

Fourierreihen, Fourier-Transformation, Faltungen und Laplace-Transformation

Arno Fehringer

Mai 2022

Quellen :

<https://www.mathe-online.at/skripten/>

https://www.mathe-online.at/skripten/techn_fourier/techn_fourierreihen_einfuehrung.pdf

https://www.mathe-online.at/skripten/techn_fourier/techn_fouriertransformation_einfuehrung.pdf

https://www.mathe-online.at/skripten/techn_laplace/techn_laplacetransformation_einfuehrung.pdf

Koch, Jürgen ; Stämpfle, Martin : Mathematik für das Ingenieurstudium. Hanser Verlag München 2018, 4.Aufl.

Ulrich, Helmut ; Weber, Hubert : Laplace-, Fourier-, und z-Transformation. Springer Vieweg 2017, 10.Aufl.

Grundlegende Formeln

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

Eulersche Formel

$$e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t)$$

$$e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

$$e^{it} - e^{-it} = -2i\sin(t)$$

$$\sin(t) = -i \frac{1}{2} (e^{it} - e^{-it})$$

Basisfunktionen und Eigenschaften

$$1, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t)$$

mit $k, l \in \mathbb{Z}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz, T Periode

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos(k\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \sin(k\omega t) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cdot \sin(l\omega t) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cdot \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} \pi & \text{für } k=l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega t) \cdot \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} \pi & \text{für } k=l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

Trigonometrische Polynome

Die T- periodische Funktion

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t)$$

heißt **trigonometrisches Polynom**
mit den **Koeffizienten**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k \omega t) \cdot f(t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k \omega t) \cdot f(t) dt$$

Satz von Fourier

Jede stückweise stetig differenzierbare T-periodische Funktion $f(t)$ kann in eine Fourierreihe entwickelt werden :

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t)$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) \quad \text{falls } f \text{ stetig in } t$$

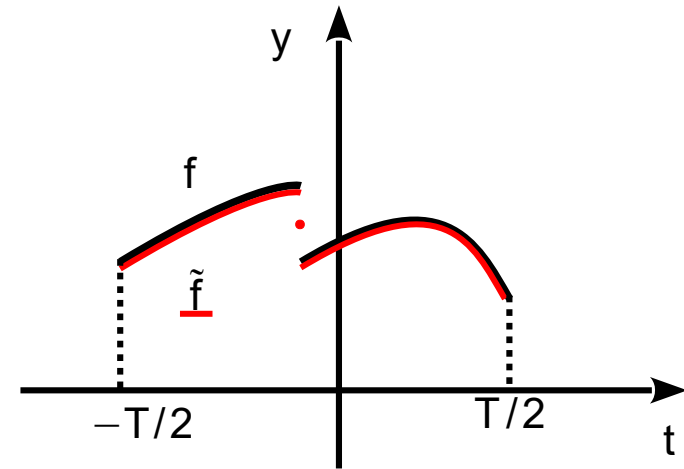
$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)) \quad \text{falls } f \text{ unstetig in } t$$

$$f(t) = \tilde{f}(t) \text{ fast überall}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k \omega t) \cdot f(t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k \omega t) \cdot f(t) dt$$



Spektralform der Fourierreihe

$$k \geq 1 \quad : \quad a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t) = A_k \sin(k \omega t + \delta_k)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \delta_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a}{b}\right) & \text{für } \frac{a}{b} > 0 \\ \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi & \text{für } \frac{a}{b} < 0 \end{cases}$$

$$A_0 := a_0$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k \omega t + \delta_k)$$

$A_k, k \geq 0$ **Amplitudenspektrum**

$\delta_k, k \geq 1$ **Phasenspektrum**

Komplexe Form der Fourierreihe

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t) \\ &= a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t) \\ &= a_k \frac{1}{2} (e^{ik \omega t} + e^{-ik \omega t}) - b_k i \frac{1}{2} (e^{ik \omega t} - e^{-ik \omega t}) \\ &= \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ik \omega t} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ik \omega t} \\ &= c_k e^{ik \omega t} + c_{-k} e^{-ik \omega t} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} := \frac{1}{2} (a_k + ib_k) \\ f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} c_k e^{ik \omega t} + c_{-k} e^{-ik \omega t} \\ f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \omega t} \quad \text{mit} \quad c_0 := \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

Fourierreihe in komplexer Form

Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$c_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega t) \cdot f(t) dt - i \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega t) \cdot f(t) dt \right)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(k\omega t) - i \sin(k\omega t)] \cdot f(t) dt$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega t} \cdot f(t) dt$$

analog

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t} \cdot f(t) dt$$

Zusammenhänge zwischen Funktion und Fourierkoeffizienten

Funktion

$$f(t)$$

$$g(t)$$

$$f(t)g(t)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Faltung

Fourierreihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\omega t}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e_k e^{ik\omega t}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k d_k$$

Koeffizienten

$$c_k$$

$$d_k$$

$$e_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}$$

Faltung

$$c_k d_k$$

Fourier-Transformation

Die **Fourier-Transformation** einer Funktion $f(t)$ ergibt sich, wenn man die Periode der Funktion gegen unendlich streben lässt, $T \rightarrow \infty$.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} \quad \text{mit} \quad \omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Für } T \rightarrow \infty \text{ ist } \Delta\omega = (k+1)\omega - k\omega = \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$$

$$\text{und } \underline{\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\omega t} \cdot f(t) dt \right) e^{i\omega_k t}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_k t} \cdot f(t) dt \right) e^{i\omega_k t}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_k t} \cdot f(t) dt \right) e^{i\omega_k t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_k t} \cdot f(t) dt \right)}_{=: F(\omega_k)} e^{i\omega_k t} \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} F(\omega_k) \Delta\omega$$

Für $T \rightarrow \infty$ folgt $\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} F(\omega_k) \Delta\omega \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$

und

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) \Delta\omega$$

also

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega} \quad \text{mit} \quad \boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt}$$

Inverse Fouriertransformierte von F
Fourierdarstellung von f

Fouriertransformierte von f

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ sind Abbildungen zwischen Funktionenräumen

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} & F(\omega) \\
 f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega & & F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & f(\omega) \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(-t)} f(\omega) d\omega & &
 \end{array}$$

$\frac{1}{2\pi} F(-t)$	$f(\omega)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$

Vertauschungssatz

Weitere Zusammenhänge von Funktion und Fouriertransformierter

Funktion	Fouriertransformierte	
$f(t)$	$F(\omega)$	
$g(t)$	$G(\omega)$	
$f(t)+g(t)$	$F(\omega)+G(\omega)$	Linearität
$cf(t)$	$cF(\omega)$	
$f(t-a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$	Verschiebungssätze
$e^{ia\omega} f(t)$	$F(\omega-a)$	
$f(bt)$	$\frac{1}{ b } F\left(\frac{\omega}{b}\right)$	Ähnlichkeitssätze
$\frac{1}{ b } f\left(\frac{t}{b}\right)$	$F(b\omega)$	

Für $b = -1$

$f(-t)$	$F(-\omega)$
---------	--------------

Spiegelung

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

$$2\pi f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \qquad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

f ist gerade
 f ist ungerade

F ist gerade
 F ist ungerade

$$\overline{f(t)} = f(t)$$

$$\overline{F(\omega)} = F(-\omega)$$

$$\begin{matrix} f'(t) \\ t f(t) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} i\omega F(\omega) \\ iF'(\omega) \end{matrix}$$

Beweis der Ähnlichkeitssätze

Gegeben seien $f(t)$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$.

Berechne die Fouriertransformierte zu $f(bt)$!

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(bt) dt & \tau := bt, \quad t = \frac{1}{b} \tau, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{b} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{b} \tau} f(\tau) \frac{1}{b} d\tau \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{b} \tau} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{b} F\left(\frac{\omega}{b}\right) \\ &= \frac{1}{|b|} F\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad \textbf{Wenn } b > 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

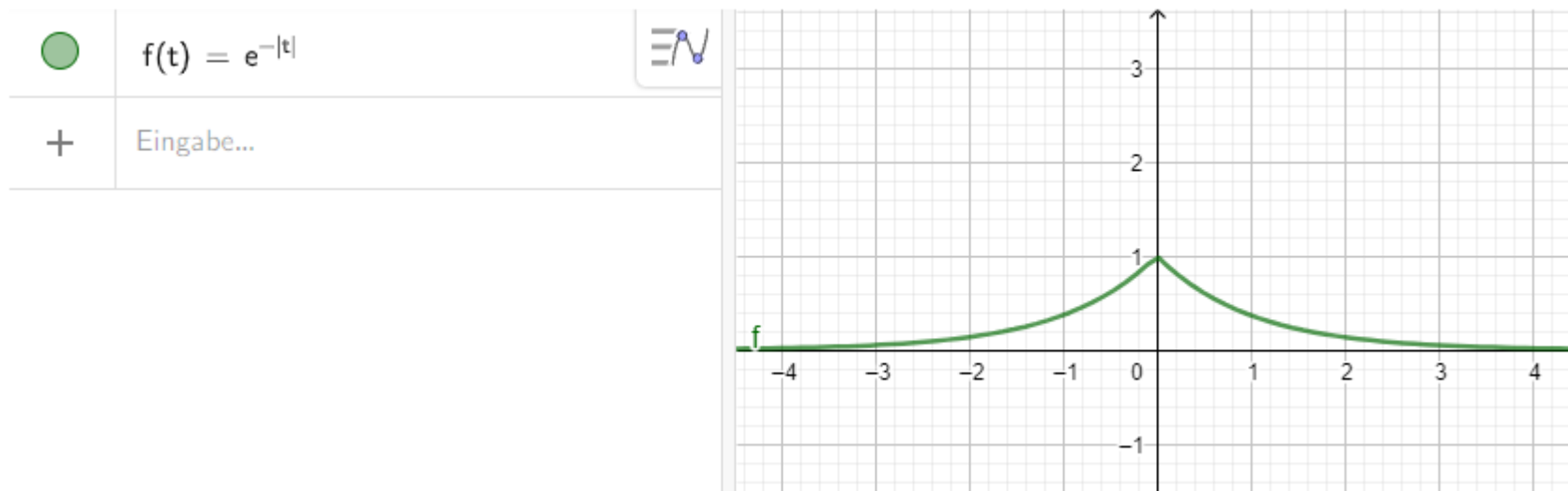
Was folgt, wenn $b < 0$ ist ?

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(bt) \, dt & \tau := bt, \quad t = \frac{1}{b} \tau, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{b} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{b} \tau} f(\tau) \frac{1}{b} d\tau \\ &= \frac{1}{b} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\frac{\omega}{b} \tau} f(\tau) \, d\tau \\ &= -\frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{b} \tau} f(\tau) \, d\tau \\ &= \frac{1}{|b|} F\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad \textbf{Wenn } b < 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Beispiel :

Berechnung der Fouriertransfomierten der Funktion $f(t) = e^{-|t|}$.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ e^t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$



$$f(t) = e^{-|t|} \quad , \quad f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ e^t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-|t|} \, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega t} e^t \, dt + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-t} \, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} \, dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t} \, dt$$

$$F(\omega) = \left. \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right|_0^{\infty}$$

$$F(\omega) = \left. \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - \lim_{L \rightarrow -\infty} \frac{e^{(1-i\omega)L}}{1-i\omega} + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{e^{-(1+i\omega)L}}{-(1+i\omega)} - \frac{1}{-(1+i\omega)}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - \lim_{L \rightarrow -\infty} \frac{e^L e^{-i\omega L}}{1-i\omega} + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{e^{-L} e^{-i\omega L}}{-(1+i\omega)} - \frac{1}{-(1+i\omega)}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}$$

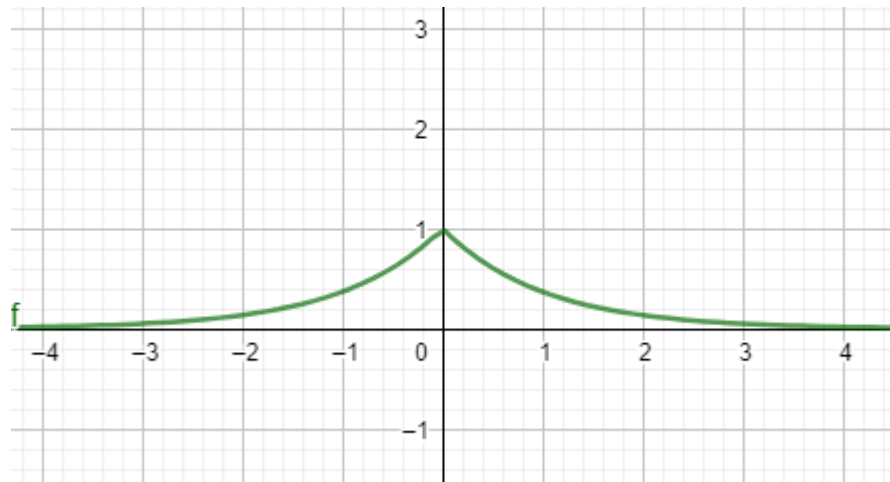
$$F(\omega) = \frac{1+i\omega + 1-i\omega}{1+\omega^2}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ e^t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

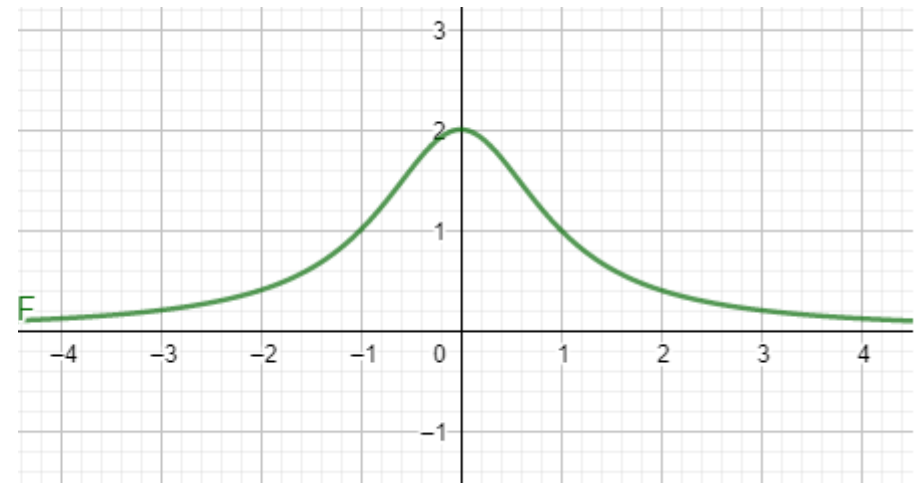
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega$$



Fouriertransformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$



Faltungen und Fouriertransformierte

Die Verknüpfung der Funktionen $f(t)$, $g(t)$ durch $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds$

heißt **Faltung von f und g**.

Die Faltung ist kommutativ, das heißt $(f*g)(t) = (g*f)(t)$.

Beweis :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds \quad s := t-u, \quad \frac{ds}{du} = -1$$

$$(f*g)(t) = \int_{\infty}^{-\infty} f(t-u)g(u)(-1) du$$

$$(f*g)(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} g(u)f(t-u) du$$

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u) du$$

$$(f*g)(t) = (g*f)(t)$$

Die Fouriertransformierte von $(f*g)(t)$ ist $F(\omega)G(\omega)$!

Beweis :

Gegeben seien $f(t)$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$, $g(t)$, $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt$.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (f*g)(t) dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) ds dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(s) g(t-s) ds dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(s) g(t-s) dt ds \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t-s) dt ds & \tau := t-s , \quad t = \tau+s , \quad \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+s)} g(\tau) d\tau ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} g(\tau) d\tau ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} g(\tau) d\tau}_{G(\omega)} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s) G(\omega) ds \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} f(s) ds}_{F(\omega)} G(\omega) \\
&= F(\omega) G(\omega)
\end{aligned}$$

Also ist $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (f*g)(t) dt = F(\omega) G(\omega)$, das heißt , die Fouriertransformierte von $(f*g)(t)$ ist $F(\omega)G(\omega)$.

Die Fouriertransformierte von $f(t)g(t)$ ist $\frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$!

Beweis :

Gegeben seien $f(t)$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$, $g(t)$, $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (F*G)(\omega) d\omega \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(s) G(\omega-s) ds d\omega \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(s) G(\omega-s) d\omega ds \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega-s) d\omega ds \quad \tau := \omega-s, \quad \omega = \tau+s, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 1 \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau+s)t} G(\tau) d\tau ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau+s)t} G(\tau) d\tau ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} G(\tau) d\tau ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(s) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} G(\tau) d\tau}_{g(t)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(s) g(t) ds \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} F(s) ds}_{2\pi f(t)} g(t)
\end{aligned}$$

$$= 2\pi f(t)g(t) \quad \text{Inverse Fouriertansformierte von } (F * G)_{(\omega)}$$

Die Fouriertransformierte von $f(t)g(t)$ ist also $\frac{1}{2\pi}(F * G)_{(\omega)}$.

Faltungen und Fouriertransformierte

Funktion

$$(f * g)(t)$$

$$f(t)g(t)$$

Fouriertransformierte

$$F(\omega)G(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$$

Konjugiert komplexer Funktionen und Fouriertransformation

Funktion

$$\overline{f(t)}$$

$$\overline{f(-t)}$$

Fouriertransformierte

$$\overline{F(-\omega)}$$

$$\overline{F(\omega)}$$

Dies ist leicht zu zeigen !

Satz von Parseval

Gegeben seien die Funktionen

$$f(t), F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{mit} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$
$$g(t), G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt \quad \text{mit} \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega) d\omega .$$

Dann gilt :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} G(\omega) d\omega$$

Beweis :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega) \, d\omega \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega) \, d\omega \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\omega) \, d\omega \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} G(\omega) \, d\omega \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} G(\omega) \, dt \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \overline{f(t)} \, dt \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-i\omega t} f(t)} \, dt \, d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \overline{f(t)} \, dt \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, dt} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \overline{F(\omega)} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} G(\omega) \, d\omega
\end{aligned}$$

Folgerung aus dem Satz von Parseval und $\overline{f(t)} \xrightleftharpoons[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} \overline{F(-\omega)} :$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{f(t)}} g(t) \, dt \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{F(-\omega)}} G(\omega) \, d\omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) G(\omega) \, d\omega}$$

Sinus-Cosinus-Form der Fourier-Darstellung von f

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} F(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$\tilde{\omega} := -\omega, \quad \omega = -\tilde{\omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tilde{\omega}} = -1$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^0 -e^{-i\tilde{\omega} t} F(-\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\tilde{\omega} t} F(-\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\tilde{\omega}t} F(-\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

Umbenennung : $\tilde{\omega} = \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} F(-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) F(-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) F(-\omega) + (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (F(\omega) + F(-\omega)) \cos(\omega t) + i(F(\omega) - F(-\omega)) \sin(\omega t) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2} \cos(\omega t) + i \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2} \sin(\omega t) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2} \cos(\omega t) + i \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2} \sin(\omega t) d\omega$$

$$a(\omega) := \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2}$$

$$b(\omega) := i \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Also :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Sinus-Cosinus-Form
der Fourier-Darstellung von f

Sinus-Cosinus-Form der Fourier-Transformierten F von f

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)] f(t) dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] f(t) dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) f(t) dt + i \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt \right)$$

$$F(\omega) = R(\omega) + i I(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) f(t) dt, \quad I(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt$$

Faltungen

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

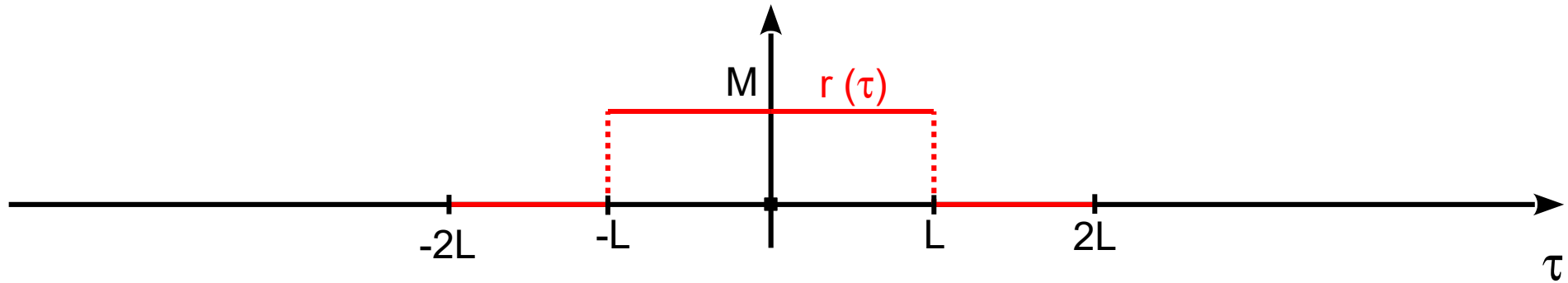
„f gefaltet mit g“

Beispiel :

Gegeben sei die Rechteckfunktion $r(t) = \begin{cases} M & \text{für } t \in [-L; L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

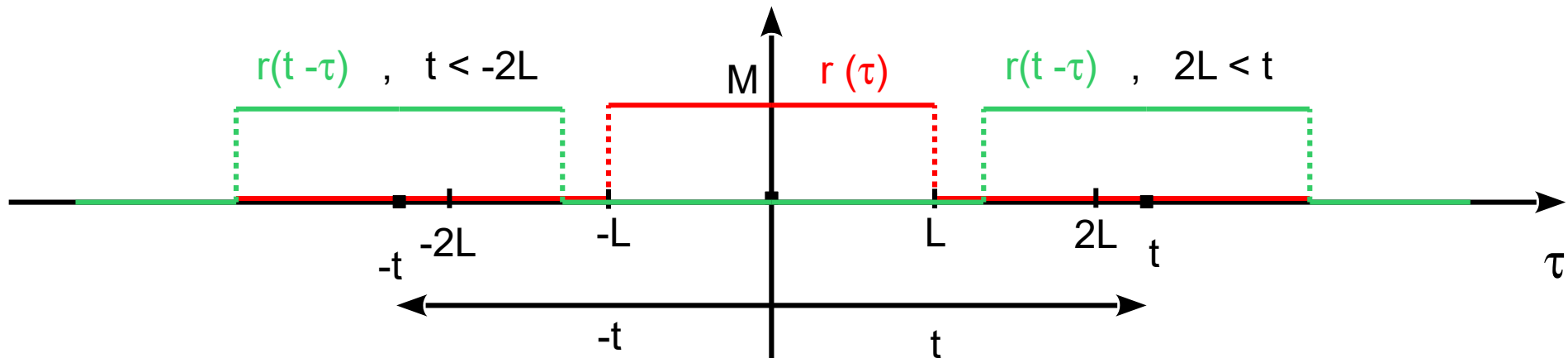
Gesucht ist die Faltung $(r * r)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) r(t - \tau) d\tau$!

$$r(\tau) = \begin{cases} M & \text{für } \tau \in [-L; L) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Produkt $r(\tau) \cdot r(t-\tau)$

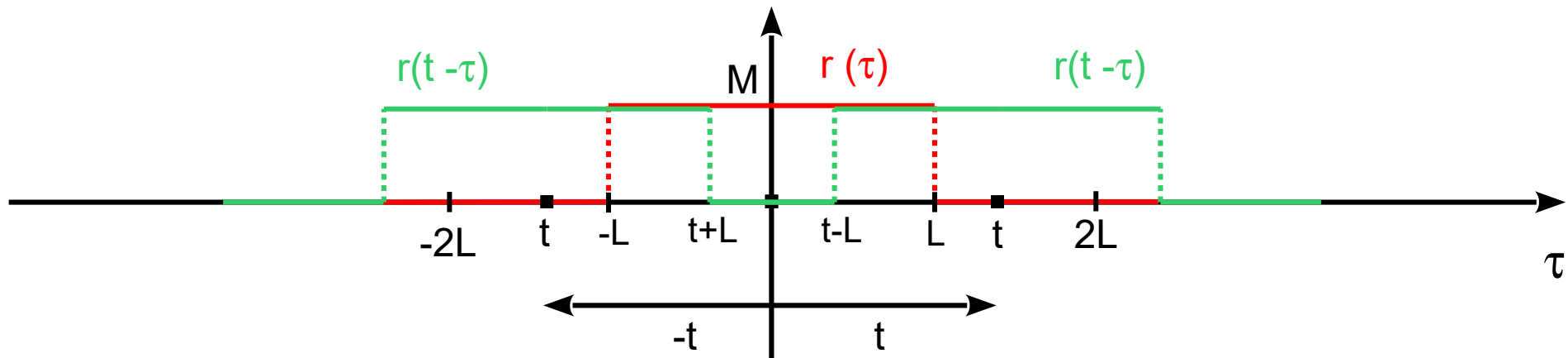
1. Fall : $t < -2L$ oder $2L < t$



In diesem Fall ist $r(\tau) \cdot r(t-\tau) = 0$, da immer mindestens eine der Funktionen gleich Null ist.

Produkt $r(\tau) \cdot r(t-\tau)$

2. Fall : $-2L \leq t \leq 0$ oder $0 \leq t \leq 2L$



In diesen Fällen ist $r(\tau) \cdot r(t-\tau) = M^2$ im Intervall $[-L; t+L]$ bzw. $[t-L; L]$ und ansonsten gleich Null .

Man kann sich deshalb bei der Faltung auf die Intervalle $[-L; t+L]$, $[t-L; L]$ beschränken :

$$(r*r)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot r(t-\tau) d\tau$$

2. Fall : $-2L \leq t \leq 0$

$$(r*r)(t) = \int_{-L}^{t+L} r(\tau) \cdot r(t-\tau) d\tau$$

$$(r*r)(t) = \int_{-L}^{t+L} M^2 d\tau$$

$$(r*r)(t) = \left[M^2 \tau \right]_{-L}^{t+L}$$

$$(r*r)(t) = M^2(t+L) - M^2(-L)$$

$$(r*r)(t) = M^2 t + M^2 L$$

2. Fall : $0 \leq t \leq 2L$

$$(r*r)(t) = \int_{t-L}^L r(\tau) \cdot r(t-\tau) d\tau$$

$$(r*r)(t) = \int_{t-L}^L M^2 d\tau$$

$$(r*r)(t) = \left[M^2 \tau \right]_{t-L}^L$$

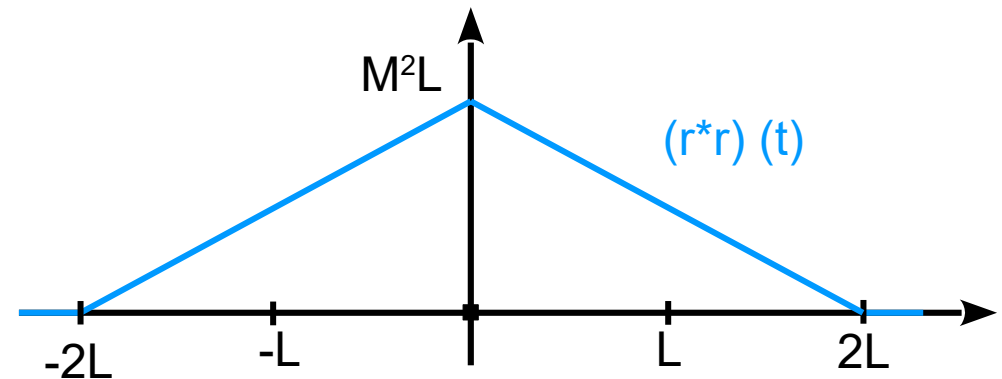
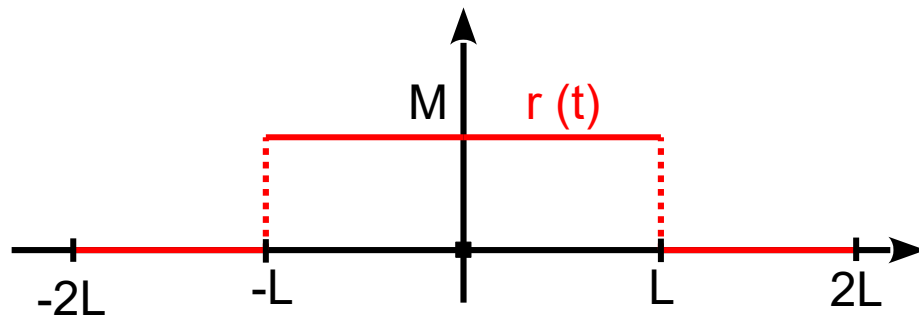
$$(r*r)(t) = M^2 L - M^2(t-L)$$

$$(r*r)(t) = -M^2 t + M^2 L$$

Die **Faltung** $(r*r)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)r(t-\tau) d\tau$ **der Rechteckfunktion** $r(t)$ hat also folgendes Ergebnis :

$$r(t) = \begin{cases} M & \text{für } t \in [-L; L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(r*r)(t) = \begin{cases} M^2 t + M^2 L & \text{für } -2L \leq t \leq 0 \\ -M^2 t + M^2 L & \text{für } 0 \leq t \leq 2L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Einseitige Faltungen

Sind die Funktionen $f(t)$, $g(t)$ für $t < 0$ konstant gleich Null, ergibt sich die Faltung zu

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau ,$$

und da $g(t - \tau)$ für $\tau > t$ konstant Null ist

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

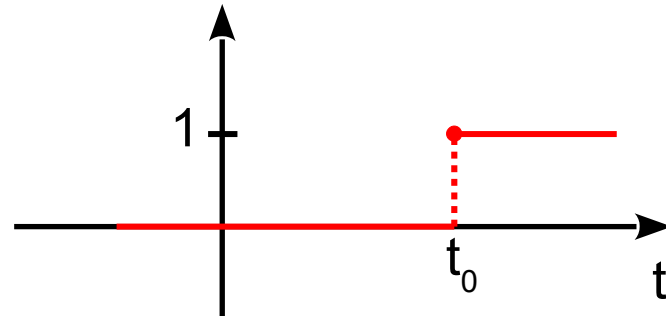
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Einseitige Faltung von $f(t)$ mit $g(t)$

Verallgemeinerte Funktionen

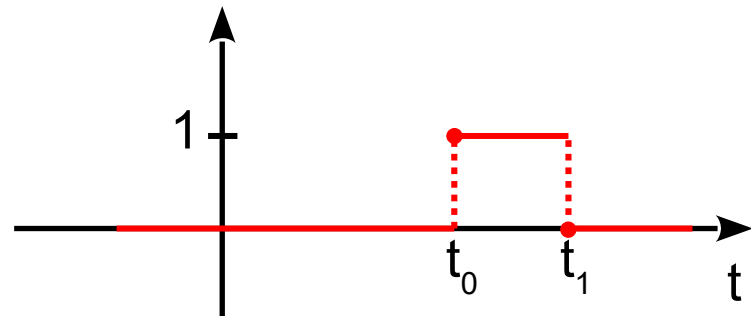
Heavyside-Funktion

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ 1 & \text{für } t_0 \leq t \end{cases}$$

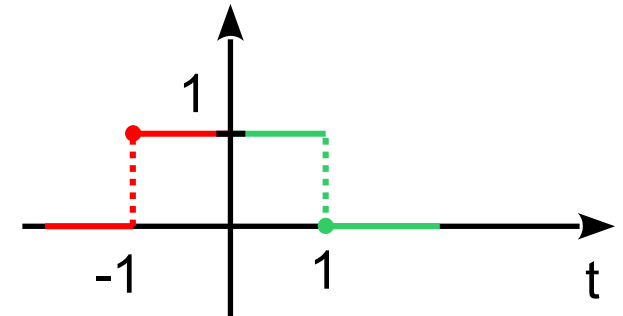


Rechteckfunktion

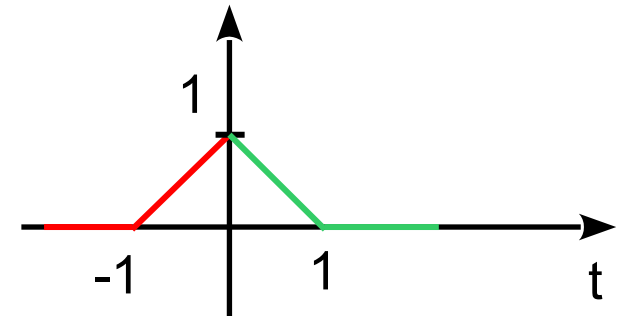
$$r(t) = \sigma(t-t_0) - \sigma(t-t_1)$$



$$\underline{\sigma(t+1) - \sigma(t)} + \underline{\sigma(t) - \sigma(t-1)}$$

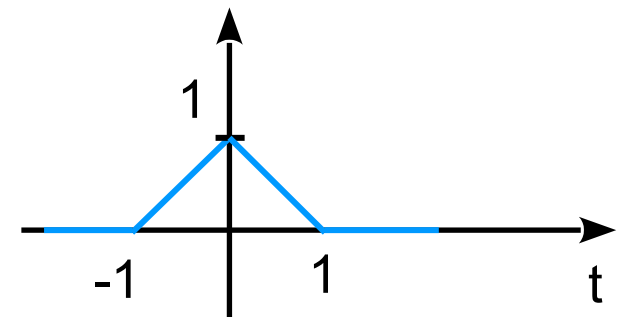


$$\underline{g(t) = t+1} \quad \underline{h(t) = -t+1}$$



Dreieckfunktion

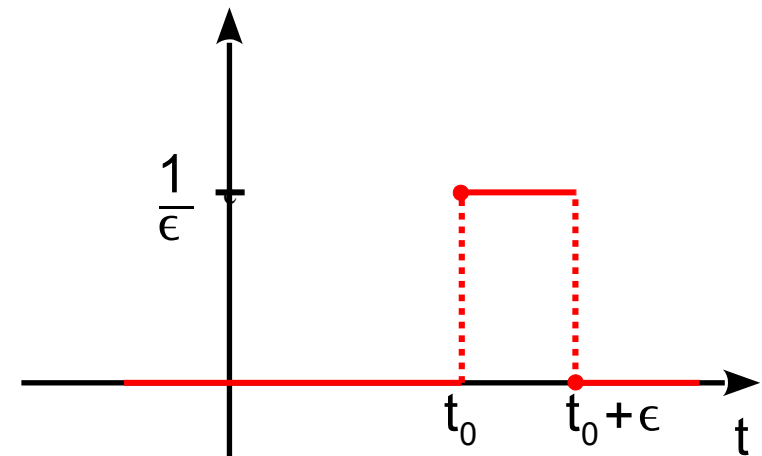
$$u(t) = (t+1)[\sigma(t+1) - \sigma(t)] + (-t+1)[\sigma(t) - \sigma(t-1)]$$



Die Dirac-Funktion $\delta(t-t_0)$

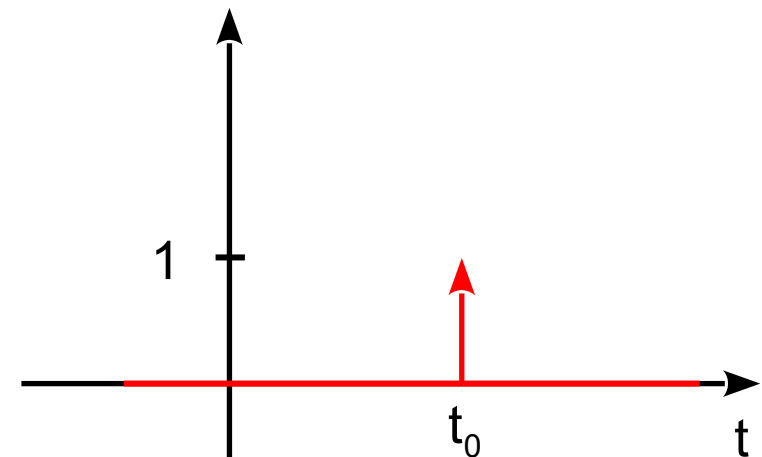
$$d_\epsilon(t-t_0) = \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma(t-t_0) - \sigma(t-(t_0+\epsilon)) \right)$$

$$d_\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \notin [t_0; t_0+\epsilon] \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{für } t \in [t_0; t_0+\epsilon] \end{cases}$$



$$\boxed{\delta(t-t_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_\epsilon(t-t_0)}$$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{für } t=t_0 \\ 0 & \text{für } t \neq t_0 \end{cases}$$



Eigenschaften der Dirac-Funktion

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma(t-t_0) - \sigma(t-(t_0+\epsilon)) \right) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} 1 dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = \left[\frac{1}{\epsilon} t \right]_{t_0}^{t_0+\epsilon}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = \frac{1}{\epsilon}(t_0+\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\epsilon}(t-t_0) dt = 1}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot d_{\epsilon}(t-t_0) \, dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma(t-t_0) - \sigma(t-(t_0+\epsilon)) \right) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) \, dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot d_{\epsilon}(t-t_0) \, dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt$$

Abschätzung : $f(t_{\min}) := f(t_{\min \in [t_0, t_0+\epsilon]}) \leq f(t) \leq f(t_{\max \in [t_0, t_0+\epsilon]}) =: f(t_{\max})$

$$\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t_{\min}) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t_{\max}) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt$$

$$f(t_{\min}) \cdot \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \, dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} \, dt \leq f(t_{\max}) \cdot \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \, dt$$

$$f(t_{\min}) \cdot 1 \leq \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} dt \leq f(t_{\max}) \cdot 1$$

$$f(t_{\min}) \leq \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} dt \leq f(t_{\max})$$

Wegen $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_{\min}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_{\max}) = f(t_0)$

ist $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} dt = f(t_0)$

und damit

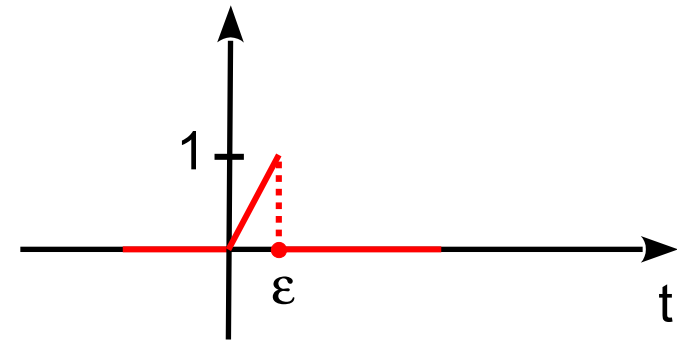
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot d_{\epsilon}(t-t_0) dt = f(t_0) ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

Ausblendeigenschaft der Dirac-Funktion

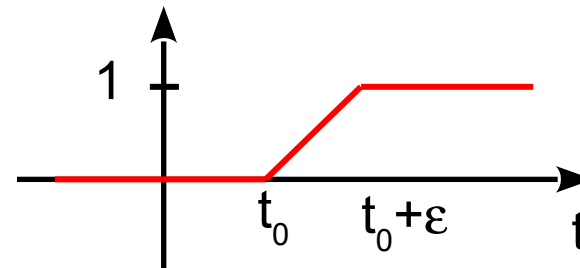
$$(3) \quad t \cdot d_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}t & \text{für } t \in [0; \epsilon) \\ 0 & \text{für } t \notin [0; \epsilon) \end{cases}$$



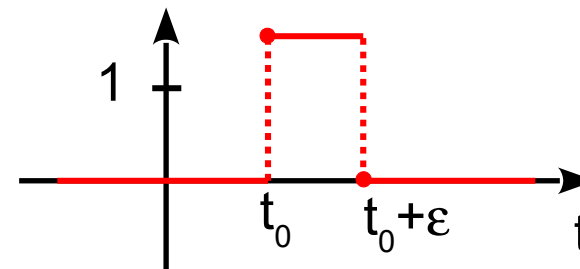
$$t \cdot \delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} t \cdot d_{\epsilon}(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Verallgemeinerte Ableitungen

$$s_\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}t & \text{für } t \in [t_0; t_0+\epsilon) \\ 0 & \text{für } t < t_0 \\ 1 & \text{für } t_0+\epsilon \leq t \end{cases}$$



$$s'_\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } t \in [t_0; t_0+\epsilon) \\ 0 & \text{für } t < t_0 \\ 0 & \text{für } t_0+\epsilon \leq t \end{cases}$$

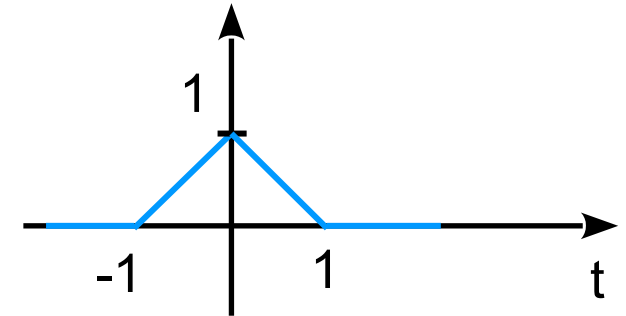


$$\left. \begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_\epsilon(t-t_0) &= \sigma(t-t_0) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s'_\epsilon(t-t_0) &= \delta(t-t_0) \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma'(t-t_0) := \delta(t-t_0)$$

Ableitungen der Dreiecksfunktion

$$\underline{u(t) = (t+1)[\sigma(t+1) - \sigma(t)] + (-t+1)[\sigma(t) - \sigma(t-1)]}$$



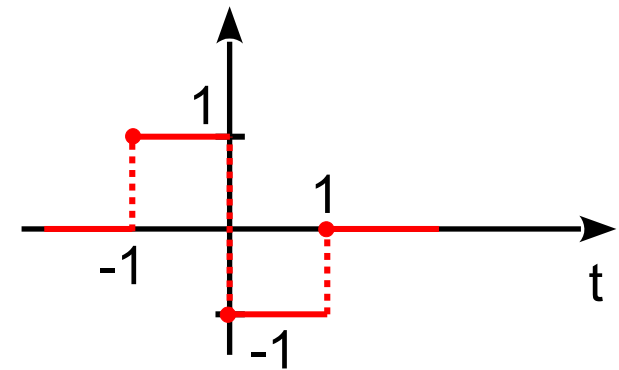
$$u'(t) = \begin{aligned} & 1 \cdot [\sigma(t+1) - \sigma(t)] + (t+1)[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ & (-1) \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-1)] + (-t+1)[\delta(t) - \delta(t-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= [\sigma(t+1) - \sigma(t)] - [\sigma(t) - \sigma(t-1)] \\ &\quad + (t+1)[\delta(t) - \delta(t-1)] + (-t+1)[\delta(t) - \delta(t-1)] \end{aligned}$$

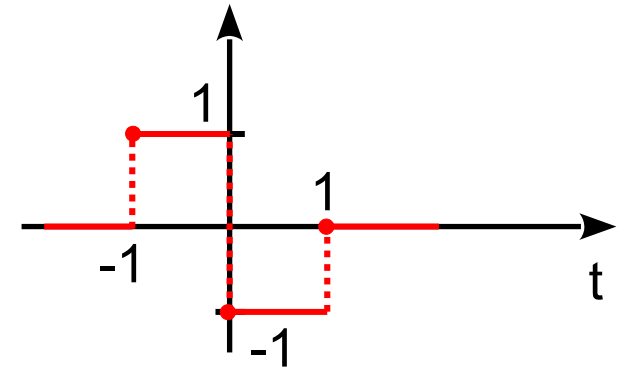
$$\begin{aligned} u'(t) &= [\sigma(t+1) - \sigma(t)] - [\sigma(t) - \sigma(t-1)] \\ &\quad + (t+1)\delta(t+1) - t\delta(t) - \delta(t) - t\delta(t) + \delta(t) + (t-1)\delta(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= [\sigma(t+1) - \sigma(t)] - [\sigma(t) - \sigma(t-1)] \\
 &\quad + \underbrace{(t+1)\delta(t+1)}_0 - \underbrace{2t\delta(t)}_0 + \underbrace{(t-1)\delta(t-1)}_0
 \end{aligned}$$

$$u'(t) = [\sigma(t+1) - \sigma(t)] - [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$$

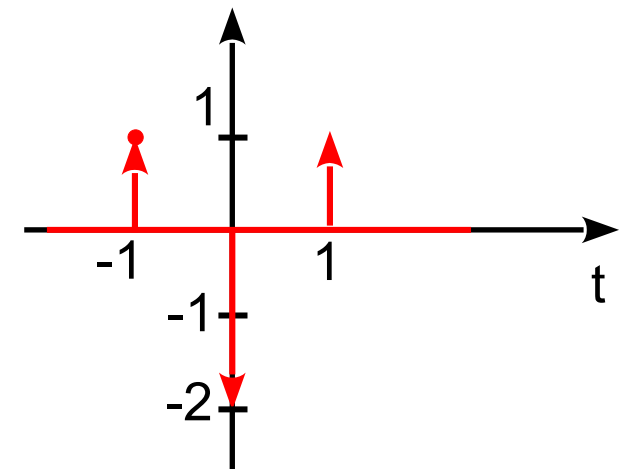


$$u'(t) = [\sigma(t+1) - \sigma(t)] - [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$$



$$u''(t) = [\delta(t+1) - \delta(t)] - [\delta(t) - \delta(t-1)]$$

$$\underline{u''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)}$$



Fouriertransformierte der Dirac-Funktion, der Rechteck- und Dreieckfunktion

$$\delta(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} D(\omega) = 1$$

$$r(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} R(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$u(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{F}^{-1}]{\mathcal{F}} U(\omega) = 4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}$$

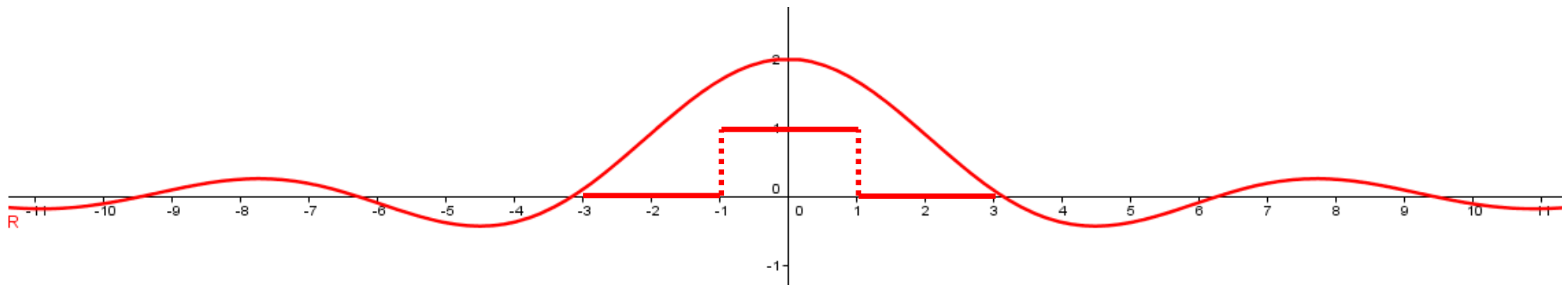
Beweis :

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = e^{-i\omega 0} = 1$$

$$\underline{D(\omega) = 1}$$

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} r(t) dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} \cdot 1 dt = \frac{1}{-i\omega} \left[e^{-i\omega t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = 2 \cdot \frac{1}{i(-i)\omega} \cdot (-i) \frac{(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{R(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}}$$



$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt$$

$$U(\omega) = \int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt + \int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt$$

Nebenrechnung mit partieller Integration :

$$\int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} (t+1) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \cdot 1 dt$$

$$\int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt = \frac{1}{-i\omega} - \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2} \right]_{-1}^0$$

$$\int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt = \frac{1}{-i\omega} - \left(\frac{1}{-\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{-\omega^2} \right)$$

$$\int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt = -\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2}$$

$$\int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} (-t+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \cdot (-1) dt$$

$$\int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} (-t+1) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} dt$$

$$\int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt = \frac{1}{i\omega} + \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt = \frac{1}{i\omega} + \left(\frac{e^{-i\omega}}{-\omega^2} - \frac{1}{-\omega^2} \right)$$

$$\int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt = \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}$$

Es folgt :

$$U(\omega) = \int_{-1}^0 e^{-i\omega t} (t+1) dt + \int_0^1 e^{-i\omega t} (-t+1) dt$$

$$U(\omega) = -\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left(1 - \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \right)$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega))$$

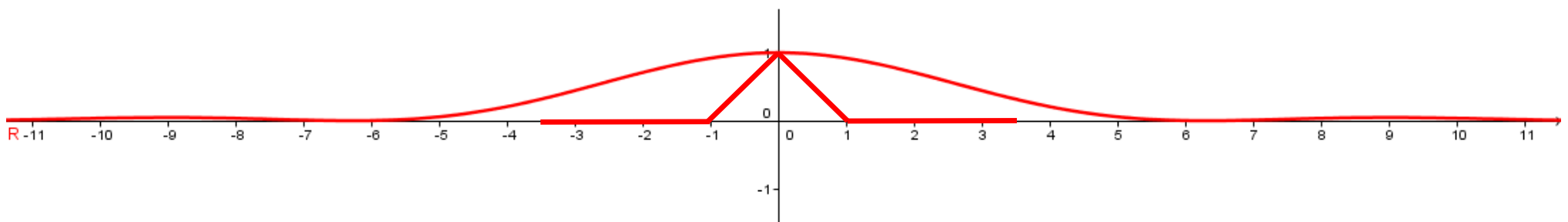
$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left(1 - \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \right)$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left(2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)$$

$$U(\omega) = 4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}$$



Laplace-Transformation

Im Folgendem betrachtet man Funktionen $f(t)$, die erst ab dem Zeitpunkt $t=0$ beginnen.

Das **Fourier-Integral** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ von $f(t)$ würde existieren, falls diese nicht schneller wächst als eine gewisse Exponentialfunktion $e^{\beta t}$, $\beta > 0$.

Für $\sigma > \beta$ würde dann auch das Integral $\int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-\sigma t} f(t) dt$ existieren, da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} f(t) = 0$ ist.

Dieses Integral heißt die **Laplace-Transformierte** $\mathcal{L}(f)$ von f :

$$\mathcal{L}(f)(\sigma+i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} f(t) dt$$

Mit $\mathcal{L}(f) = F$ und $s = (\sigma + i\omega)$, $\sigma > \beta$ schreibt man für die **Laplace-Transformierte**

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

Man schreibt auch :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad s = (\sigma + i\omega), \quad \sigma > \beta$$

Der für die Konvergenz des Integrals erlaubte Bereich der komplexen Zahlenebene $\{ s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : \sigma > \beta \}$ heißt **Konvergenzbereich** der Laplace-Transformierten .

Beispiele

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} \, dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t} \, dt \quad \text{zulässiger Bereich : } \sigma > 0$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} \, dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{\sigma+i\omega} e^{-(\sigma+i\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{\sigma + i\omega} e^{-(\sigma + i\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

$$F(s) = 0 - \left(-\frac{1}{\sigma + i\omega} \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{\sigma + i\omega}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s}$$

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \quad \text{Partielle Integration} \quad u' = e^{-st}, \quad v = t$$

$$u = -\frac{1}{s} e^{-st}, \quad v' = 1$$

$$F(s) = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u v' dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot 1 dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot 1 \, dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t \right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

$$F(s) = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2} \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

(3) Man kann zeigen, dass durch sukzessive Anwendung der partiellen Integration und nach dem Prinzip des endlichen Abstiegs von n bis 0, gilt :

$$f(t) = \begin{cases} t^n & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t^n \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot n t^{n-1} dt$$

$$F(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t^n \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt$$

$$F(s) = (0 - 0) + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt$$

$$F(s) = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt \quad \text{u.s.w.}$$

(4) Für die Laplace-Transformierte der allgemeinen Potenzfunktion gilt :

$$f(t) = \begin{cases} t^r & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$$

$$r \in \mathbb{R}, \quad r > -1$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt \quad \text{Substitution : } u=st, \quad t=\frac{u}{s}, \quad dt=\frac{1}{s} du$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \frac{1}{s} du$$

$$F(s) = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^r du \quad \Gamma(r+1) := \int_0^{\infty} e^{-u} u^r du \quad \text{Gammafunktion}$$

Rekursionsformel durch partielle Integration

$$\Gamma(r+1) = r \Gamma(r) = r(r-1) \Gamma(r-1) \dots$$

$$F(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$$

$$(5) \quad f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(t) \, dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot -i \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} \, dt$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{it} - e^{-it}) \, dt$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{(-s+i)t} \, dt - \int_0^{\infty} e^{(-s-i)t} \, dt \right)$$

Nebenbetrachtung :

$$e^{(-s+i)t} = e^{(-\sigma-i\omega+i)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-i(\omega-1)t}$$

$$e^{(-s-i)t} = e^{(-\sigma-i\omega-i)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-i(\omega+1)t}$$

Die Terme $e^{-i(\omega-1)t}$, $e^{-i(\omega+1)t}$ sind vom Betrag gleich 1, deshalb ist der zulässige Konvergenzbereich $\sigma > 0$, da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} f(t) = 0$ ist.

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{(-s+i)t} dt - \int_0^{\infty} e^{(-s-i)t} dt \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\left[\frac{1}{-s+i} e^{(-s+i)t} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{-s-i} e^{(-s-i)t} \right]_0^{\infty} \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\left(0 - \frac{1}{-s+i} \right) - \left(0 - \frac{1}{-s-i} \right) \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\frac{-1}{-s+i} + \frac{1}{-s-i} \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\frac{-(-s-i)}{s^2+1} + \frac{-s+i}{s^2+1} \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\frac{-(-s-i) - s+i}{s^2+1} \right)$$

$$F(s) = -\frac{i}{2} \left(\frac{2i}{s^2+1} \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Inverse Laplace-Transformierte

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot e^{-\sigma t} f(t) dt$$

Fourier-Transformierte von $e^{-\sigma t} f(t)$

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(s) d\omega$$

inverse Fourier-Transformierte von $F(s)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t} e^{i\omega t} F(s) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} F(\sigma+i\omega) d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\omega)t} F(\sigma+i\omega) d\omega$$

σ fest

$$s = \sigma + i\omega, \quad \omega = -is + i\sigma, \quad d\omega = -ids$$

$$f(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} F(s) ds$$

Die Schreibweise mit ds ist auch deshalb gerechtfertigt, da der Integrationsbereich gleich der zur imaginären Achse parallelen Geraden $\Gamma_{\sigma} = \{ \sigma + i\omega \in \mathbb{C} : -\infty < \omega < \infty \}$ ist.

Laplace-Transformierte und inverse Laplace-Transformierte

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
 f(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} F(s) ds & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & F(s)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \xrightleftharpoons{\mathcal{L}} & F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
 f(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} F(s) ds & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & F(s)
 \end{array}$$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Die **Linearität** der Laplace-Transformation beruht auf der Linearität des Integrals :

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^n c_i F_i(s)$$

Verschiebung :

$$f(t-t_0) \sigma(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} \cdot F(s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-t_0) \sigma(t-t_0) dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-s((t-t_0)+t_0)} f(t-t_0) dt = \\ &= e^{-st_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-s(t-t_0)} f(t-t_0) dt = e^{-st_0} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s(\tau)} f(\tau) d\tau = e^{-st_0} \cdot F(s) \end{aligned}$$

Dämpfung :

$$f(t) \cdot e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \cdot f(t) dt = F(s+a)$$

Ähnlichkeit

$$f(bt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right)$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(bt) dt = \int_0^{\infty} e^{-s\frac{\tau}{b}} \cdot f(\tau) \frac{1}{b} d\tau = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{\frac{s}{b}\tau} \cdot f(\tau) d\tau = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right)$$

Faltung :

$$f(t)*g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \cdot G(s)$$

Beweis :

$$f(t)*g(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau, \text{ da } g(t-\tau)=0 \text{ f\"ur } t>\tau.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau dt, \text{ da}$$

f\"ur die Heavyside-Funktion gilt : $\sigma(t-\tau)=0$ f\"ur $\tau>t$ und $\sigma(t-\tau)=1$ f\"ur $\tau \in [0;t]$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(\tau)g(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) d\tau dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(\tau) g(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) dt d\tau$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot g(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) dt d\tau$$

Nach der Eigenschaft der Verschiebung ist

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot g(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) dt = e^{-s\tau} \cdot G(s),$$

so dass folgt :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \cdot G(s) d\tau$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot G(s)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt = F(s) \cdot G(s)$$

Integralsatz :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$$

Beweis :

$$f(t) * \sigma() \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \cdot F(s) \quad \text{Faltungseigenschaft}$$

$$f(t) * \sigma() = \int_0^\infty f(\tau) \sigma(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \sigma(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Differentiationssatz :

$$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(+0)$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s e^{-st}) dt \quad \text{partielle Integration}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left(0 - f(+0) \right) + s \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left(0 - f(+0) \right) + sF(s)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(+0)$$

$$f''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 F(s) - sf(+0) - f'(+0)$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = s(sF(s) - f(+0)) - f'(+0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = s^2 F(s) - sf(+0) - f'(+0)$$

$$f'''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^3 F(s) - s^2 f(+0) - sf'(+0) - f''(+0)$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'''(t) dt = s(s^2 F(s) - sf(+0) - f'(+0)) - f''(+0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'''(t) dt = s^3 F(s) - s^2 f(+0) - sf'(+0) - f''(+0)$$

Die **Laplace-Transformierte** der **Delta-Funktion** beruht auf deren Ausblendeigenschaft :

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}$$

Beweis :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \delta(t-t_0) dt = e^{-st_0}$$

Weitere Beispiele :

(6)

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(at) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Beweis :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty} = \left(0 - \left(\frac{-1}{s-a} \right) \right) = \frac{1}{s-a}$$

$$\sin(at) = -i \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2}$$

$$\sin(at) = -\frac{i}{2} e^{iat} + \frac{i}{2} e^{-iat}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = -\frac{i}{2} \mathcal{L}(e^{iat}) + \frac{i}{2} \mathcal{L}(e^{-iat}) \quad \text{Linearität}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = -\frac{i}{2} \frac{1}{s-ia} + \frac{i}{2} \frac{1}{s+ia}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right)$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = -\frac{i}{2} \left(\frac{s+ia - (s-ia)}{(s-ia)(s+ia)} \right)$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = -\frac{i}{2} \left(\frac{2ia}{(s-ia)(s+ia)} \right)$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\cos(at) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$$\cos(at) = \frac{1}{2}e^{iat} + \frac{1}{2}e^{-iat}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{iat}) + \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{-iat}) \quad \text{Linearität}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+ia}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right)$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \left(\frac{s+ia + (s-ia)}{(s-ia)(s+ia)} \right)$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{(s-ia)(s+ia)} \right)$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung von Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$f'(t) + 2f(t) = \sin(t) \quad , \quad f(+0)=0 \quad .$$

Falls die Laplacetransformierte der Funktionen existieren, kann die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation in die folgende Algebraische Gleichung übersetzt werden :

$$sF(s) - f(+0) + 2F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$sF(s) + 2F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s)(s+2) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs + C}{s^2+1} \quad \text{Partialbruchzerlegung}$$

$$\frac{A}{s+2} + \frac{Bs + C}{s^2+1} = \frac{1}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$A(s^2+1) + (Bs + C)(s+2) = 1$$

$$s=-2 : 5A = 1 \Rightarrow A=0,2$$

$$s=0 : A + 2C = 1 \Rightarrow 0,2 + 2C = 1 \Rightarrow C = 0,4$$

$$s=1 : 2A + 3B + 3C = 1 \Rightarrow 0,4 + 3B + 1,2 = 1 \Rightarrow B = -0,2$$

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs + C}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{0,2}{s+2} + \frac{-0,2s + 0,4}{s^2+1}$$

$$F(s) = 0,2 \left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} \right)$$

Nun wird die inverse Laplacetransformierte gebildet :

$$\mathcal{L}^{-1} (F(s)) = \mathcal{L}^{-1} \left(0,2 \left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} \right) \right)$$

$$f(t) = 0,2 \left(e^{-2t} - \cos(t) + 2\sin(t) \right)$$

Lösung der Differentialgleichung $f'(t) + 2f(t) = \sin(t)$, $f(+0)=0$.