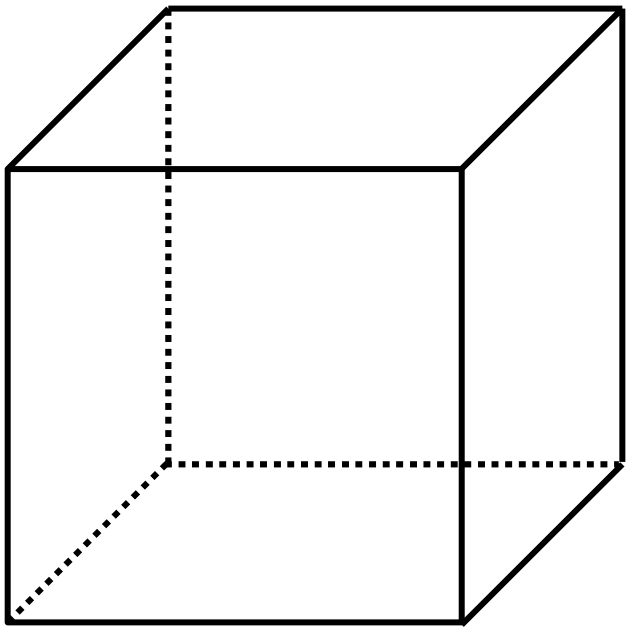
Kavalierperspektive

Arno Fehringer

Juni 2022

Die **Kavalierperspektive** [= Reiterperspektive] ist eine spezielle Darstellung räumlicher Figuren in der Zeichenebene.

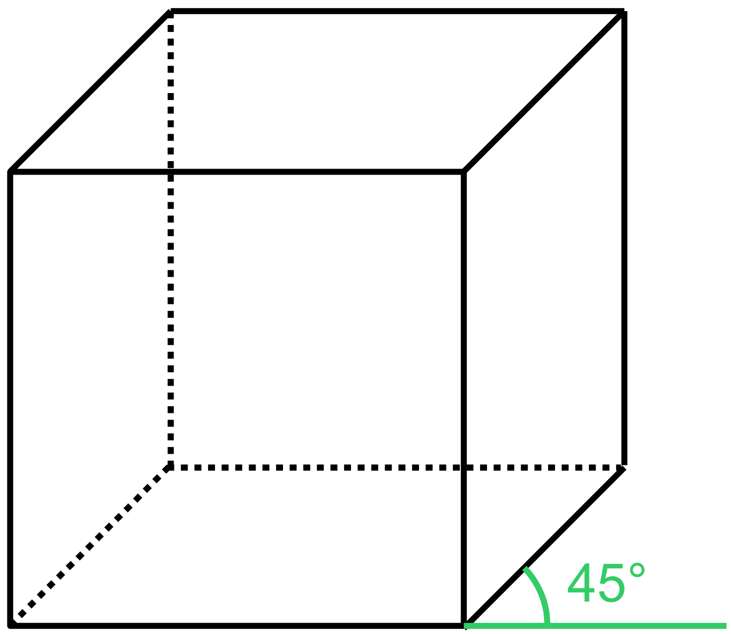
Würfel



Kantenlänge a = 6 cm

Konstruktion des Würfels in Kavalierperspektive

Würfel



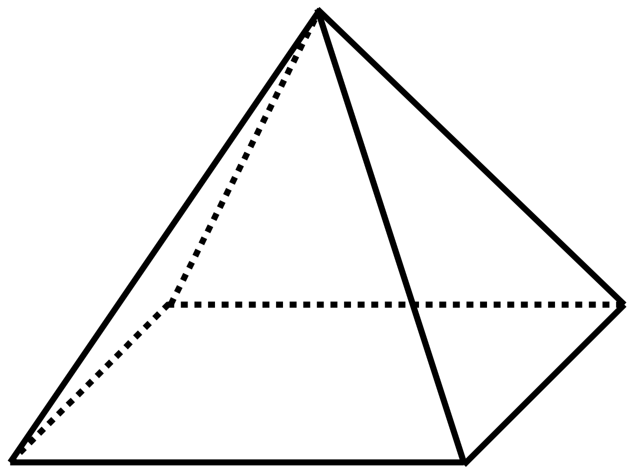
Kantenlänge a = 6 cm

Horizontale und vertikale Linien werden original lang, also 6 cm , gezeichnet .

Die nach hinten weisenden Linien werden unter 45° zur Horizontalen gezeichnet und auf die Hälfte verkürzt, also 3 cm .

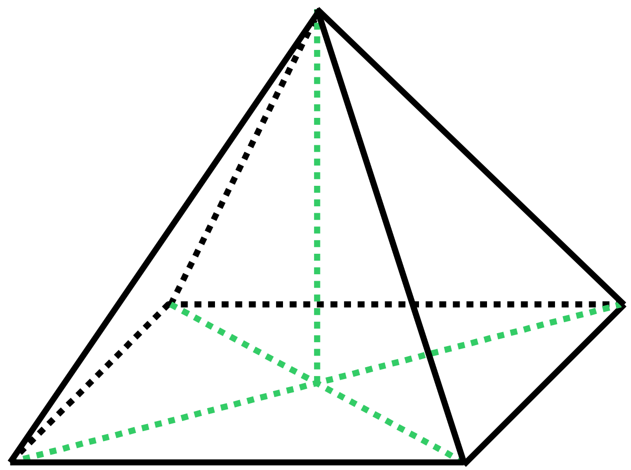
Die nicht sichtbaren Linien sind gestrichelt .

Quadratische Pyramide



Grundkante a = 6 cm
Höhe h = 5 cm

Konstruktion der quadratischen Pyramide in Kavalierperspektive



Kantenlänge a = 6 cm
Höhe h = 5 cm

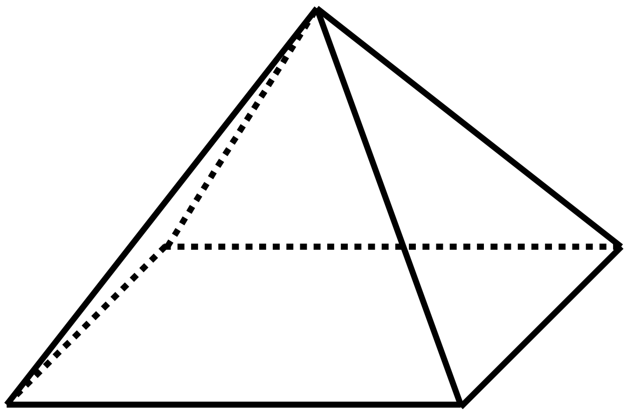
Das Grundquadrat mit 6 cm ist in Kavalierperspektive gezeichnet .

Die Mitte des Grundquadrats ist der Schnittpunkt der Diagonalen .

Über der Mitte wird die Höhe zu 5 cm gezeichnet .

Die Ecken des Grundquadrates werden mit dem Endpunkt der Höhe verbunden .

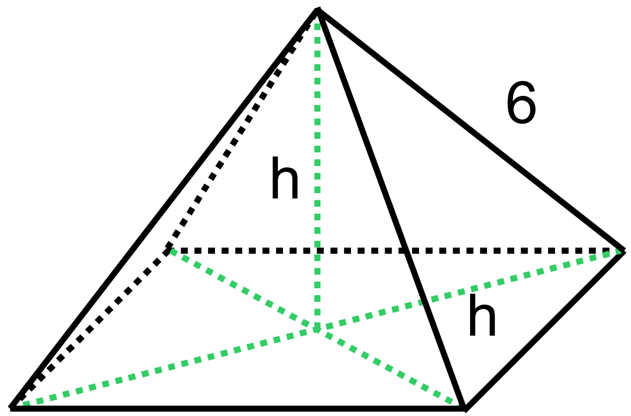
Besondere quadratische Pyramide



Grundkante a = 6 cm

Höhe h = halbe Diagonale des Grundquadrats

Konstruktion der besonderen quadratischen Pyramide in Kavalierperspektive



Grundkante a = 6 cm

Höhe h = halbe Diagonale des Grundquadrats

Das Grundquadrat mit 6 cm ist in Kavalierperspektive gezeichnet .

Die Mitte des Grundquadrats ist der Schnittpunkt der Diagonalen .

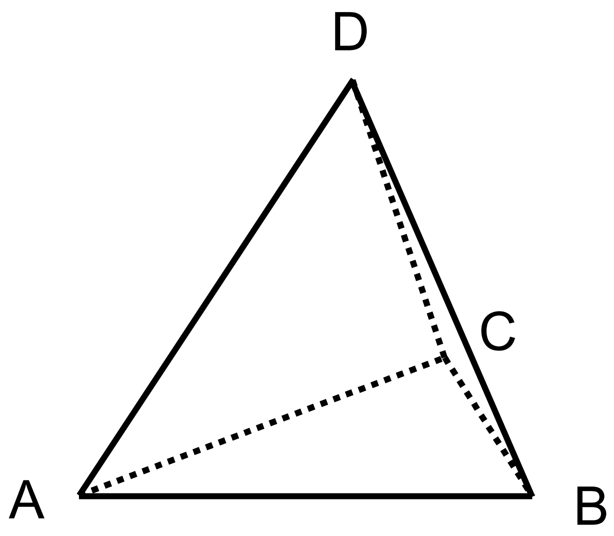
Berechnung der Höhe h :

$$h^2 + h^2 = 6^2 \qquad 2h^2 = 36 \qquad h = 4{,}2$$

Über der Mitte wird die Höhe zu 4,2 cm gezeichnet .

Die Ecken des Grundquadrates werden mit dem Endpunkt der Höhe verbunden .

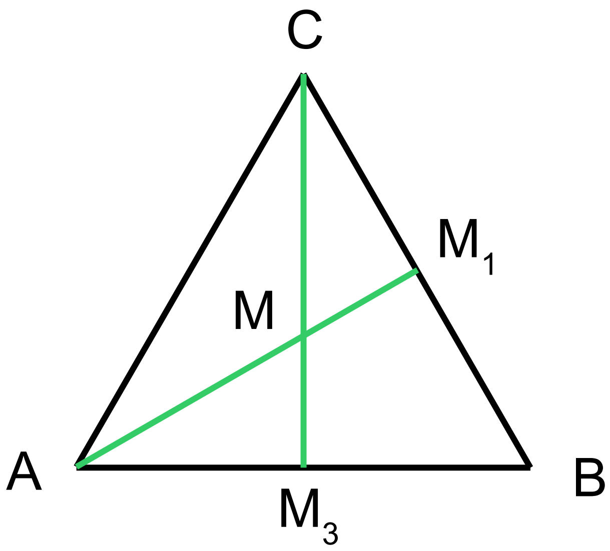
Tetraeder [= 4-Flächner = 3-seitige Pyramide mit gleichlangen Kanten]



Kantenlänge a = 6 cm

Bevor man das **Tetraeder in der Kavalierperspektive** zeichnen kann, muss man die Mitte des gleichseitigen Grunddreiecks und die Höhe berechnen :

(1) Mitte des gleichseitigen Grunddreiecks $\Delta\,ABC$



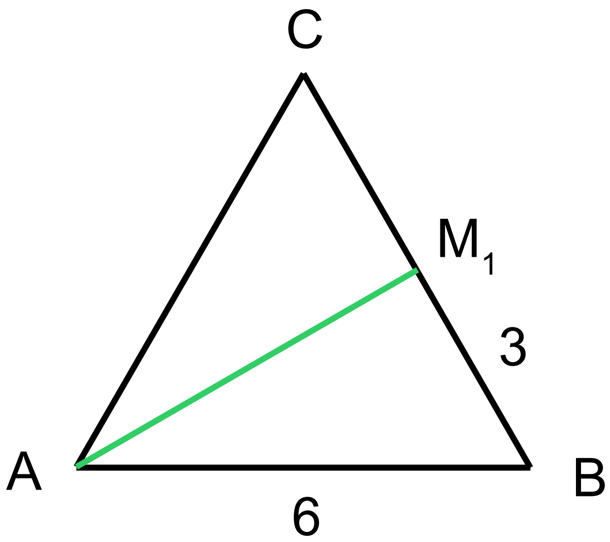
Die Mitte M des Grunddreiecks erhält man als Schnittpunkt der Linien von einer Ecke zur Mitte der gegenüberliegenden Seite .

Beim gleichseitigen Dreieck schneiden diese Linien die gegenüberliegenden Seiten unter 90° .

Der Schnittpunkt ist bereits durch zwei solche Linien bestimmt .

Bevor man das **Tetraeder in der Kavalierperspektive** zeichnen kann, muss man die Mitte des gleichseitigen Grunddreiecks und die Höhe berechnen :

(1a) Länge AM_1



ΔAM_1B :

$$AM_1^2 + 3^2 = 6^2$$

$$AM_1^2 = 6^2 - 3^2$$

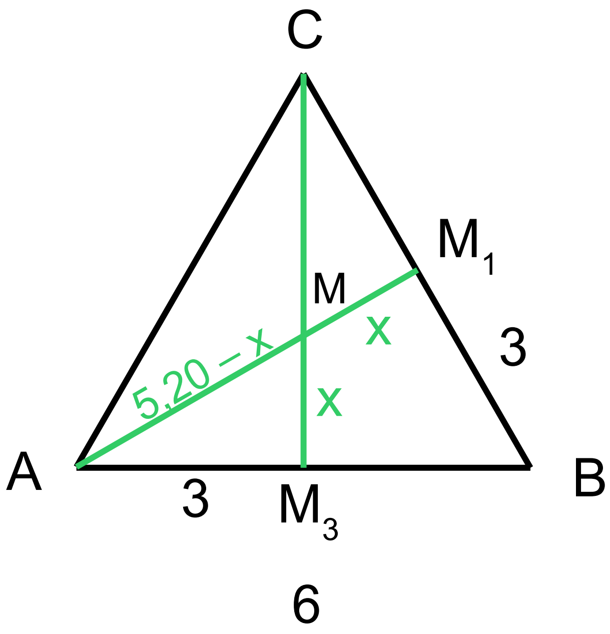
$$AM_1^2 = 6^2 - 3^2$$

$$AM_1^2 = 27$$

$$\underline{AM_1 = 5{,}20}$$

Bevor man das **Tetraeder in der Kavalierperspektive** zeichnen kann, muss man die Mitte des gleichseitigen Grunddreiecks und die Höhe berechnen :

(1b) Länge x



$\Delta M M_3 A$:

$$x^2 + 3^2 = (5{,}2 - x)^2$$

$$x^2 + 3^2 = 5{,}2^2 - 2 \cdot 5{,}2\,x + x^2$$

$$3^2 = 5{,}20^2 - 2 \cdot 5{,}20\,x$$

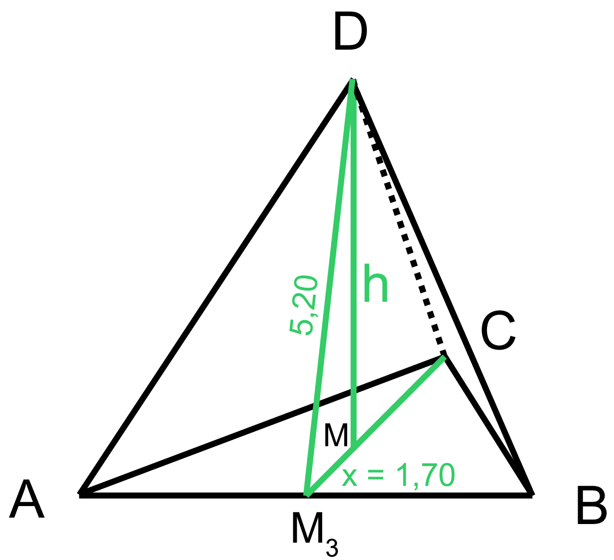
$$9 = 27 - 2 \cdot 5{,}20\,x$$

$$2 \cdot 5{,}20\,x = 27 - 9$$

$$\underline{x = 1{,}70}$$

Bevor man das **Tetraeder in der Kavalierperspektive** zeichnen kann, muss man die Mitte des gleichseitigen Grunddreiecks und die Höhe berechnen :

(1c) Höhe h



ΔDMM_3 :

$$h^2 + 1{,}70^2 = 5{,}20^2$$

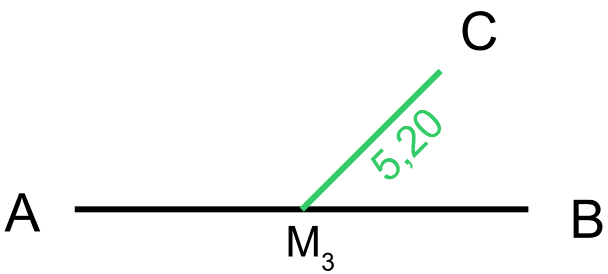
$$h^2 = 5{,}20^2 - 1{,}70^2$$

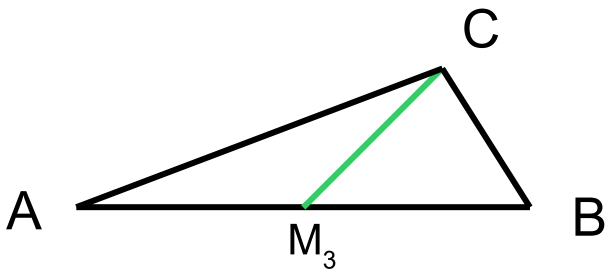
$$h^2 = 24{,}15$$

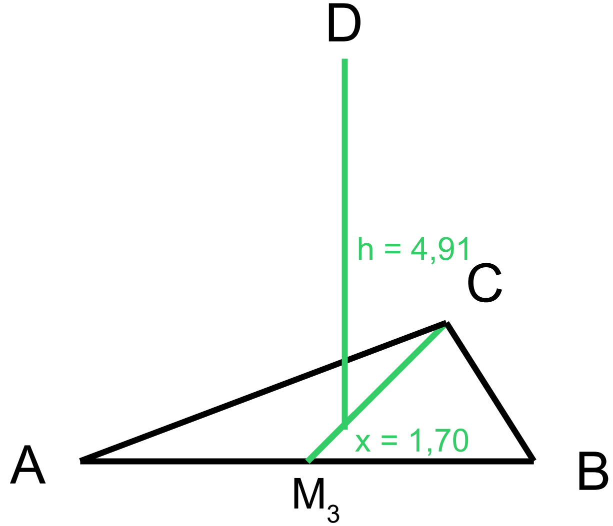
$$\underline{h = 4{,}91}$$

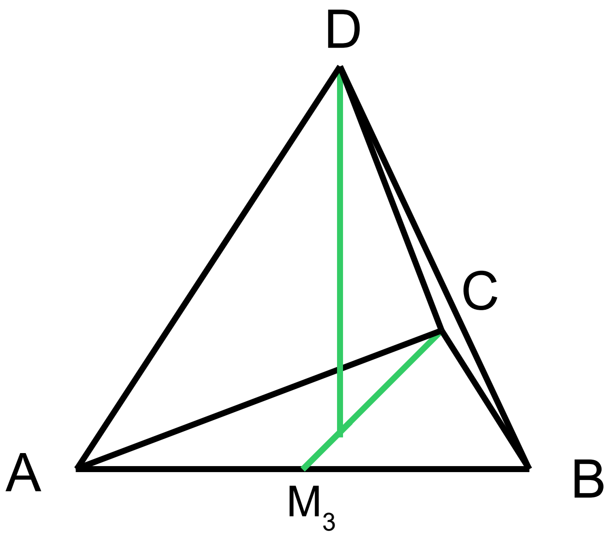
Konstruktion des Tetraeders in Kavalierperspektive

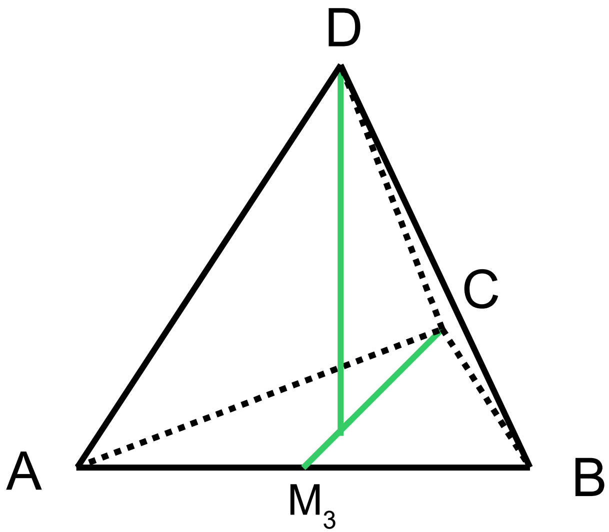
Die nach hinten weisenden Linien werden unter 45° zur Horizontalen gezeichnet und auf die Hälfte verkürzt .





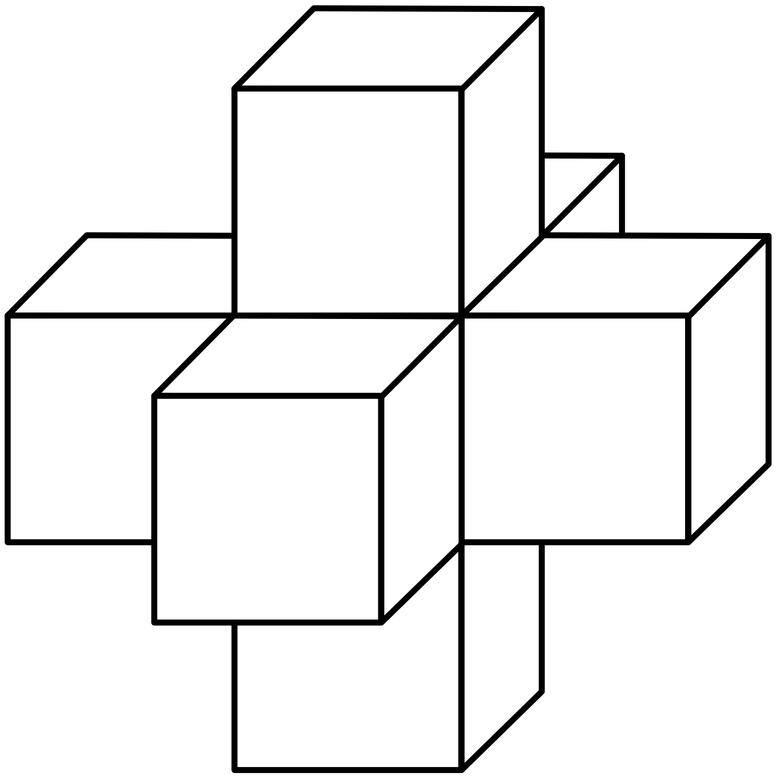




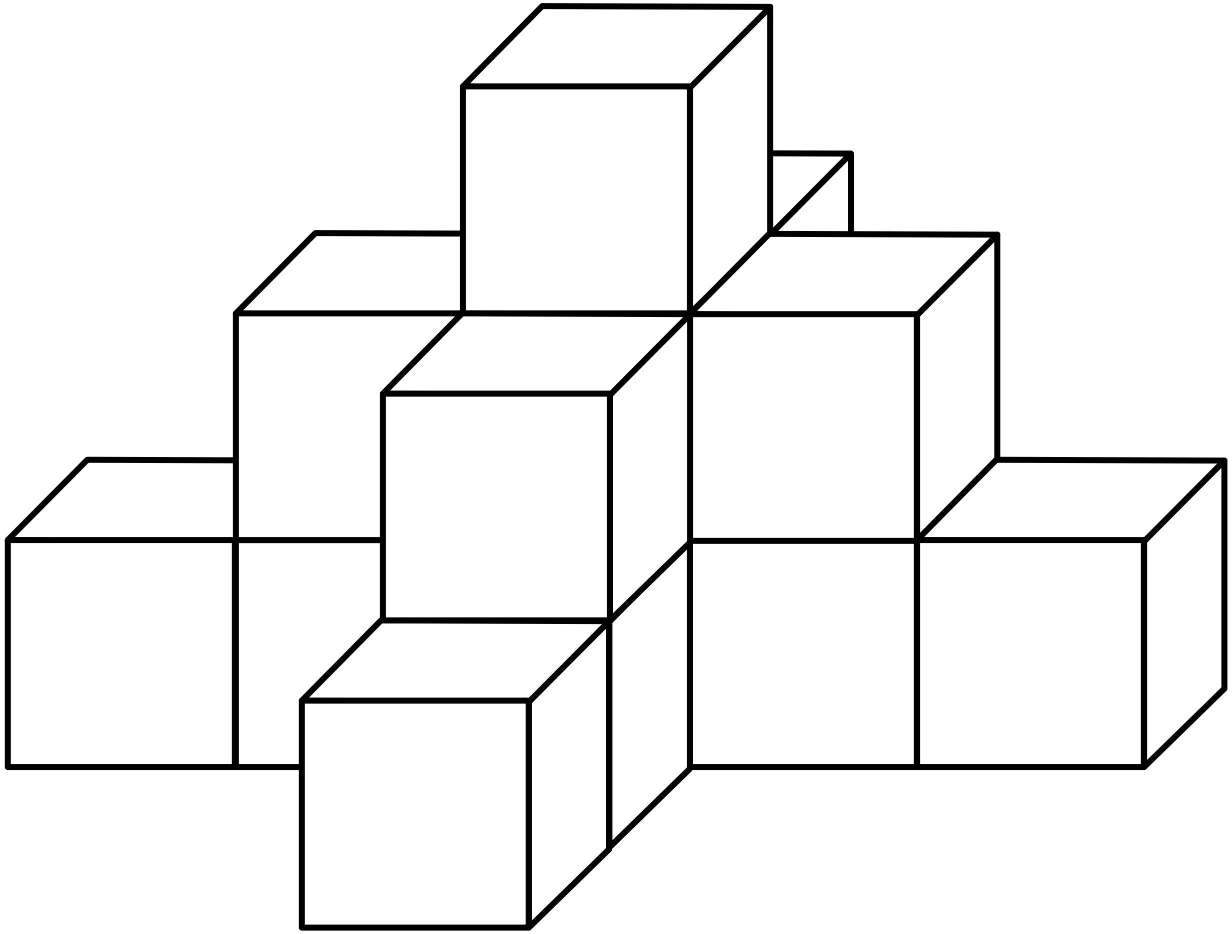


Das Würfelkreuz in Kavalierperspektive

Zeichne das aus Würfeln der Kantenlänge a = 3 cm !

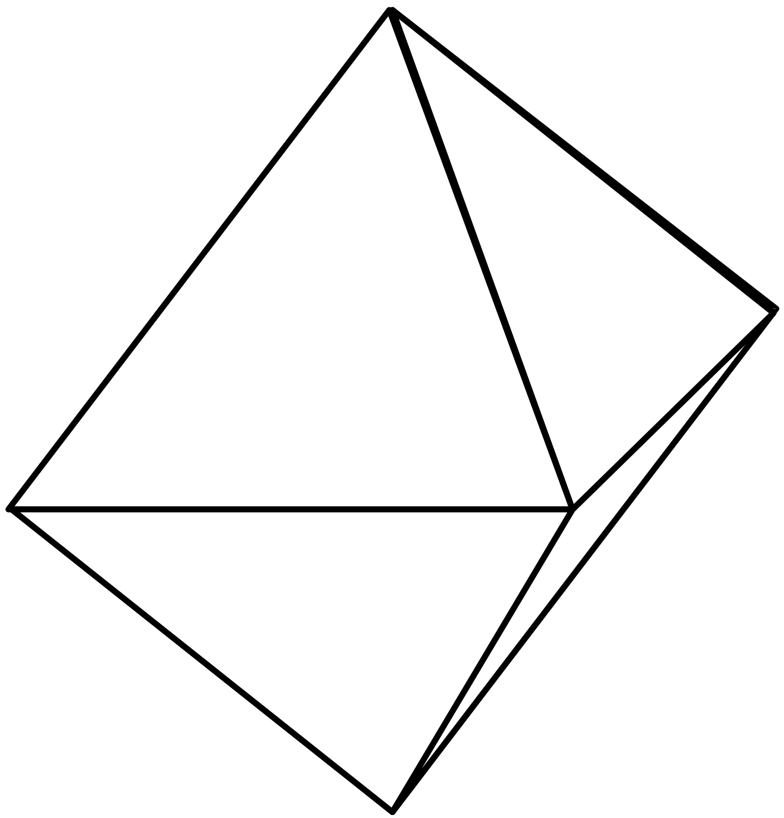


Die kreuzförmige Stufenpyramide in Kavalierperspektive
aus Würfeln der Kantenlänge a = 3 cm !



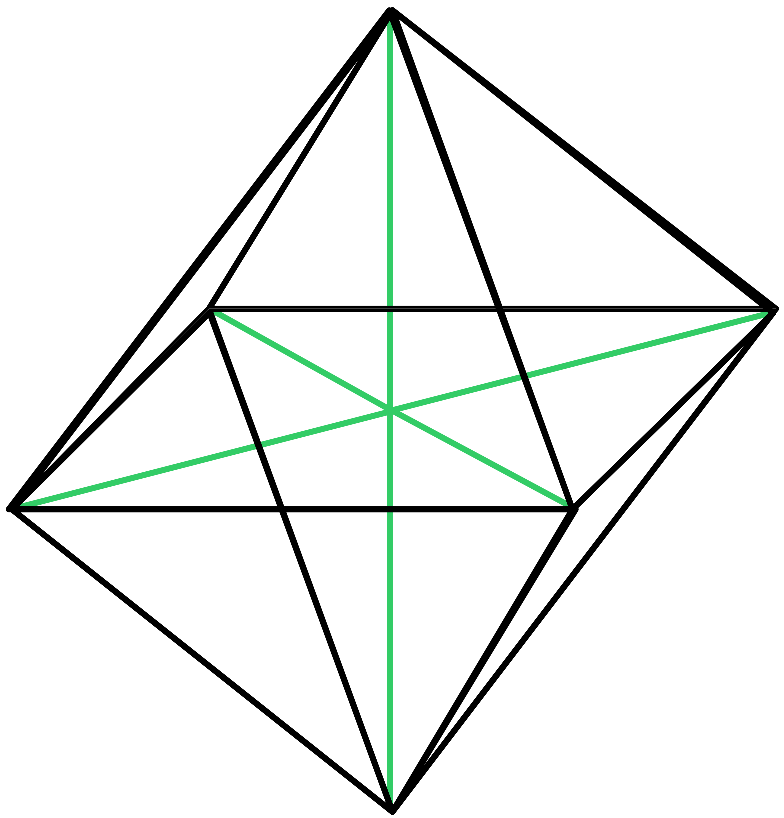
Das Oktaeder in Kavalierperspektive

Zeichne das Oktaeder der Kantenlänge a = 7,5 cm bestehend aus gleichseitigen Dreiecken !



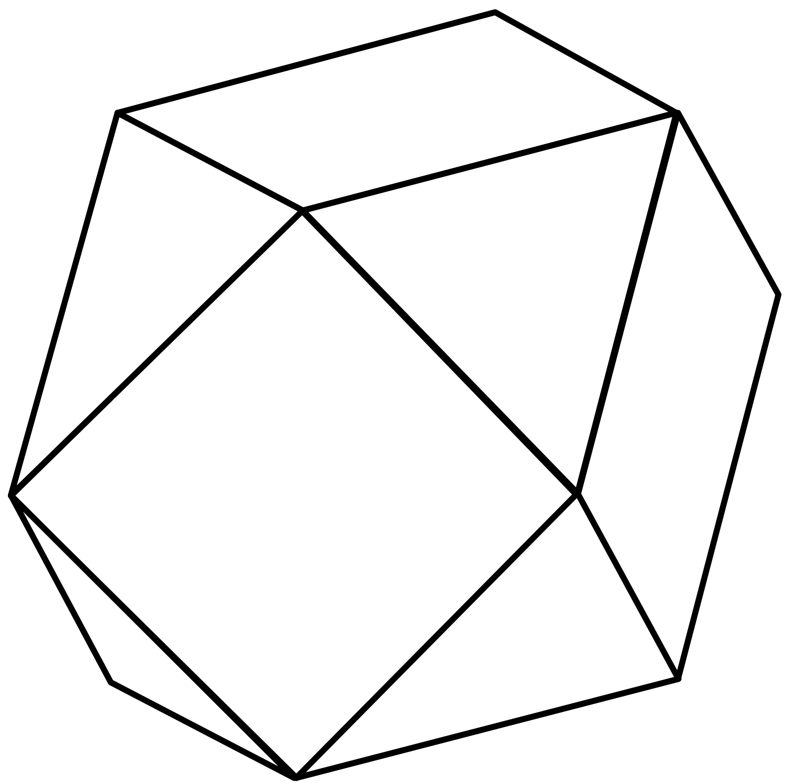
Das Oktaeder in Kavalierperspektive

Zeichne das Oktaeder der Kantenlänge a = 7,5 cm bestehend aus gleichseitigen Dreiecken !
Als Hilfestellung dient das Kantenmodell mit Hilfslinien !



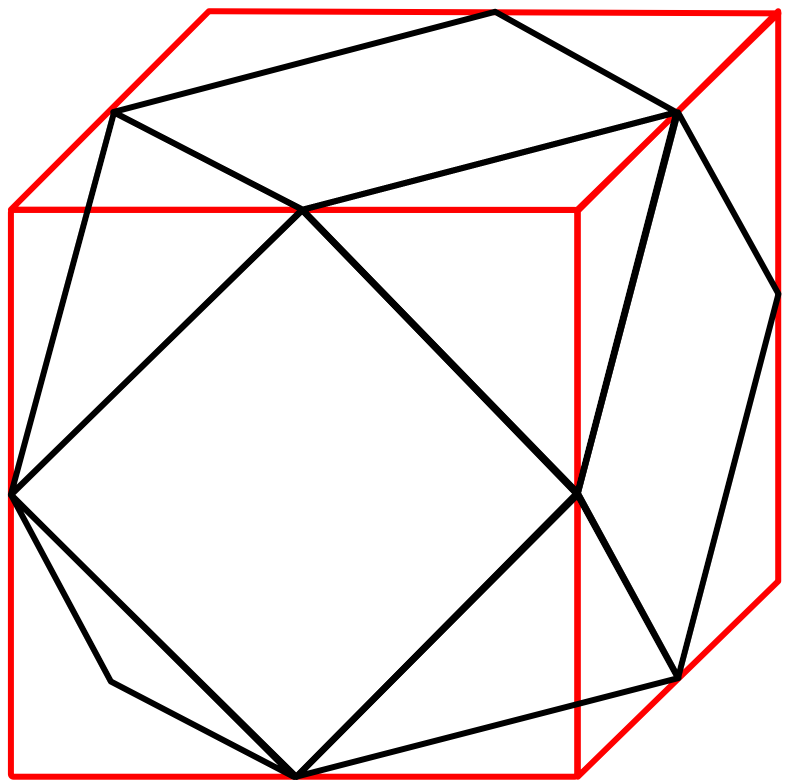
Das Kuboktaeder in Kavalierperspektive

Zeichne das Kuboktaeder der Kantenlänge a = 7,5 cm bestehend aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken !



Das Kuboktaeder in Kavalierperspektive

Bemerkung : Das Kuboktaeder der Kantenlänge 7,5 cm entsteht aus einem Würfel der Kantenlänge 10,6 cm (= Diagonale des Quadrats), indem man Pyramiden wegschneidet .



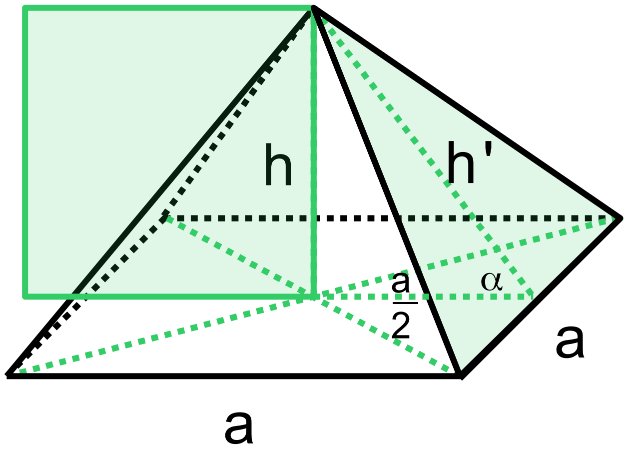
Einige Bemerkungen zur Cheopspyramide

Herodot (484 - 425) erwähnt in seinem Werk „**Historien, Neun Bücher**", im Buch 2 auch die Pyramiden.
In der Übersetzung von Friedrich Lange, Reclam Bibliothek 1886, heißt es :

Aber zwanzig Jahr wurde gearbeitet an der Pyramide ſelbſt, deren jegliche Seite iſt acht Plethra breit und iſt vierſeitig, und die Höhe ebenſo viel, und iſt von geglätte-tem Stein, ſehr gut in einander gefügt, und kein Stein iſt kleiner als dreißig Fuß.

Aber zwanzig Jahr wurde gearbeitet an der Pyramide selbst, deren jegliche Seite ist acht Plethra breit und ist vierseitig, und die Höhe ebenso viel, und ist von geglätte-tem Stein, sehr gut ineinander gefügt, und kein Stein ist kleiner als dreißig Fuß.

Der Text wird so interpretiert, dass jede der vier Seiten die gleiche Fläche hat wie das Quadrat über der Höhe :



$$h^2 = \frac{ah'}{2} \quad , \quad h^2 = (h')^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ah'}{2} = h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ah'}{2} = h'^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2ah' = 4h'^2 - a^2$$

$$\Rightarrow 4h'^2 - 2ah' - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow h' = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} a \approx 0{,}809016994\ a$$

$$\boxed{h^2 = \frac{ah'}{2}}$$

$$h^2 = \frac{a\,h'}{2} \qquad\qquad \underline{h' = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\,a \approx 0{,}809016994\,a}$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{8}\,a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{h = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{8}}\,a \approx 0{,}636009825\,a}$$

Berechnung des Neigungswinkels der Seitenflächen :

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{a}{2}} \approx \frac{0{,}636009825\,a}{0{,}5\,a} = \frac{0{,}636009825}{0{,}5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx \tan^{-1}\left(\frac{0{,}636009825}{0{,}5}\right) \;, \quad \underline{\alpha \approx 51{,}82729238^\circ = 51^\circ 49' 38''}$$

Nach https://www.cheops-pyramide.ch/grosse-pyramide.html bzw.
Rainer Stadelmann : Die grossen Pyramiden von Giza , Akademische Druck- u. Verlagsanstalt, 1990
ist der tatsächlich gemessene Winkel gleich $51^\circ 50' 40''$.

Eine andere Quelle von Herodot :

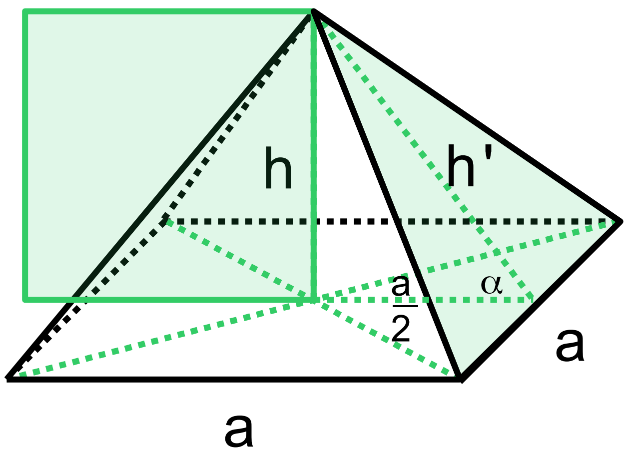
https://www.projekt-gutenberg.org/herodot/geschic1/chap002.html

Des Herodots von Halikarnassos Geschichten, Erster von zwei Bänden, F.W. Hendel Verlag , 1940

(124) … Die Aufrichtung der Pyramide selbst habe eine Zeit von zwanzig Jahren erfordert; sie hat, bei vierseitiger Gestalt, in jeglichem Seitenstück acht Plethren und die gleiche Höhe, besteht aus geglätteten und genau gefügten Steinen, dabei ist kein einziger Stein kleiner als dreißig Fuß.

Die Cheopspyramide als $\varphi-$ramide, wobei φ die Zahl des Goldenen Schnitts ist .

Aufgrund der Bedingung von Herodot, wonach die Höhe h gleich der Seitenfläche $h = \frac{ah'}{2}$ ist und den vorigen Berechnungen gilt :



$$h^2 = \frac{ah'}{2} \quad , \quad h^2 = (h')^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ah'}{2} = h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ah'}{2} = h'^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 2ah' = 4h'^2 - a^2$$

$$\Rightarrow 4h'^2 - 2ah' - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4h'^2 - 2ah' - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4h'^2}{a^2} - \frac{2h'}{a} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{h'}{\frac{a}{2}}\right)^2 - \frac{h'}{\frac{a}{2}} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{h'}{\frac{a}{2}}\right)^2 - \frac{h'}{\frac{a}{2}} - 1 = 0$$

Gleichung des Goldenen Schnitts

$$\Rightarrow \quad \frac{h'}{\frac{a}{2}} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989$$

Die Cheopspyramide als $\pi-$ramide **, wobei** π **die Kreiszahl ist .**

$$\Rightarrow \quad \frac{h'}{\frac{a}{2}} = \varphi \quad , \quad h' = \frac{a}{2}\varphi$$

$$h^2 = \frac{a\,h'}{2} \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{a^2}{4}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad 4a = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\varphi}} \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad 4a = 2 \cdot 3{,}144605511 \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad \underline{4a \approx 2 \cdot \pi \cdot h}$$

Der Umfang der quadratischen Grundfläche ist näherungsweise dem Umfang der Kreises mit Radius h !