Wahrscheinlichkeitsrechnung

Arno Fehringer

April 2022

Eine Definition des Begriffs der Wahrscheinlichkeit geht auf den französischen Mathematiker **Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)** zurück .

https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

Würfelexperiment

Zwei Spielwürfel, ein roter und ein blauer, werden gleichzeitig geworfen.

Welche und wie viel Ergebnisse gibt es ?

Wie kann man die Ergebnisse darstellen ?

Zur Darstellung der Ergebnisse könnte man eine Tabelle machen :

blau

rot

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Anzahl der für ein Ereignis günstigen Ergebnisse

(1) A = { Das Ergebnis zeigt eine 6 }

(2) B = { Das Ergebnis zeigt eine Primzahl }
Primzahlen sind nur durch 1 und sich selbst teilbar, also die Zahlen 2,3,5 .

(3) C = { Die Summe der Augenzahlen ist gerade }

(4) D = { Der rote Würfel zeigt weniger an als der blaue }

Anzahl der für ein Ereignis günstigen Ergebnisse

(1) A = { Das Ergebnis zeigt eine 6 }

61	62	63	64	65	66
16	26	36	46	56	

#A = 11

(2) B = { Das Ergebnis zeigt eine Primzahl }

Es gibt 9 Ergebnisse ohne Primzahlen :

11	14	16
41	44	46
61	64	66

#B = 36 – 9 = 27

(3) C = { Die Summe der Augenzahlen ist gerade }

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

#C = 18

(4) D = { Der rote Würfel zeigt weniger an als der blaue }

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

#D = 15

Definition der Wahrscheinlichkeit

Die **Wahrscheinlichkeit** p eines Ereignisses E nach **Laplace** lautet wie folgt :

$$\boxed{p(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Gesamtzahl der Ergebnisse}}}$$

Beispiel :
Beim Werfen zweier Würfel wird das Ereignis A = { Das Ergebnis zeigt eine 6 } betrachtet .

$$p(A) = ?$$

Definition der Wahrscheinlichkeit

Die **Wahrscheinlichkeit** p eines Ereignisses E nach **Laplace** lautet wie folgt :

$$\boxed{p(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Gesamtzahl der Ergebnisse}}}$$

Beispiel :
Beim Werfen zweier Würfel wird das Ereignis A = { Das Ergebnis zeigt eine 6 } betrachtet .

$$p(A) = \frac{\# A}{36} = \frac{11}{36}$$

Wahrscheinlichkeitssätze : Additions- und Produktsatz

Betrachtet werden beim Werfen zweier Würfel die Ereignisse

$A = \{\text{Augensumme ist 5}\}$, $B = \{\text{rot zeigt weniger als blau}\}$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten $p(A)$ **,** $p(B)$ **,** $p(A \cap B)$ **,** $p(A \cup B)$ **!**

Erklärung der Schreibweisen :

$A \cap B$: „A und B“ : A und B sind erfüllt .

$A \cap B$ heißt **Schnittmenge** oder **Schnitt von A und B** .

$A \cup B$: „A oder B“ : A oder B oder beide sind erfüllt

$A \cup B$ heißt Vereinigungsmenge oder **Vereinigung von A und B** .

Veranschaulichung der Ereignisse an der Tabelle :

$A = \{\text{Augensumme ist } 5\}$, $B = \{\text{rot zeigt weniger als blau}\}$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A

B

$$p(A) = \frac{\#A}{36} = \frac{4}{36}$$

$$p(B) = \frac{\#B}{36} = \frac{15}{36}$$

$$p(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{36} = \frac{2}{36}$$

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{36} = \frac{17}{36}$$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A

B

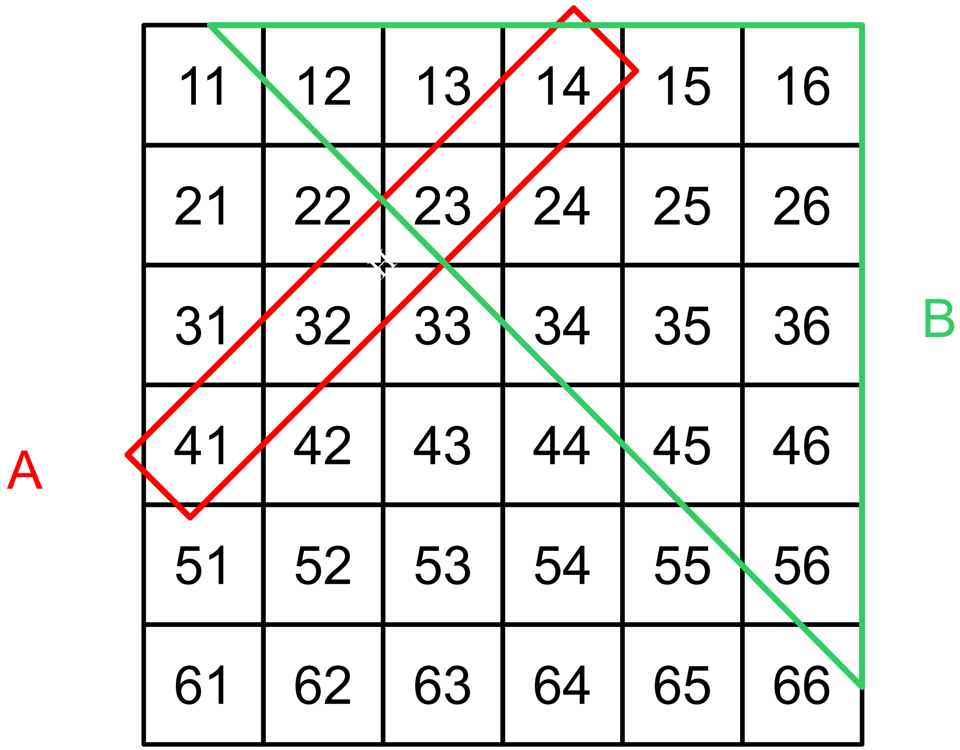
Wie berechnet man $\#(A \cup B)$?

$$p(A) = \frac{\#A}{36} = \frac{4}{36}$$

$$p(B) = \frac{\#B}{36} = \frac{15}{36}$$

$$p(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{36} = \frac{2}{36}$$

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{36} = \frac{17}{36}$$



Wie berechnet man $\#(A \cup B)$?

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Mit diesem Ergebnis $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$ **folgt weiter :**

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{36}$$

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)}{36}$$

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A)}{36} + \frac{\#(B)}{36} - \frac{\#(A \cap B)}{36}$$

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Allgemeiner Additionssatz

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Allgemeiner Additionssatz

Falls die Ereignisse A , B **disjunkt,** $A \cap B = \{\,\}$ **, also die Schnittmenge die leere Menge ist, gilt :**

$$p(A \cap B) = 0$$

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

(Spezieller) **Additionssatz**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

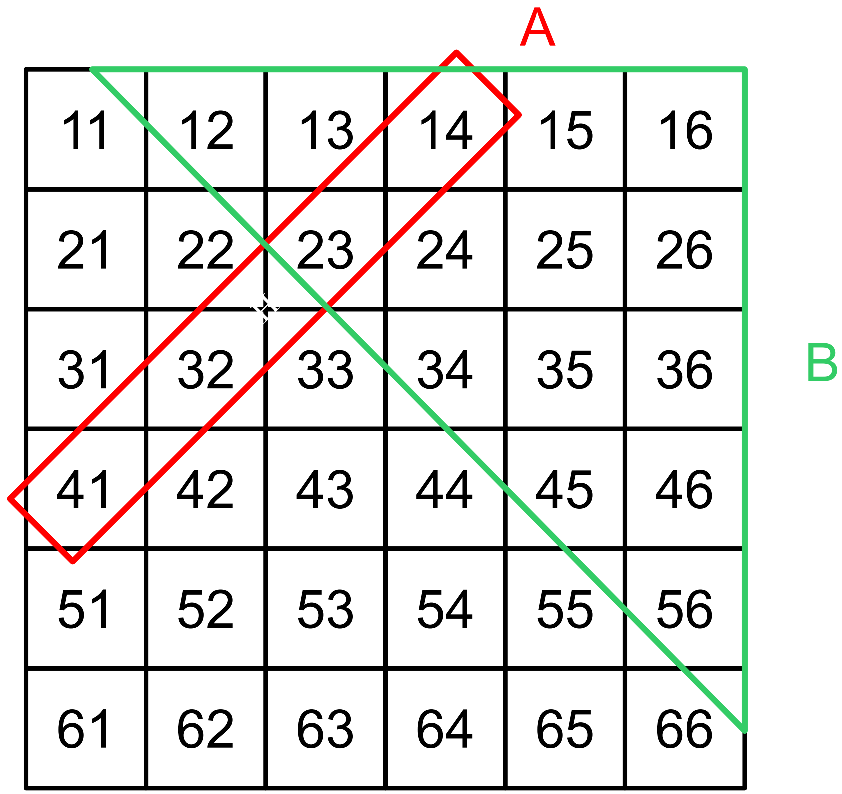
Betrachtet werden beim Werfen eines roten und eines blauen Würfels die Ereignisse

$A = \{\text{Augensumme ist } 5\}$,

$B = \{\text{rot zeigt weniger als blau}\}$.

Nach dem Wurf hebt der Akteur den Becher leicht an und verkündet, dass das Ereignis B eingetreten sei .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch A eingetreten ist ?



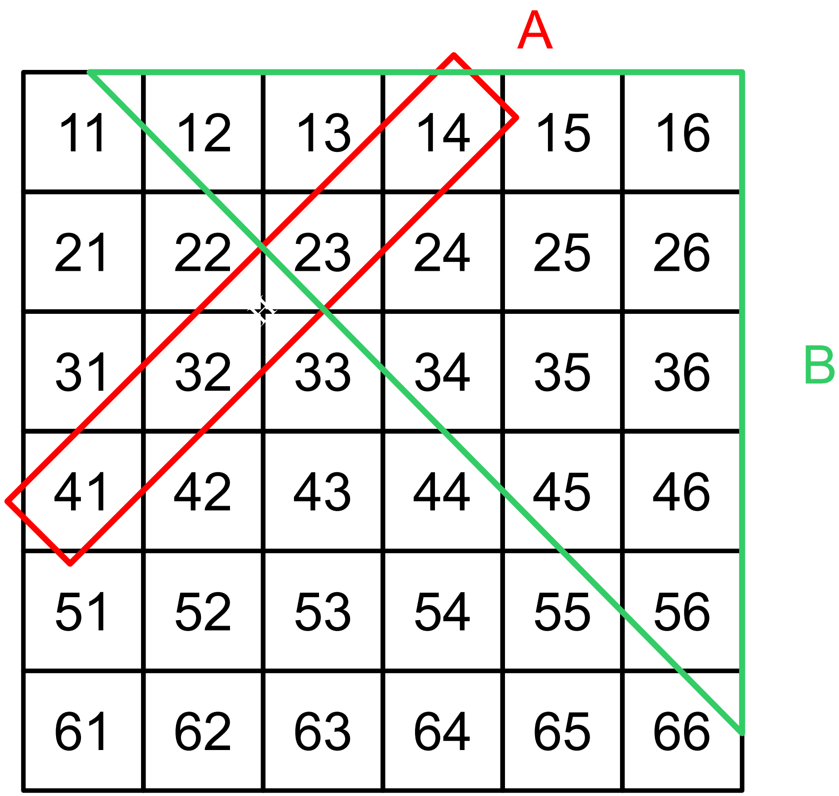
Man fragt also nach der Wahrscheinlichkeit von A falls B eingetreten ist.
Dafür schreibt und spricht man : $p_B(A)$, „p B von A“ .

Den Ausdruck $p_B(A)$ nennt man auch **die durch B bedingte Wahrscheinlichkeit von A** .

Wie berechnet man nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_B(A)$?

$$p_B(A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$ nach Laplace !

$$p_B(A) = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{36}}{\frac{\#B}{36}}$$ Kürzen mit 36 !



$$\boxed{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

Falls nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_B(A)$ gleich der Wahrscheinlichkeit $p(A)$ wäre,

falls das Eintreten von B die Wahrscheinlichkeit von A nicht beeinflussen würde,

falls also die Ereignisse **A und B unabhängig voneinander** wären, würde folgen :

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{und} \quad \boxed{p(A \cap B) = p(A)p(B)}$$

Produktsatz

Bemerkungen :

1. Es gibt unabhängige Ereignisse !

Beispiel :

$A = \{\text{rot zeigt } 1\}$

$B = \{\text{blau zeigt gerade}\}$

$$p_A(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

$$p(B) = \frac{18}{36} = 0{,}5$$

$$p_A(B) = p(B)$$

A

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

B

2. A sei unabhängig von B , das heißt $p_B(A) = p(A)$ **.**
Dann ist auch B unabhängig von A und es gilt $p_A(B) = p(B)$ **.**

Beweis :

$$p_B(A) = p(A) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)\ p(A)$$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{p(A)\ p(B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = p(B)$$

3. Für die Komplementmenge $\overline{A}$ von A gilt : $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ **.**

Beispiel :

$A\{\text{Augensumme ist } 5\}$

$\overline{A}\{\text{Augensumme ist ungleich } 5\}$

$$p(A) = \frac{4}{36}$$

$$p\left(\overline{A}\right) = \frac{36-4}{36}$$

$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{4}{36} = 1 - p(A)$$

$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

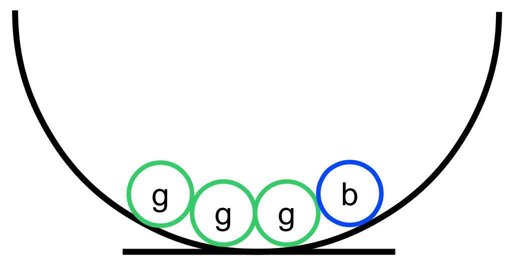
11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A

$\overline{A}$

Urnenexperiment

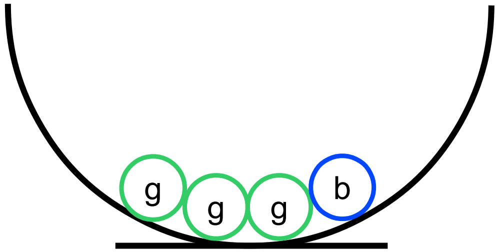
Aus einer Urne mit 3 grünen und 1 blauen Kugel wird 3 Mal nacheinander eine Kugel gezogen, angeschaut und wieder zurückgelegt .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 3 Mal eine blaue Kugel gezogen ?



Urnenexperiment

Aus einer Urne mit 3 grünen und 1 blauen Kugel wird 3 Mal nacheinander eine Kugel gezogen, angeschaut und wieder zurückgelegt .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 3 Mal eine blaue Kugel gezogen ?

$$p(g) = \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad p(b) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$



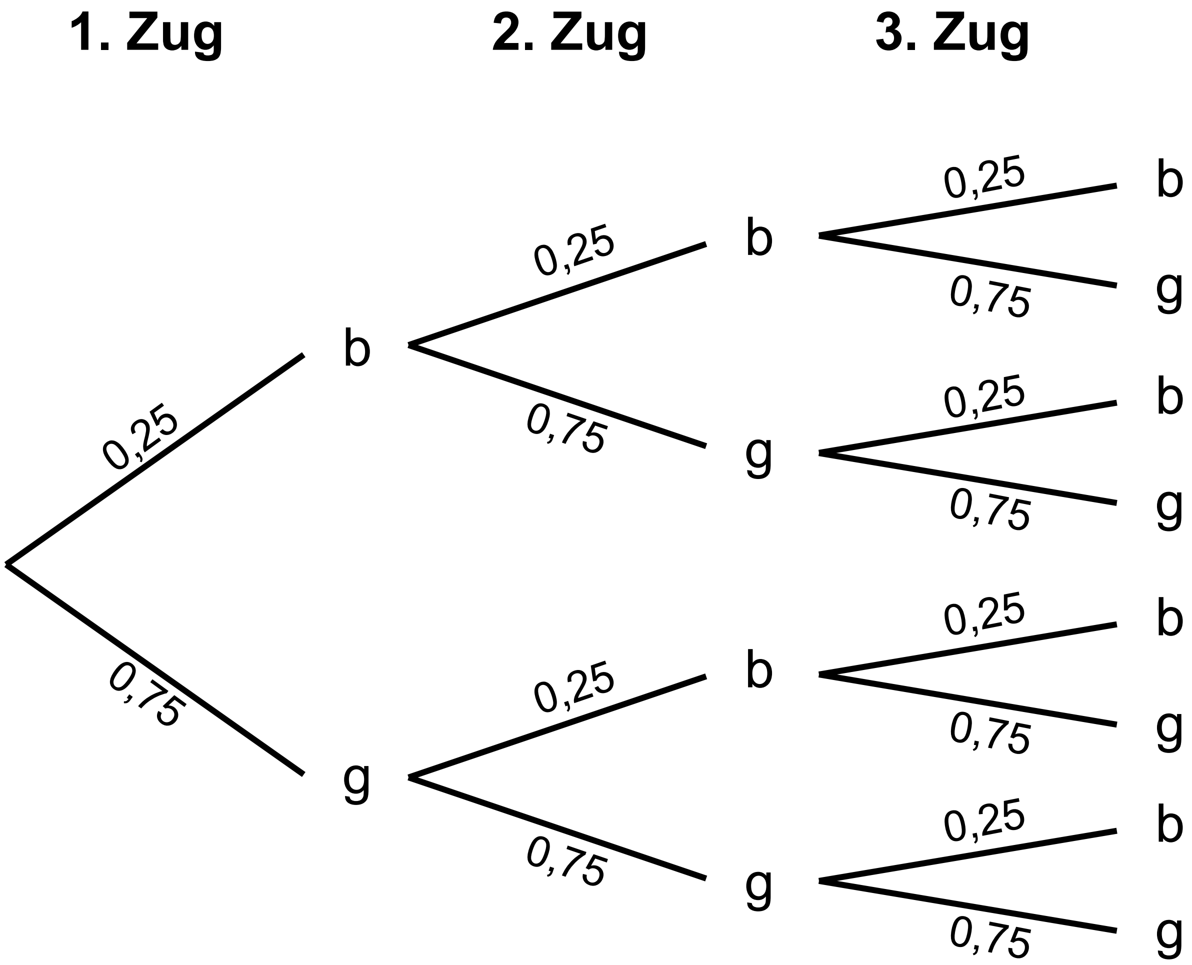
Produktsatz

$$p(\{1.\ \text{Zug}\ \ b\} \cap \{2.\ \text{Zug}\ \ b\} \cap \{3.\ \text{Zug}\ \ b\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

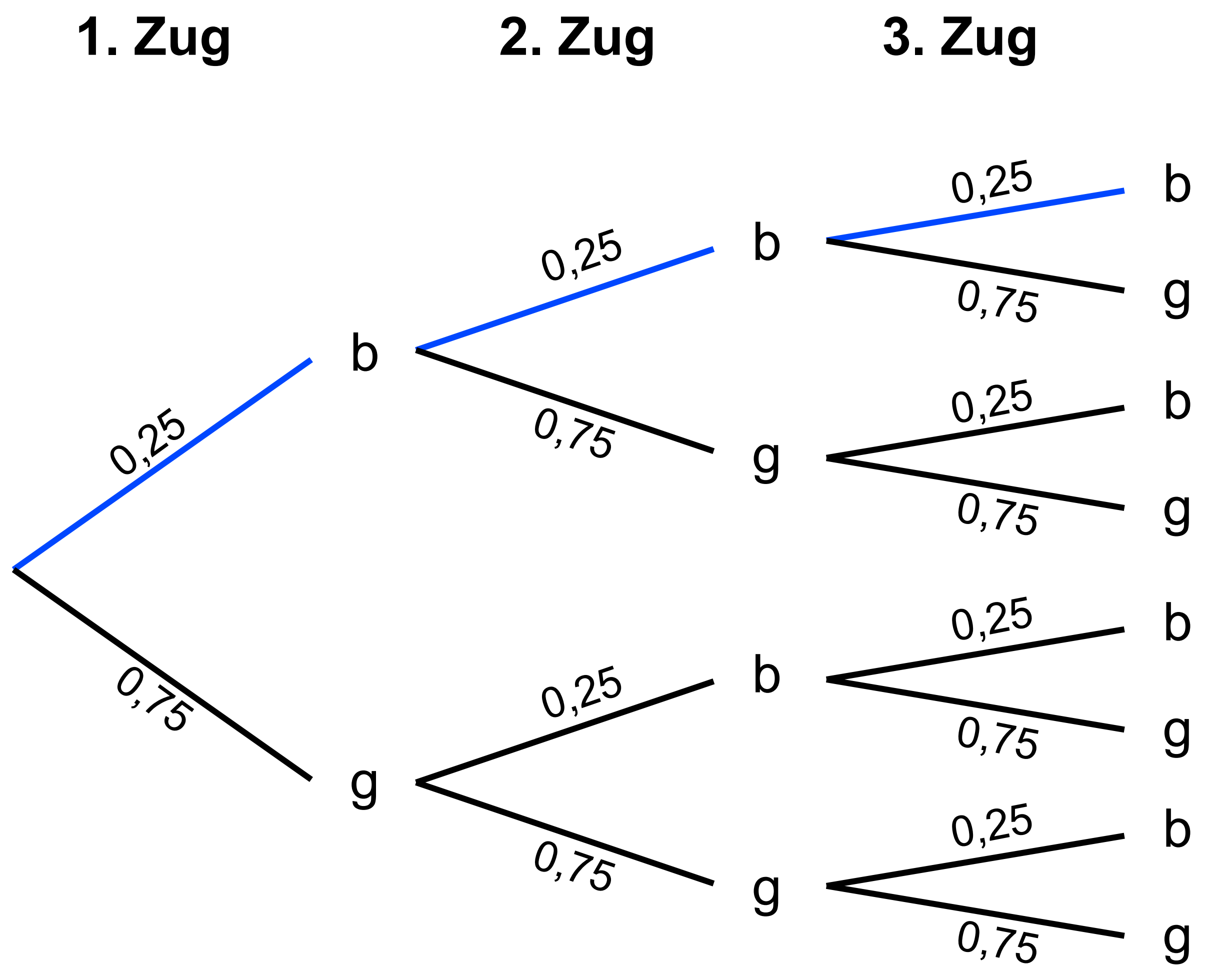
$$p(\{1.\ \text{Zug}\ \ b\} \cap \{2.\ \text{Zug}\ \ b\} \cap \{3.\ \text{Zug}\ \ b\}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$p(\{b\,b\,b\}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Darstellung des Urnenexperiments mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum



Darstellung des Urnenexperiments mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum



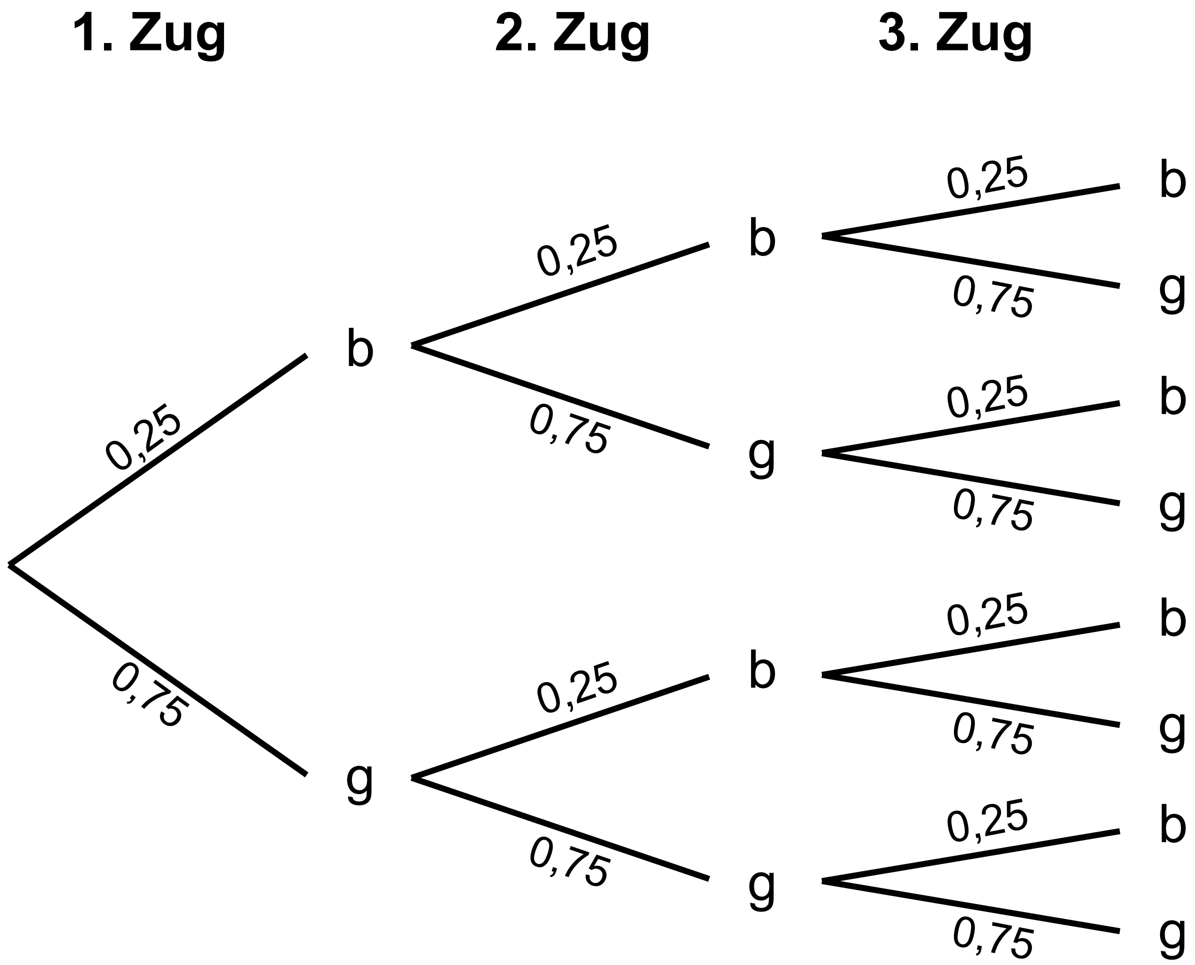
P (bbb) = 0.25 ·0,25· 0,25

P (bbb) = $0{,}25^3$

Pfadregel :

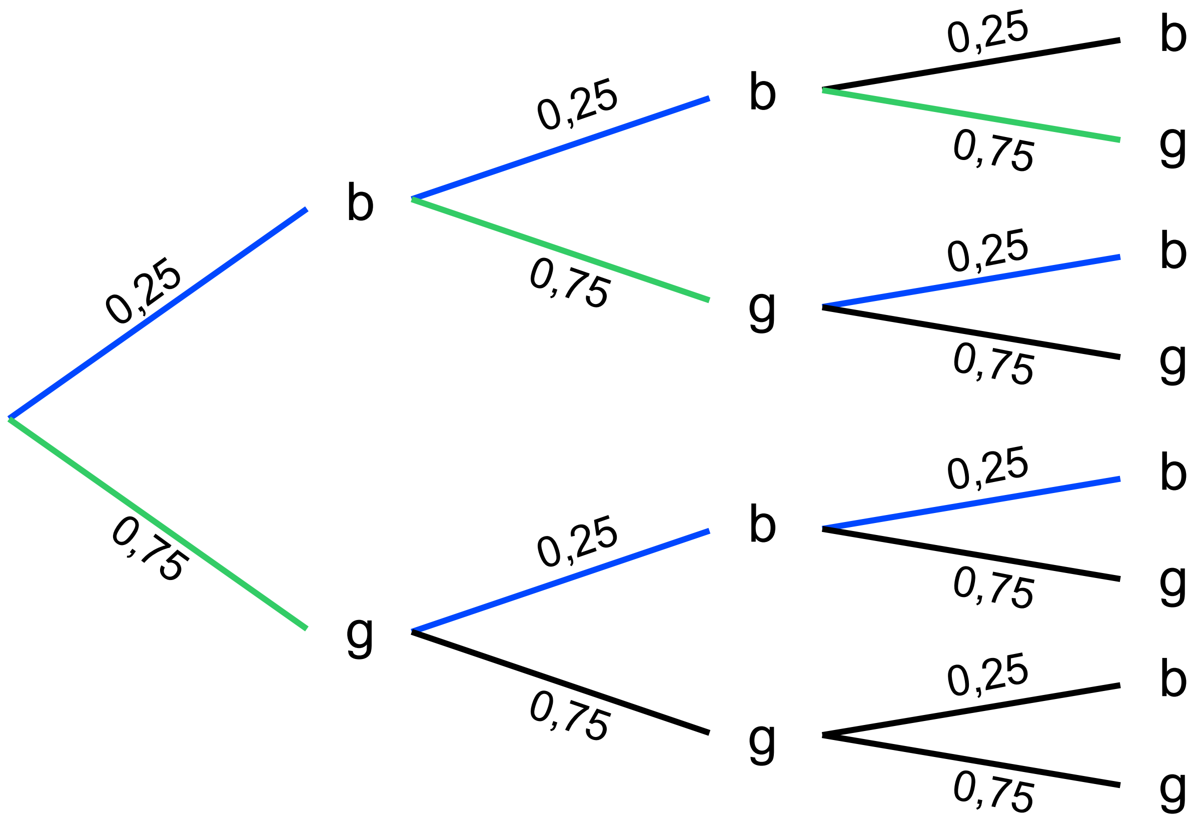
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 Zügen mit Zurücklegen genau 2 Mal eine blaue Kugel gezogen wird !



Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 Zügen mit Zurücklegen genau 2 Mal eine blaue Kugel gezogen wird !

1. Zug **2. Zug** **3. Zug**



Produktsatz

$P\ (bbg) = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75$

$P\ (bgb) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25$

$P\ (bgb) = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75$

$P\ (gbb) = 0{,}75 \cdot 0{,}25^2$

Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 Zügen mit Zurücklegen genau 2 Mal eine blaue Kugel gezogen wird !

Additionssatz

$$p\left(\{bbg\} \cup \{bgb\} \cup \{gbb\}\right) = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 + 0{,}25^2 \cdot 0{,}75$$

$$p\left(\{bbg\} \cup \{bgb\} \cup \{gbb\}\right) = 3 \cdot 0{,}25^2\ 0{,}75$$

Kombinatorik

Gegeben seien 4 unterschiedliche Zeichen, etwa die Buchstaben A, B, C, D .
Auf wie viele Arten kann man die Zeichen linear anordnen ?

A B C D
A B D C

Kombinatorik

Gegeben seien 4 unterschiedliche Zeichen, etwa die Buchstaben A, B, C, D .
Auf wie viele Arten kann man die Zeichen linear anordnen ?

A B C D	B A C D	C A B D	D A B C
A B D C	B A D C	C A D B	D A C B
A C B D	B C A D	C B A D	D B A C
A C D B	B C D A	C B D A	D B C A
A D B C	B D A C	C D A B	D C A B
A D C B	B D C A	C D B A	D C B A

# Zeichen		# Anordnungen
1	A	1
2	A B	2
3	A B C	6
4	A B C D	24

# Zeichen		# Anordnungen	
1	A	1	
			$\cdot 2$
2	A B	2	
			$\cdot 3$
3	A B C	6	
			$\cdot 4$
4	A B C D	24	

# Zeichen		**# Anordnungen**	
1	A	1	
2	A B	2	$\cdot 2$
3	A B C	6	$\cdot 3$
4	A B C D	24	$\cdot 4$
5	...	120	$\cdot 5$
6	...	720	$\cdot 6$

 # Zeichen **# Anordnungen**

6 $720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$

„ 6 Fakultät “

Ergebnis :

Für **n** Zeichen gibt es **n! = 1·2·3·…·n Anordnungen** oder **Zeichenketten der Länge n .**

Gegeben seien n unterschiedliche Zeichen, etwa die Zahlen 1,2,3, … , n .
Wie viele Zeichenketten ohne Wiederholungen der Länge k gibt es ?

Die **Länge der Zeichenkette** sei k mit $1 \leq k \leq n$.

Länge	Wahl des	# Möglichkeiten
1	1. Zeichens	n
2	1. , 2. Zeichens	n (n-1)
3	1. , 2. , 3. Zeichens	n (n-1)(n-2)
4	1. - 4. Zeichens	n (n-1)(n-2)(n-3)
5	1. - 5. Zeichens	n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)
6	1. - 6. Zeichens	

Beispiel :

Zeichen : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Anzahl der Zeichenketten der Länge 3 ohne Wiederholungen : $10 \cdot 9 \cdot 8$

Beispiel :

Zeichen : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Anzahl der Zeichenketten der Länge 3 ohne Wiederholungen : $10 \cdot 9 \cdot 8$

Anzahl der Zeichenketten der Länge 3 ohne Reihenfolge : ?

Beispiel :

Zeichen : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Anzahl der Zeichenketten der Länge 3 ohne Wiederholungen : $10 \cdot 9 \cdot 8$

Anzahl der Zeichenketten der Länge 3 ohne Reihenfolge : ?

.
.
.

$$\left.\begin{array}{l} 2\ 5\ 7 \\ 2\ 7\ 5 \\ 5\ 2\ 7 \\ 5\ 7\ 2 \\ 7\ 2\ 5 \\ 7\ 5\ 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ \text{Anordnungen} \end{array}$$

.
.
.

Sieht man von der Reihenfolge der Zeichen ab, so sind alle 3! Anordnungen gleich, werden also 3! Mal gezählt .

Es gibt also nur $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ **Anordnungen ohne Beachtung der Reihenfolge von 3 aus 10 Zeichen .**

Ergebnis :

Aus 10 Zeichen kann man genau $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ **Zeichenketten der Länge 3** auswählen **ohne Wiederholungen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge** .

Schreib- und Sprechweise :

„ 3 aus 10 “

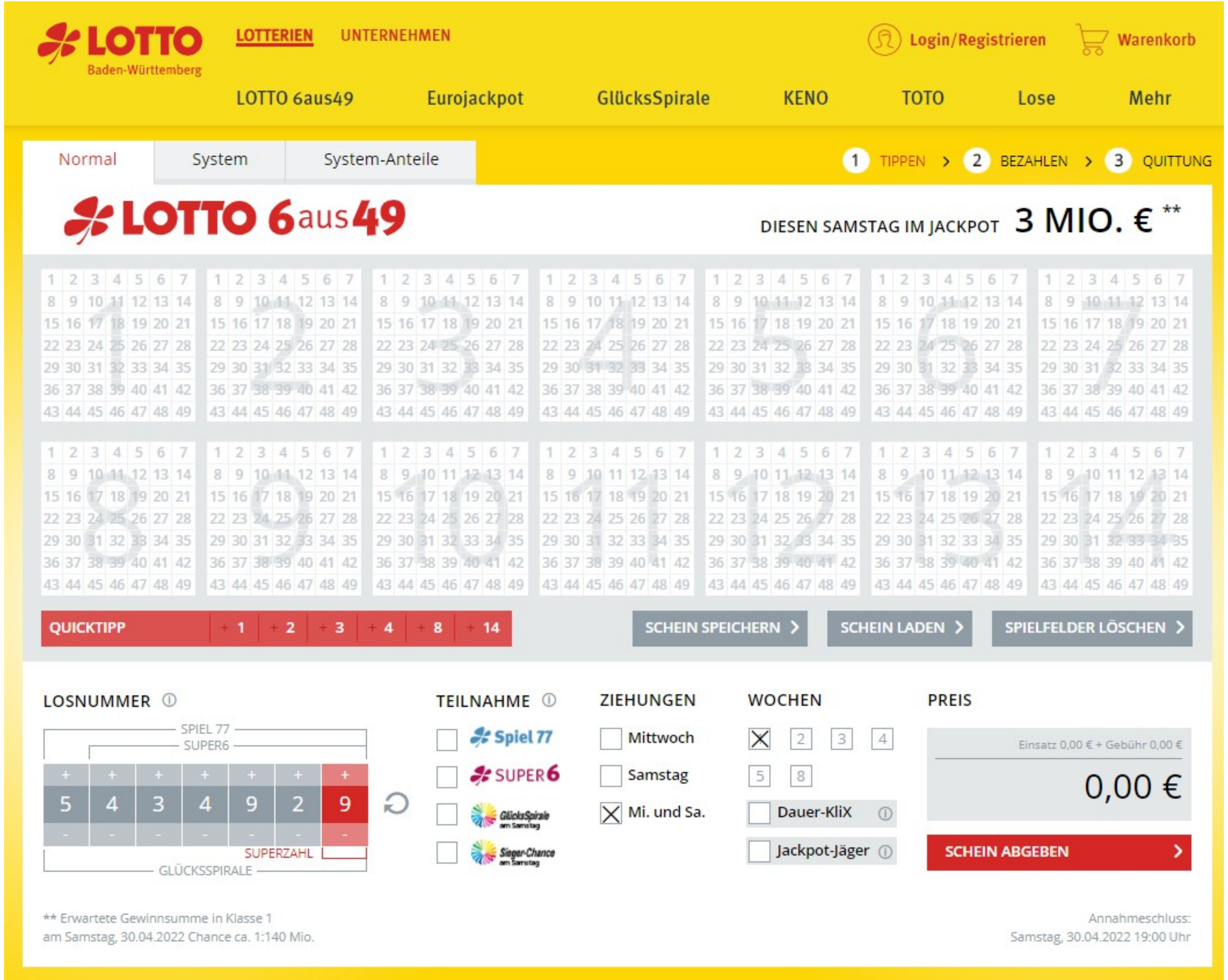
$$\binom{10}{3} := \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$$

$$\boxed{\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!}}$$

Lotto „6 aus 49“

LOTTO Baden-Württemberg - LOTTO 6aus49 Normalschein (lotto-bw.de)



Die Gesamtzahl der Möglichkeiten, 6 Zahlen aus den Zahlen 1,2,3, … , 49 zu ziehen :

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = ?$$

Die Gesamtzahl der Möglichkeiten, 6 Zahlen aus den Zahlen 1, 2, 3, … , 49 zu ziehen :

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

Berechnung mit dem Taschenrechner TI-30X Plus MathPrint :

49 $\boxed{!\ \ \begin{matrix}\text{nCr}\\\text{nPr}\end{matrix}}$ $\boxed{!\ \ \begin{matrix}\text{nCr}\\\text{nPr}\end{matrix}}$ 6 $\boxed{\text{enter}}$

13 983 816

Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ :

$$p(6R) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „5 Richtige“ :

$$p(5R) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „4 Richtige“ :

$$p(4R) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „3 Richtige“ :

$$p(3R) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20 \cdot 12\,341}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „2 Richtige“ :

$$p(2R) = \frac{\binom{6}{2}\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 123\,410}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „1 Richtige“ :

$$p(1R) = \frac{\binom{6}{1}\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 962\,598}{13\,983\,816}$$

Wahrscheinlichkeit für „0 Richtige“ :

$$p(0R) = \frac{\binom{6}{0}\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1 \cdot 6\,096\,454}{13\,983\,816}$$

Tabelle für die Wahrscheinlichkeit für „ 6 , … , 0 “ Richtige

n R	p(n R)
6	$72 \cdot 10^{-9}$
5	$18\,450 \cdot 10^{-9}$
4	$986\,620 \cdot 10^{-9}$
3	$17\,650\,404 \cdot 10^{-9}$
2	$132\,378\,029 \cdot 10^{-9}$
1	$413\,019\,450 \cdot 10^{-9}$
0	$435\,964\,976 \cdot 10^{-9}$

Tabelle für die Wahrscheinlichkeit für „ 6 , … , 0 “ Richtige

n R	p(n R)		
6	000 000 072 · 10^{-9}	=	0,000 000 072
5	000 018 450 · 10^{-9}	=	0,000 018 450
4	000 986 620 · 10^{-9}	=	0,000 986 620
3	017 650 404 · 10^{-9}	=	0,017 650 404
2	132 378 029 · 10^{-9}	=	0,132 378 029
1	413 019 450 · 10^{-9}	=	0,413 019 450
0	435 964 976 · 10^{-9}	=	0,435 964 976

blau

rot	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66