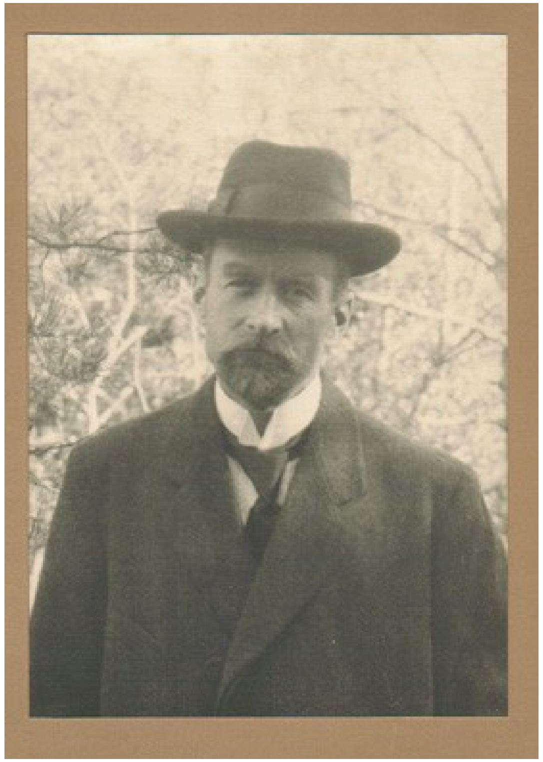
Schneeflockenkurve , Kochsche Kurve

(Helge von Koch, 1870 - 1924)

Arno Fehringer

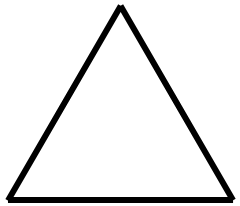
April 2022

Nils Fabian Helge von Koch, schwedischer Mathematiker :
Er konstruierte die nach ihm benannte Kochsche Kurve, eines der ersten Fraktale, als Beispiel für eine unendlich lange, an keiner Stelle differenzierbare Kurve.

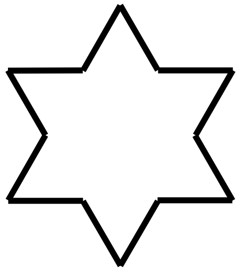


https://de.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch

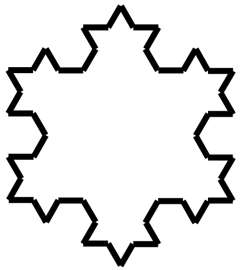
Konstruktion der Schneeflockenkurve und Umfangsberechnungen



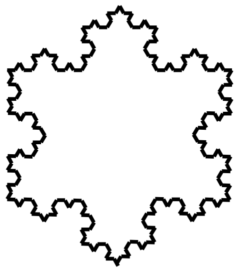
$$U_1 = U$$



$$U_2 = \frac{4}{3}U$$



$$U_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U$$



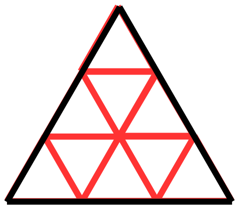
$$U_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 U$$

Diejenige Kurve, die entsteht, wenn man n gegen unendlich streben lässt, heißt Schneeflockenkurve, Sfk .

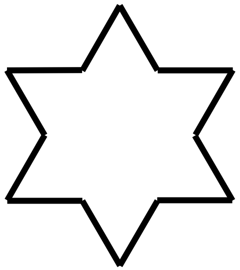
Der Umfang der Schneeflockenkurve ist unendlich !

$$\boxed{U_{Sfk} = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} U = \infty}$$

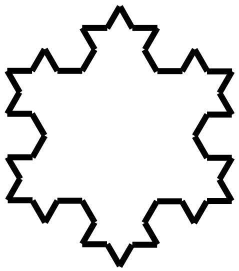
Konstruktion der Schneeflockenkurve und Flächenberechnungen



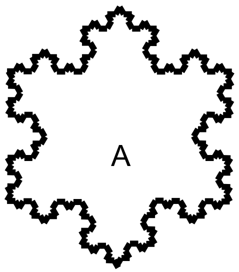
$$A_1 = A$$



$$A_2 = A + 3\frac{A}{9}$$



$$A_3 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2}$$



$$A_4 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3}$$

$$A_4 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3}$$

$$A_5 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3} + 3 \cdot 4^3\frac{A}{9^4}$$

$$A_6 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3} + 3 \cdot 4^3\frac{A}{9^4} + 3 \cdot 4^4\frac{A}{9^5}$$

$$A_7 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3} + 3 \cdot 4^3\frac{A}{9^4} + 3 \cdot 4^4\frac{A}{9^5} + 3 \cdot 4^5\frac{A}{9^6}$$

$$A_{Sfk} = ?$$

$$A_7 = A + 3\frac{A}{9} + 3 \cdot 4\frac{A}{9^2} + 3 \cdot 4^2\frac{A}{9^3} + 3 \cdot 4^3\frac{A}{9^4} + 3 \cdot 4^4\frac{A}{9^5} + 3 \cdot 4^5\frac{A}{9^6}$$

$$A_7 = A + 3\frac{A}{9} \cdot \left(1 + 4\frac{1}{9^1} + 4^2\frac{1}{9^2} + 4^3\frac{1}{9^3} + 4^4\frac{1}{9^4} + 4^5\frac{1}{9^5}\right)$$

$$A_7 = A + 3\frac{A}{9} \cdot \left(1 + \frac{4^1}{9^1} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \frac{4^4}{9^4} + \frac{4^5}{9^5}\right)$$

$$A_7 = A + 3\frac{A}{9} \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \left(\frac{4}{9}\right)^5\right)$$

Die n-te Näherung der Fläche der Schneeflockenkurve ist im Wesentlichen eine geometrische Reihe mit dem Faktor $q = \frac{4}{9} < 1$ (vgl. S.14) .

$$A_n = A + 3\frac{A}{9} \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

Deshalb existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} A + 3\frac{A}{9} \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A + 3\frac{A}{9} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A + 3\frac{A}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}$$

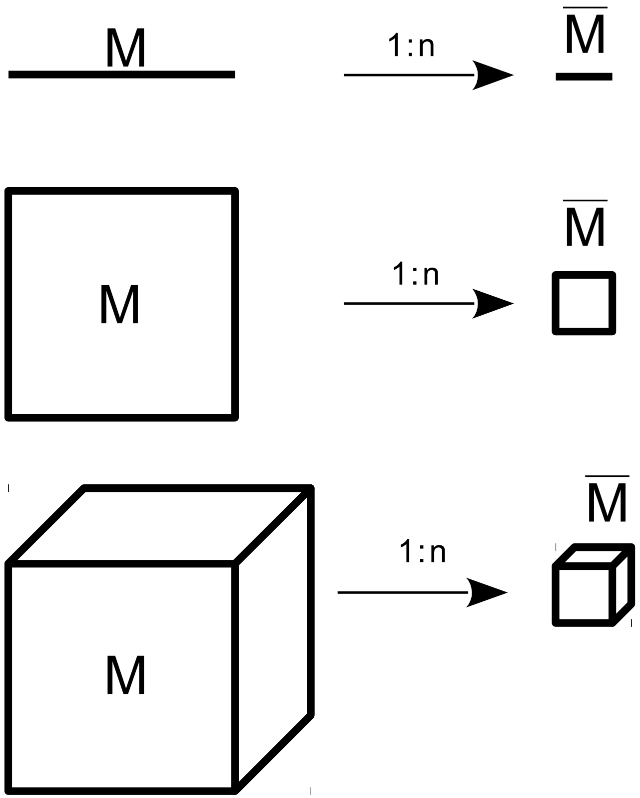
$$\lim_{n \to \infty} A_n = A + 3\frac{A}{9} \cdot \frac{9}{5}$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A + \frac{3}{5} A$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{8}{5} A$$

$$\boxed{A_{Sfk} = \frac{8}{5} A}$$

Dimensionsbetrachtungen



$$M = k \cdot \overline{M} \qquad k = n^1$$

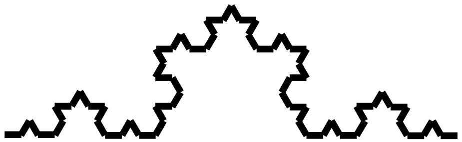
$$M = k \cdot \overline{M} \qquad k = n^2$$

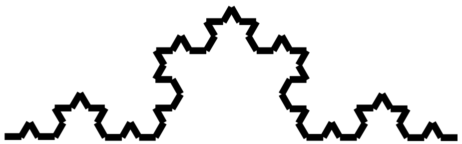
$$M = k \cdot \overline{M} \qquad k = n^3$$

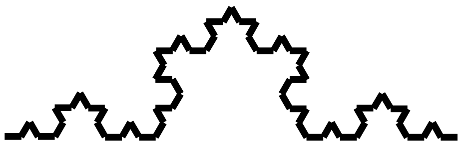
$$\boxed{k = n^{\dim(M)}}$$

$$k = n^{\dim(M)} \quad \Leftrightarrow \quad \log(k) = \dim(M) \cdot \log(n) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dim(M) := \frac{\log(k)}{\log(n)}}$$

Dimension der Schneeflockenkurve

 $\xrightarrow[n=3]{1:3}$  $k=4$

 $\xrightarrow[n=3^2]{1:3^2}$  $k=4^2$

 $\xrightarrow[n=3^3]{1:3^3}$ $k=4^3$

Allgemein:

$n=3^i \qquad k=4^i$

$$\dim(\mathrm{Sfk}) = \frac{\log(k)}{\log(n)} = \frac{\log(4^i)}{\log(3^i)} = \frac{i\cdot\log(4)}{i\cdot\log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1{,}261859507$$

Figuren mit gebrochener Dimension heißen **Fraktale** !

Geometrische Folgen

$q \in \mathbb{R}_0^+ \;,\; a_n = q^n \;,\; n \in \mathbb{N}$

1. Fall : $q = 1$

$a_n = q^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

2. Fall : $q = 0$

$a_n = q^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

3. Fall : $q > 1$, etwa $q = 1+a \,,\; a > 0$

$a_n = q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$ und $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, also **divergent** .

4. Fall : $0 < q < 1$, etwa $q = \dfrac{1}{\bar{q}} \,,\; \bar{q} > 1 \,,\; \bar{q} = 1+a \,,\; a > 0$

$$0 < a_n = q^n = \left(\frac{1}{\bar{q}}\right)^n = \frac{1}{\bar{q}^{\,n}} = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Geometrische Folgen

$$q \in \mathbb{R}^{-} - \{0\} \quad , \quad a_n = q^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Fall : $q = -1$

$$a_n = (-1)^n = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & , \text{ falls } n & \text{gerade} \\ -1 & , \text{ falls } n & \text{ungerade} \end{array} \right\} \text{, also } \textbf{divergent}.$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

2. Fall : $q < -1$, etwa $q = -1 - a = -(1+a)$, $a > 0$

$$a_n = (-(1+a))^n = \left\{ \begin{array}{lll} (1+a)^n & , \text{ falls } n & \text{gerade} \\ -(1+a)^n & , \text{ falls } n & \text{ungerade} \end{array} \right\} \text{, also } \textbf{divergent}.$$

3. Fall : $-1 < q < 0$, etwa $q = -\frac{1}{\overline{q}}$, $\overline{q} > 1$, $0 < \frac{1}{\overline{q}} < 1$

$$a_n = \left(-\frac{1}{q}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{1}{q}\right)^n & , \quad \text{falls} \quad n \quad \text{gerade} \\ -\left(\frac{1}{q}\right)^n & , \quad \text{falls} \quad n \quad \text{ungerade} \end{cases} \text{. also } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Zusammenfassung :

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt für die **geometrische Folge** $a_n = q^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$:

$-1 < q < 1$: $\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0}$

$q = 1$: $\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1}$

In allen anderen Fällen ist die **geometrische Folge divergent**.

Geometrische Reihen

$$q \in \mathbb{R}\,,\ q \neq 1$$

$$S_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-1} + q^n\ ,\quad n \in \mathbb{N}$$

$$S_n = 1 + q\left(1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

$$S_n = 1 + q\left(1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) - q^{n+1}$$

$$S_n = 1 + q\,S_n - q^{n+1}$$

$$S_n - q\cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n\cdot\left(1 - q\right) = 1 - q^{n+1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}\quad ,\quad q \neq 1$$

Falls $-1 < q < 1$ ist, folgt :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{also} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}}$$