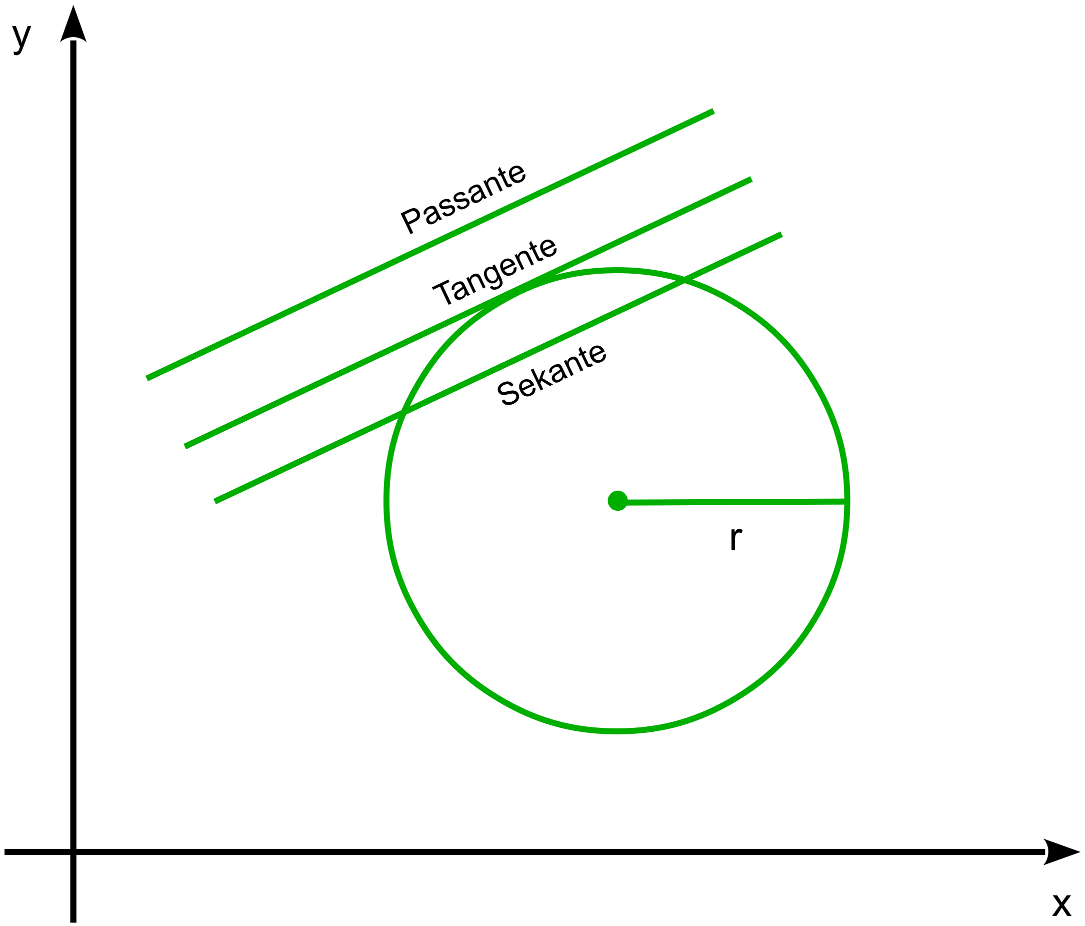
$\left(1+m^2\right)r^2 = \left(m\,x_M+c-y_M\right)^2 \quad\Rightarrow$ genau 1 Lösung

In diesem Fall schneidet die Gerade g den Kreis K in genau 1 Punkt. Diese Gerade nennt man **Tangente** (lat.: tangere = berühren) .

$\left(1+m^2\right)r^2 > \left(m\,x_M+c-y_M\right)^2 \quad\Rightarrow$ genau 2 Lösungen

In diesem Fall schneidet die Gerade g den Kreis K in 2 Punkten. Diese Gerade nennt man **Sekante** (lat.: secare = schneiden) .

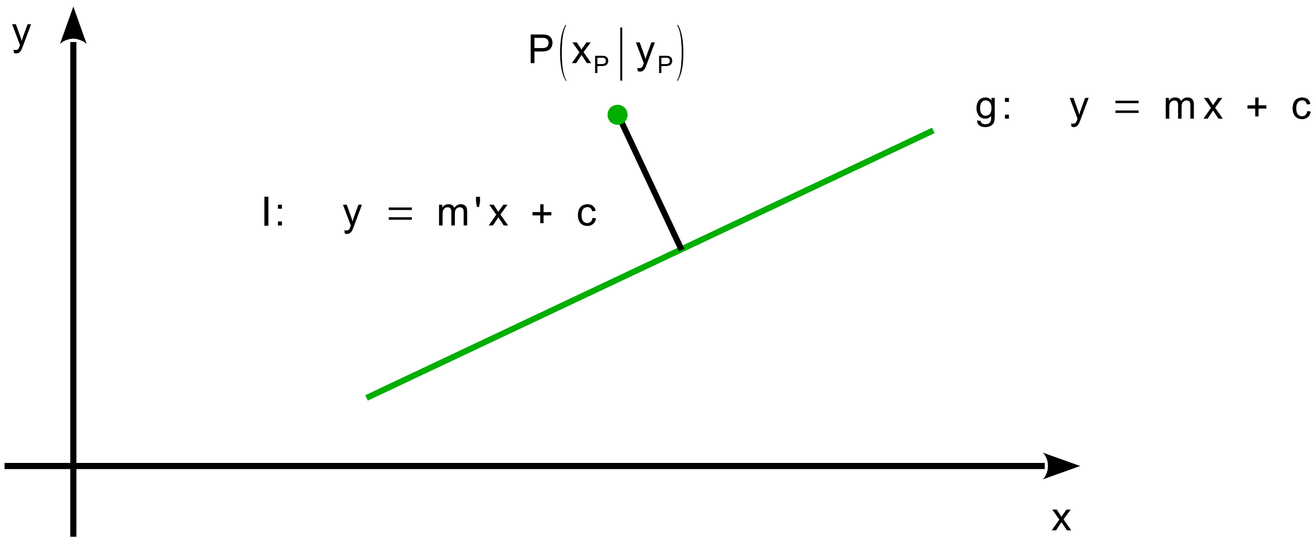
Die Bilder zu Passante, Tangente und Sekante können folgendermaßen aussehen :



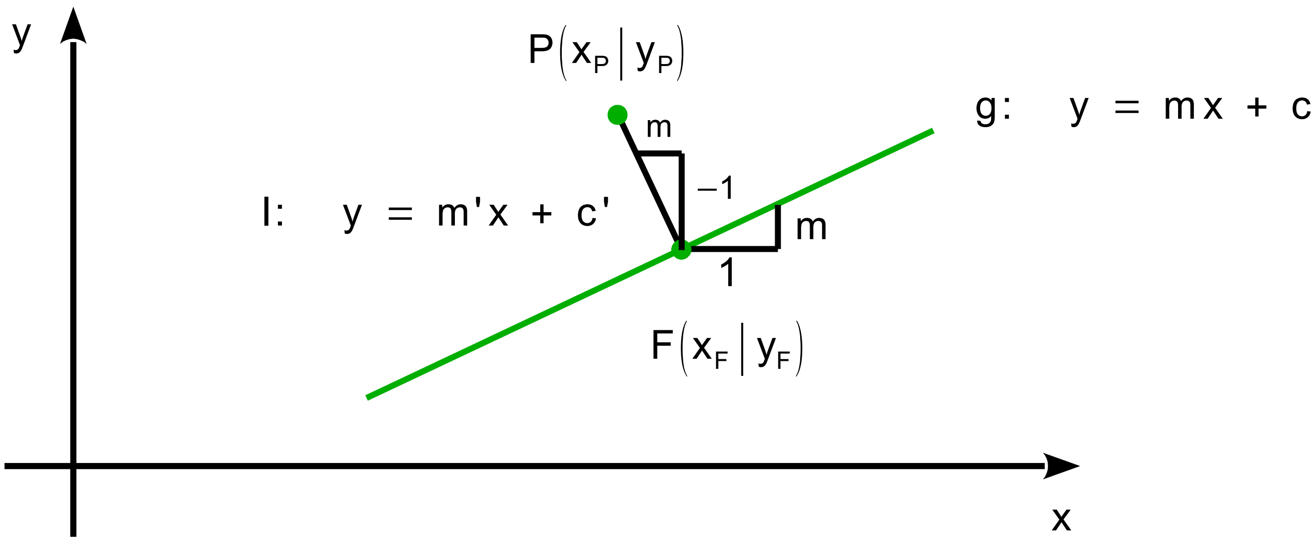
Man könnte die Unterscheidung in Passante, Tangente und Sekante auch über den Abstand des Kreismittelpunktes von der Geraden beschreiben . Hierzu benötigt man die Formel für den Abstand eines Punktes von einer Geraden .

Gegeben seien die Gerade g durch die Gleichung $y = mx + c$ und der Punkt $P\left(x_P \mid y_P\right)$.

Der Abstand des Punktes P von der Geraden g ist definiert durch die Länge des Lotes von P auf die Gerade. Das Lot durch P auf g steht senkrecht zu g :



Die Gleichung des Lotes von einem Punkt P zu einer Geraden g :



$$l \quad : \quad y = -\frac{1}{m}x + c'$$

$$l \quad : \quad y = -\frac{1}{m}x + c'$$

$$P \in l \quad : \quad y_P = -\frac{1}{m}x_P + c'$$

$$\underline{\frac{1}{m}x_P + y_P = c'}$$

$$l \quad : \quad \boxed{y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_P + y_P}$$

Der Fußpunkt F des Lotes von einem Punkt P zu einer Geraden g :

$$g \quad : \qquad y = mx + c$$

$$l \quad : \qquad y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_P + y_P$$

$$mx + c = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_P + y_P$$

$$mx + \frac{1}{m}x + c = \frac{1}{m}x_P + y_P$$

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)x = \frac{1}{m}x_P + y_P - c$$

$$x = \frac{\frac{1}{m}x_P + y_P - c}{m + \frac{1}{m}}$$

$$x_F = \frac{x_P + m y_P - m c}{m^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad y_F = m x_F + c$$

$$y_F = \frac{m x_P + m^2 y_P - m^2 c}{m^2 + 1} + c$$

$$y_F = \frac{m x_P + m^2 y_P + c}{m^2 + 1}$$

$$F\left(\frac{x_P + m y_P - m c}{m^2 + 1} \;\middle|\; \frac{m x_P + m^2 y_P + c}{m^2 + 1} \right)$$

Der Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt F bzw. des Punktes P von g :

$$P\left(x_P \,\middle|\, y_P\right) \quad , \quad F\left(\frac{x_P+m\,y_P-m\,c}{m^2\ +\ 1} \,\middle|\, \frac{m\,x_P+m^2y_P+c}{m^2\ +\ 1}\right)$$

$$|PF| = \sqrt{\left(\frac{x_P+m\,y_P-m\,c}{m^2\ +\ 1} - x_P\right)^2 + \left(\frac{m\,x_P+m^2y_P+c}{m^2\ +\ 1} - y_P\right)^2}$$

$$|Pg| = \sqrt{\left(\frac{x_P+m\,y_P-m\,c-m^2x_P-x_P}{m^2\ +\ 1}\right)^2 + \left(\frac{m\,x_P+m^2y_P+c-m^2y_P-y_P}{m^2\ +\ 1}\right)^2}$$

$$|Pg| = \sqrt{\left(\frac{-m^2x_P+m\,y_P-m\,c}{m^2\ +\ 1}\right)^2 + \left(\frac{m\,x_P-y_P+c}{m^2\ +\ 1}\right)^2}$$

$$\mathrm{IPgI} = \sqrt{\left(\frac{-m\left(m\,x_P - y_P + c\right)}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{m\,x_P - y_P + c}{m^2 + 1}\right)^2}$$

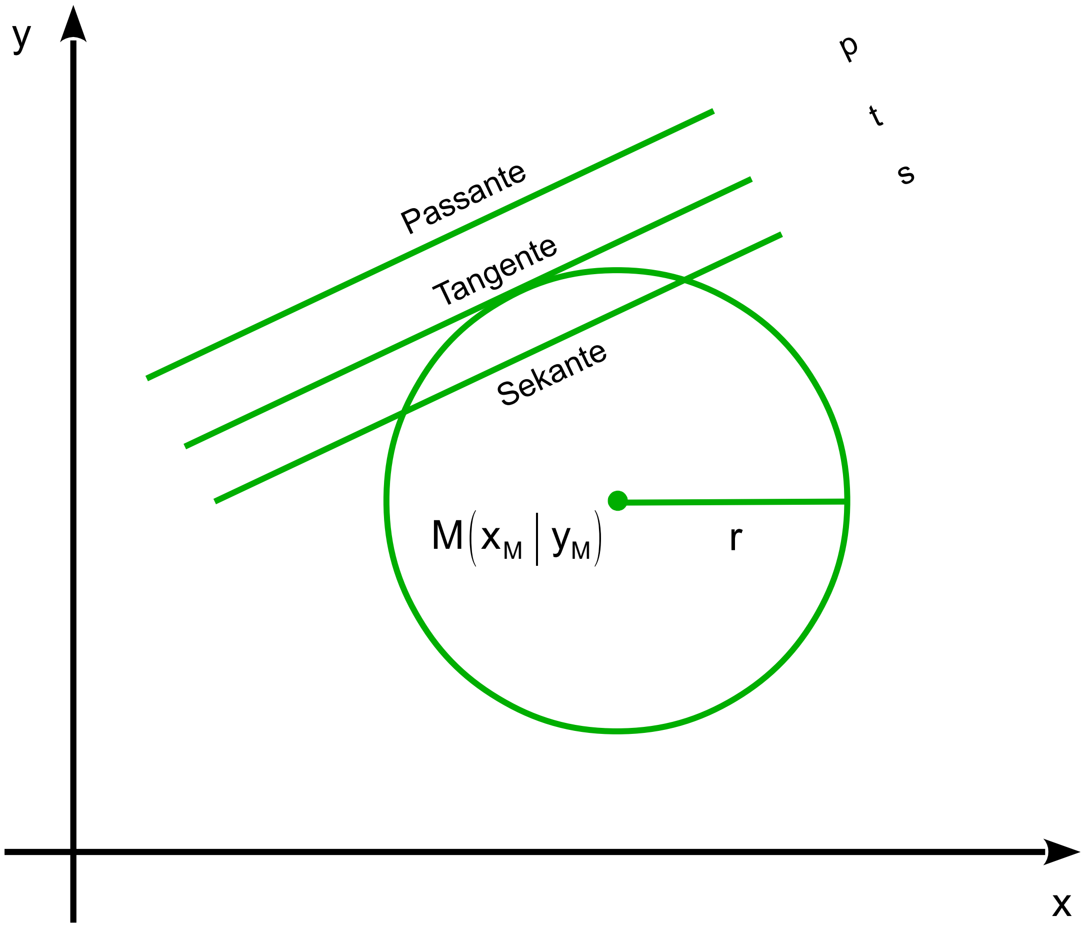
$$\mathrm{IPgI} = \sqrt{\frac{m^2\left(m\,x_P - y_P + c\right)^2}{\left(m^2 + 1\right)^2} + \frac{\left(m\,x_P - y_P + c\right)^2}{\left(m^2 + 1\right)^2}}$$

$$\mathrm{IPgI} = \sqrt{\frac{m^2\left(m\,x_P - y_P + c\right)^2 + \left(m\,x_P - y_P + c\right)^2}{\left(m^2 + 1\right)^2}}$$

$$\mathrm{IPgI} = \sqrt{\frac{\left(m^2 + 1\right)\left(m\,x_P - y_P + c\right)^2}{\left(m^2 + 1\right)^2}}$$

$$\mathrm{IPgI} = \sqrt{\frac{\left(m\,x_P - y_P + c\right)^2}{m^2 + 1}}$$

Die Bedingungen für Passante, Tangente und Sekante eines Kreises lauten nun :



Passante p

$$|Mp| = \sqrt{\frac{(m x_M - y_M + c)^2}{m^2 + 1}} > r \quad \Leftrightarrow \quad (m^2+1) r^2 < (m x_M - y_M + c)^2$$

Tangente t

$$|Mt| = \sqrt{\frac{(m x_M - y_M + c)^2}{m^2 + 1}} = r \quad \Leftrightarrow \quad (m^2+1) r^2 = (m x_M - y_M + c)^2$$

Sekante s

$$|Ms| = \sqrt{\frac{(m x_M - y_M + c)^2}{m^2 + 1}} < r \quad \Leftrightarrow \quad (m^2+1) r^2 > (m x_M - y_M + c)^2$$

Aufgaben

(1) Gegeben seien eine Gerade und ein Kreis durch

$$g \quad : \quad y = 0{,}5\,x - 1$$

$$K_{0;3} \quad : \quad x^2 + y^2 = 3^2$$

Berechne die Schnittpunkte !

Lösung :

$$x^2 + (0{,}5\,x - 1)^2 = 9$$

$$x^2 + 0{,}25\,x^2 + x + 1 = 9$$

$$1{,}25\,x^2 + x - 8 = 0$$

$$x^2 + 0{,}8\,x - 6{,}4 = 0$$

$$x_{1/2} = -0{,}4 \pm \sqrt{0{,}4^2 + 6{,}4}$$

$$x_1 = -2{,}96 \qquad y_1 = -2{,}48 \qquad S_1(-2{,}96 \mid -2{,}48)$$

$$x_2 = 2{,}16 \qquad y_2 = 0{,}08 \qquad S_2(2{,}16 \mid 0{,}08)$$

(2) Gegeben seien eine Gerade und ein Kreis durch

$$g \quad : \quad y = 0{,}5\,x + c$$

$$K_{0;3} \quad : \quad x^2 + y^2 = 3^2$$

Welchen Wert muss c haben, damit die Gerade den Kreis berührt ?

Lösung :

$$x^2 + (0{,}5x + c)^2 = 9$$

$$x^2 + 0{,}25x^2 + cx + c^2 = 9$$

$$1{,}25x^2 + cx + c^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + 0{,}8cx + 0{,}8(c^2 - 9) = 0$$

$$x^2 + 0{,}8cx + 0{,}8(c^2 - 9) = 0$$

$$x_{1/2} = -0{,}4c \pm \sqrt{0{,}4^2 c^2 - 0{,}8(c^2 - 9)}$$

$$x_{1/2} = -0{,}4c \pm \sqrt{-0{,}64c^2 + 7{,}2}$$

$$-0{,}64c^2 + 7{,}2 = 0$$

$$c^2 = \frac{7{,}2}{0{,}64} \qquad \underline{c_1 = -3{,}36} \qquad \underline{c_2 = 3{,}36}$$

(3) Gegeben seien eine Gerade und ein Kreis durch

$$g \quad : \quad y = -\frac{4}{3}x + 12$$

$$m = -\frac{4}{3} \quad , \quad c = 12$$

$$K_{0;3} \quad : \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

$$M(2 \mid 1) \; , \quad r = 5$$

Entscheide mit dem **Berührkriterium** $\sqrt{\frac{(m x_M - y_M + c)^2}{m^2 + 1}} = r$, dass sich die Gerade und der Kreis in genau 1 Punkt schneiden !

Berechne den Punkt !

Lösung :

$$\sqrt{\frac{\left(m\,x_M - y_M + c\right)^2}{m^2 \;+\; 1}} \;=\; r \qquad m = -\frac{4}{3} \qquad c = 12 \qquad M\left(2\,\middle|\,1\right) \qquad r \;=\; 5$$

$$\sqrt{\frac{\left(-\frac{4}{3}\;2 - 1 + 12\right)^2}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 \;+\; 1}} \;=\; 5$$

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{25}{3}\right)^2}{\frac{25}{9}}} \;=\; 5$$

$\sqrt{25} \;=\; 5$ wahre Aussage

$$(x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 12-1\right)^2 = 5^2$$

$$(x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 11\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{88}{3}x + 121 = 25$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{3}x + 100 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}$$

$x_1 = 6$ $\qquad$ $y_1 = -\frac{4}{3}6 + 12$ $\qquad$ $B(6\,|\,4)$ **Berührpunkt**

$y_1 = 4$

Gleichung der Tangente von einem Punkt an einen Kreis

Gegeben :

$K_{M;r} \quad : \qquad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

$P(x_P \mid y_P)$ außerhalb von $K_{M;r}$

Gesucht :

Gleichung der Tangente von P an den Kreis

$t \quad : \qquad y = mx + c$

Da $P\left(x_P \,\middle|\, y_P\right) \in t$ gilt $y_P = mx_P + c$, also $c = y_P - mx_P$ und damit

$$t \quad : \quad y = mx + y_P - m\,x_P$$

Die Berührbedingung lautet :

$$\mathrm{IMtI} = \sqrt{\frac{\left(m\,x_M - y_M + c\right)^2}{m^2 + 1}} = r \quad \Leftrightarrow \quad \left(m^2+1\right)r^2 = \left(m\,x_M - y_M + c\right)^2$$

$$\left(m^2+1\right)r^2 = \left(m\,x_M - y_M + y_P - m\,x_P\right)^2$$

$$\left(m^2+1\right)r^2 = \left(m\left(x_M - x_P\right) - \left(y_M - y_P\right)\right)^2$$

$$r^2m^2 + r^2 = \left(x_M - x_P\right)^2 m^2 - 2m\left(x_M - x_P\right)\left(y_M - y_P\right) + \left(y_M - y_P\right)^2$$

$$\left(\left(x_M - x_P\right)^2 - r^2\right)m^2 - 2\left(x_M - x_P\right)\left(y_M - y_P\right)m + \left(y_M - y_P\right)^2 - r^2 = 0$$

$$\left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)m^2 \;-\; 2\left(x_M-x_P\right)\left(y_M-y_P\right)m \;+\; \left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; r^2 \;=\; 0$$

$$m_{1/2} \;=\; \frac{2\left(x_M-x_P\right)\left(y_M-y_P\right) \;\pm\; \sqrt{4\left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; 4\left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)\left(\left(y_M-y_P\right)^2-r^2\right)}}{2\left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)}$$

$$m_{1/2} \;=\; \frac{2\left(x_M-x_P\right)\left(y_M-y_P\right) \;\pm\; 2\sqrt{\left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; \left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)\left(\left(y_M-y_P\right)^2-r^2\right)}}{2\left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)}$$

$$m_{1/2} \;=\; \frac{\left(x_M-x_P\right)\left(y_M-y_P\right) \;\pm\; \sqrt{\left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; \left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)\left(\left(y_M-y_P\right)^2-r^2\right)}}{\left(x_M-x_P\right)^2-r^2}$$

Vereinfachung des Radikanden R :

$$R \;=\; \left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; \left(\left(x_M-x_P\right)^2-r^2\right)\left(\left(y_M-y_P\right)^2-r^2\right)$$

$$R \;=\; \left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;-\; \left(x_M-x_P\right)^2\left(y_M-y_P\right)^2 \;+\; \left(x_M-x_P\right)^2 r^2 \;+\; \left(y_M-y_P\right)^2 r^2 \;-\; r^4$$

$$R = (x_M - x_P)^2 (y_M - y_P)^2 - (x_M - x_P)^2 (y_M - y_P)^2 + (x_M - x_P)^2 r^2 + (y_M - y_P)^2 r^2 - r^4$$

$$\underline{R = (x_M - x_P)^2 r^2 + (y_M - y_P)^2 r^2 - r^4}$$

$$m_{1/2} = \frac{(x_M - x_P)(y_M - y_P) \pm \sqrt{(x_M - x_P)^2 r^2 + (y_M - y_P)^2 r^2 - r^4}}{(x_M - x_P)^2 - r^2}$$

$$\boxed{m_1 = \frac{(x_M - x_P)(y_M - y_P) - \sqrt{(x_M - x_P)^2 r^2 + (y_M - y_P)^2 r^2 - r^4}}{(x_M - x_P)^2 - r^2}}$$

$$\boxed{m_2 = \frac{(x_M - x_P)(y_M - y_P) + \sqrt{(x_M - x_P)^2 r^2 + (y_M - y_P)^2 r^2 - r^4}}{(x_M - x_P)^2 - r^2}}$$

Gleichungen der Tangenten von $P\left(x_P \mid y_P\right)$ an den Kreis :

$$t_1 \quad : \quad y = m_1 x + y_P - m x_P$$

$$t_2 \quad : \quad y = m_2 x + y_P - m x_P$$

Die „Gärtnerkonstruktion“ der Ellipse

Bei der „Gärtnerkonstruktion“ wird eine geschlossene Schnur um zwei Pflöcke und einen Stift gelegt, so dass sie ständig gespannt um die Pflöcke und den Stift gleiten kann.
Beim Zeichnen entsteht eine geschlossene Kurve, **Ellipse** genannt.

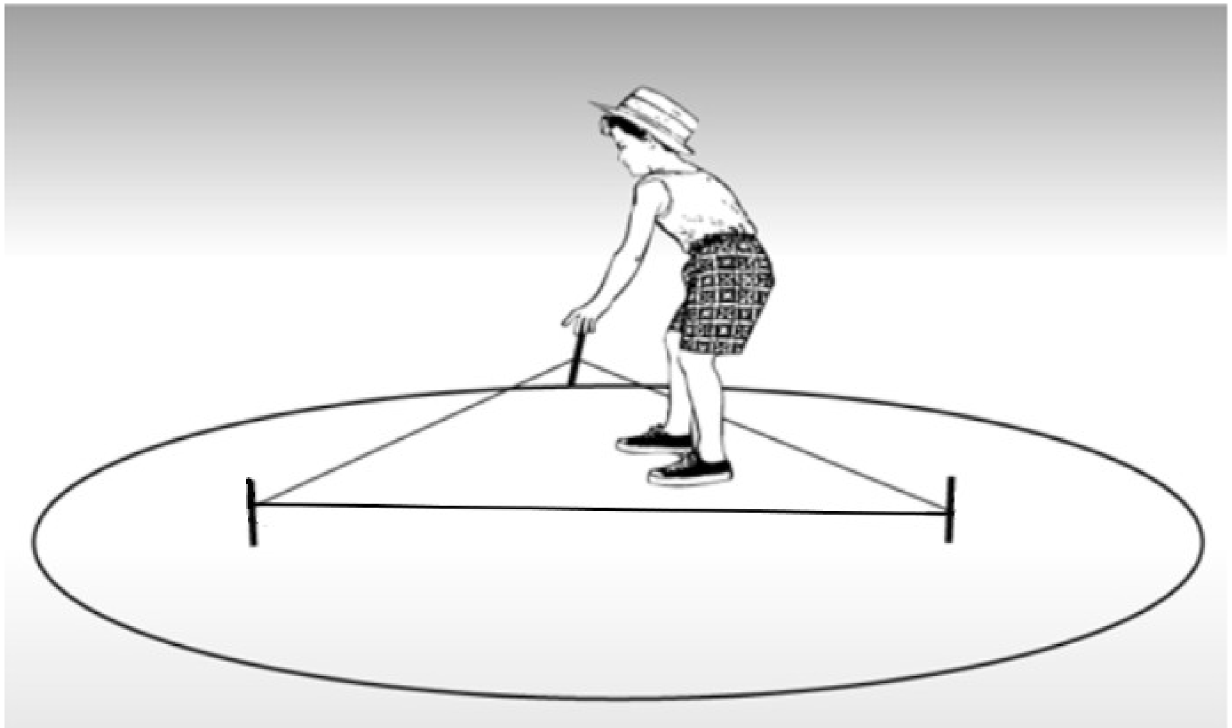
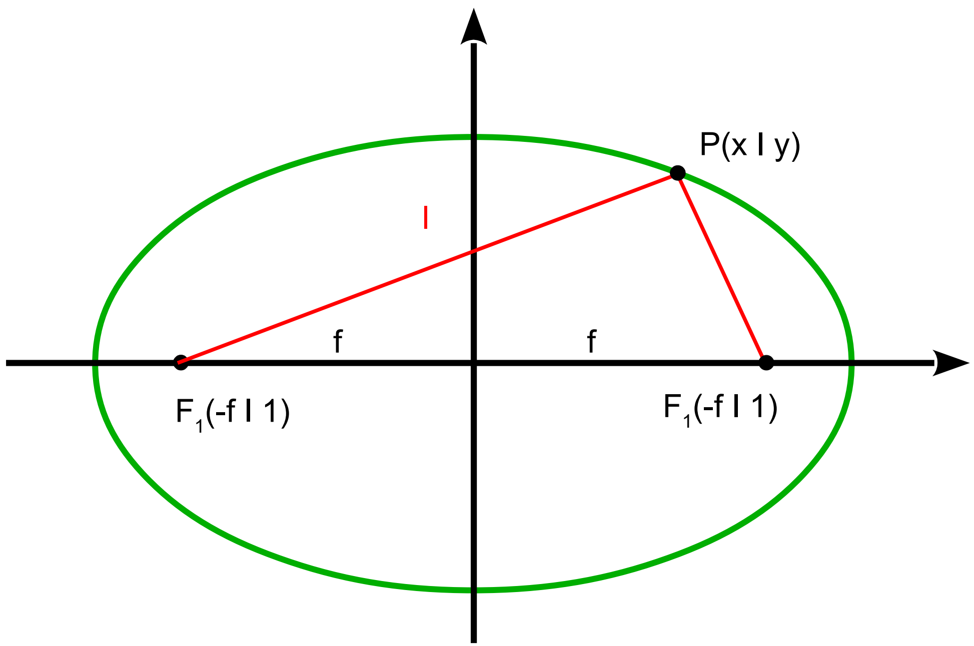


Bild aus https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/gaertnerkonstruktion/3348, modifiziert von Arno Fehringer !

Herleitung der Gleichung einer Ellipse



Fixpunkte : $F_1(-f\,|\,0)$, $F_2(f\,|\,0)$

Schnurlänge insgesamt : $2f + \underline{l}$

Punkt $P(x\,|\,y)$ auf der Kurve

Die Summe der Abstände von P zu den Fixpunkten ist konstant l :

$$|PF_1| + |PF_2| = l$$

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = l$$

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = l$$

$$(x+f)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2 = l^2$$

$$(x+f)^2 + (x-f)^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = l^2$$

$$x^2+2fx+f^2 + x^2-2fx+f^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2} = l^2$$

$$2x^2 + 2f^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2} = l^2$$

$$2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2} = l^2 - 2x^2 - 2f^2 - 2y^2$$

$$\underbrace{\left(\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2}\right)^2}_{L} = \underbrace{\left(\frac{l^2}{2}-x^2-f^2-y^2\right)^2}_{R}$$

$$\underbrace{\left(\sqrt{(x+f)^2+y^2}\;\sqrt{(x-f)^2+y^2}\right)^2}_{L} = \underbrace{\left(\frac{l^2}{2}-x^2-f^2-y^2\right)^2}_{R}$$

$$L = \left((x+f)^2+y^2\right)\left((x-f)^2+y^2\right)$$

$$L = \left((x+f)^2+y^2\right)\left((x-f)^2+y^2\right)$$

$$L = (x+f)^2(x-f)^2 + (x+f)^2y^2 + (x-f)^2y^2 + y^4$$

$$L = (x^2-f^2)^2 + (x+f)^2y^2 + (x-f)^2y^2 + y^4$$

$$L = x^4 - 2x^2f^2 + f^4 + x^2y^2 + f^2y^2 + x^2y^2 + f^2y^2 + y^4$$

$$L = x^4 - 2x^2f^2 + f^4 + 2x^2y^2 + 2f^2y^2 + y^4$$

$$L = x^4 + f^4 + y^4 - 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2f^2y^2$$

$$R = \frac{l^4}{4} + x^4 + f^4 + y^4 - l^2x^2 - l^2f^2 - l^2y^2 + 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2f^2y^2$$

$$L = R$$

$$x^4+f^4+y^4-2x^2f^2+2x^2y^2+2f^2y^2 = \frac{l^4}{4}+x^4+f^4+y^4-l^2x^2-l^2f^2-l^2y^2+2x^2f^2+2x^2y^2+2f^2y^2$$

$$\cancel{x^4+f^4+y^4}-2x^2f^2+\cancel{2x^2y^2}+\cancel{2f^2y^2} = \frac{l^4}{4}+\cancel{x^4+f^4+y^4}-l^2x^2-l^2f^2-l^2y^2+2x^2f^2+\cancel{2x^2y^2}+\cancel{2f^2y^2}$$

$$-2x^2f^2 = \frac{l^4}{4}-l^2x^2-l^2f^2-l^2y^2+2x^2f^2$$

$$l^2x^2 - 4x^2f^2 + l^2y^2 = \frac{l^4}{4} - l^2f^2$$

$$\left[l^2 - 4f^2\right]x^2 + l^2y^2 = \frac{l^2}{4}\left[l^2 - 4f^2\right]$$

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{4}} + \frac{y^2}{\left[\frac{l^2 - 4f^2}{4}\right]} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{4}} + \frac{y^2}{\left[\frac{l^2 - 4f^2}{4}\right]} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - f^2} = 1$$

Setze : $\underline{a^2 := \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ $\quad b^2 := \left(\frac{l}{2}\right)^2 - f^2$

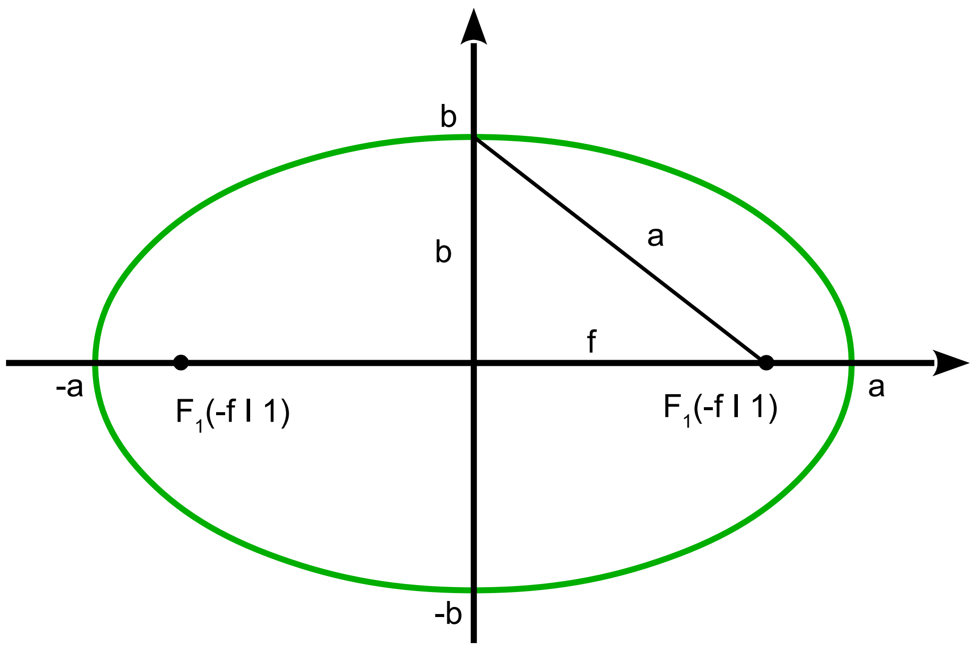
$\underline{b^2 := a^2 - f^2}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Gleichung der Ellipse mit den Parametern a , b

Namen, Bedeutung und Zusammenhang der Parameter a , b , f der Ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



(1) $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

(2) $x = 0 \Leftrightarrow y = \pm b$

(3) a , b heißen **Halbachsen**

(4) f heißt **lineare Exzentrizität**

(5) $a = \frac{l}{2}$, $b^2 = a^2 - f^2$