Algebraische Regeln

Arno Fehringer

Juni 2022

Natürliche Zahlen, Ganze Zahlen, Bruchzahlen
Rechenoperationen, Vorzeichen

$+$, Plus, Addition, Summand, Summe

$-$, Minus, Subtraktion, Minuend, Subtrahend, Differenz

$\cdot$, Mal, Multiplikation, Faktor, Multiplikator, Multiplikand, Produkt

$:$, geteilt, Division, Dividend, Divisor, Quotient

.

.

.

Rechenregeln, Klammern, Klammern Auflösen,

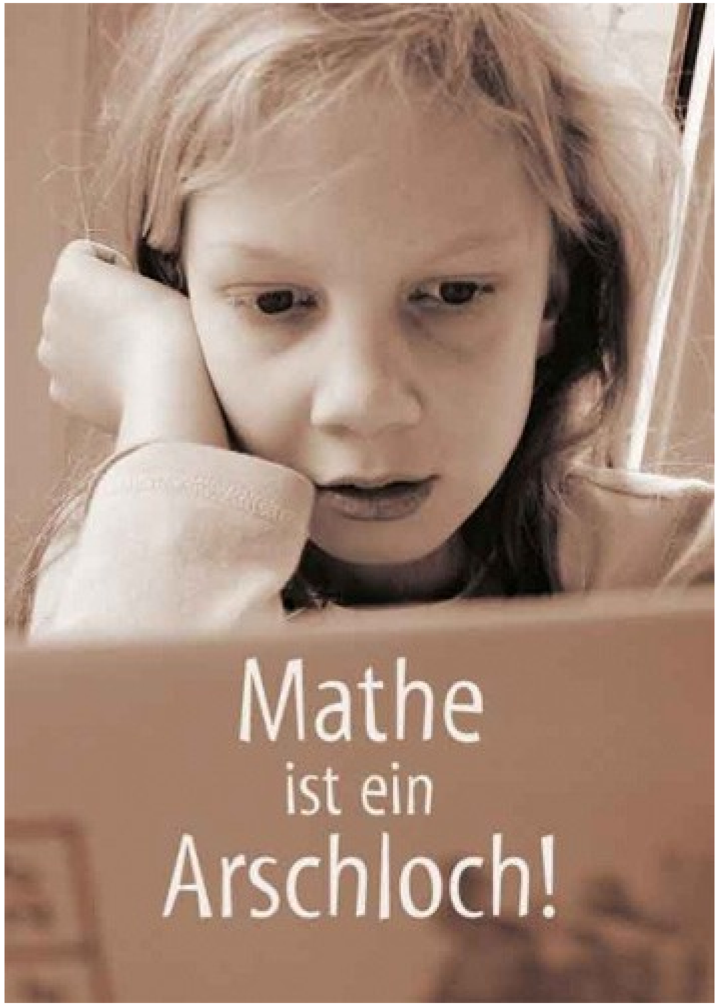
.

.

.

bla, bla, bla

„Das Produkt von zwei Zahlen ist um eins größer als das Dreifache der ersten Zahl vermindert um das Doppelte der zweiten."



Text-Postkarte Mädchen vor Buch - fengshui-shopping.de

amazon : Mathe ist ein Arschloch Taschenbuch – 1. Januar 2016 von Luke Mockridge

Die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$ mit $+, -, \cdot, :$

Für die Menge der **Natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$ mit den Operationen $+, -, \cdot, :$, also **Addition**, **Subtraktion**, **Multiplikation**, **Division**, gelten Rechenregeln .

Addition : Die Addition $a + b$ sagt, dass zu a Objekten b Objekte hinzu gefügt werden .
Die Zahlen a und b heißen **Summanden**, das Ergebnis $a + b$ heißt **Summe** .

Subtraktion : Die Subtraktion $a - b$ sagt, dass von a Objekten b Objekte weggenommen werden .
Die Zahl a ist der **Minuend** , b ist der **Subtrahend**, das Ergebnis heißt **Differenz** .

Multiplikation : Die M**ultiplikation** $a \cdot b$ bedeutet das a-fache von b oder die Summe bestehend aus den a Summanden b :

$$a \cdot b = b + ... + b$$

Division : Die Division $a : b$ bedeutet, dass die Menge bestehend aus a Objekten in kleinere Mengen aus b Objekten zerlegt wird . Das Ergebnis, der **Quotient**, gibt an, in wie viele kleinere Mengen zerlegt werden kann.
Die Zahl a heißt **Dividend** und b **Divisor** .

Alternative :
Die Division $a : b$ bedeutet, eine Menge von a Objekten wird in b Mengen mit jeweils gleich vielen Objekten zerlegt . Das Ergebnis gibt an, wie viele Objekte zu jeder Zerlegungsmenge gehören .

Umkehroperationen

Die Operationen $+/-$ und $\cdot/:$ sind jeweils Umkehroperationen voneinander, sie heben sich in ihrer Wirkung auf :

$$a + b - b = a \qquad a \cdot b : b = a$$

$$a - b + b = a \qquad a : b \cdot b = a$$

Neutrale Zahl für $+/-$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a - 0 = a$$

Neutrale Zahl für $\cdot/:$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

$$a : 1 = a$$

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Vertauschungsregeln

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Klammerregeln (Assoziativ-Gesetze)

	Kurzversion
$a + (b + c) = a + b + c$	$+(+ \;=\; +$
$a + (b - c) = a + b - c$	$+(- \;=\; -$
$a - (b + c) = a - b - c$	$-(+ \;=\; -$
$a - (b - c) = a - b + c$	$-(- \;=\; +$
$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$	$\cdot(\cdot \;=\; \cdot$
$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$	$\cdot(: \;=\; :$
$a : (b \cdot c) = a : b : c$	$:(\cdot \;=\; :$
$a : (b : c) = a : b \cdot c$	$:(: \;=\; \cdot$

Weitere Klammerregeln (Distributiv-Gesetze)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b + c) : a = b : a + c : a$$

$$(b - c) : a = b : a - c : a$$

In diesem Zusammenhang ist die Regel „ Punkt vor Strich“ zu beachten !

Die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ **mit**
$+ , - , \cdot , :$

Um die Subtraktion unbeschränkt ausführen zu können, benötigt man die negativen Zahlen .

$$\boxed{-b \;:=\; 0 - b}$$

$$a - b = \begin{cases} a-b & \text{falls } b<a \\ -(b-a) & \text{falls } a<b \end{cases}$$

Man fordert, dass die Rechenregeln auch für negative Zahlen gelten :

$$a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$$

$$a + (-b) = \begin{cases} a-b & \text{falls } b<a \\ -(b-a) & \text{falls } a<b \end{cases}$$

$$-(a) + b = 0 - a + b = 0 - (a - b) = -(a - b)$$

$$(-a) + b = \left\{ \begin{array}{ll} -(a-b) & \text{falls } b<a \\ \\ b-a & \text{falls } a<b \end{array} \right\}$$

$$a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$(-a) + (-b) = (-a) - b = 0 - a - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Vorzeichenregeln für die Multiplikation und Division

$$a \cdot b = +\, ab$$
$$a \cdot (-b) = -a \cdot b$$
$$(-a) \cdot b = -a \cdot b$$
$$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$$

$$a : b = +\, a : b$$
$$a : (-b) = -a : b$$
$$(-a) : b = -a : b$$
$$(-a) : (-b) = +\, a \cdot b$$

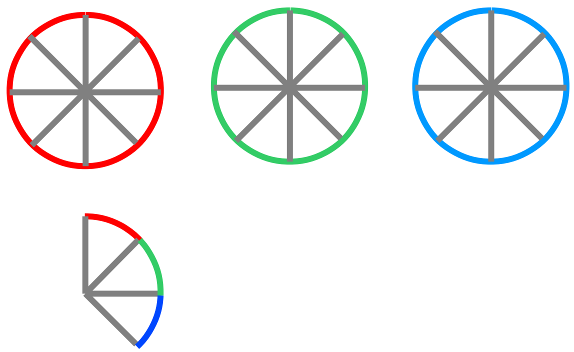
Kurzversion

$$+ \;\cdot\!: \; + \; = \; +$$
$$+ \;\cdot\!: \; - \; = \; -$$
$$- \;\cdot\!: \; + \; = \; -$$
$$- \;\cdot\!: \; - \; = \; +$$

Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{Z}{N} \;\middle|\; Z \in \mathbb{N} \;,\; N \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

mit $+ \,,\, - \,,\, \cdot \,,\, :$

Um die Division unbeschränkt ausführen zu können, benötigt man die rationalen Zahlen oder Bruchzahlen oder einfach Brüche .



$$3 : 8 = \frac{3}{8}$$

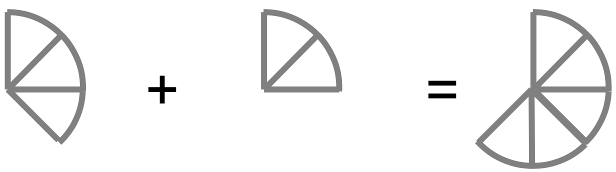
Zähler

Nenner

$$3 : 8 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8}$$

Addition / Subtraktion

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = (3 + 2) \cdot \frac{1}{8} = \frac{3 + 2}{8}$$



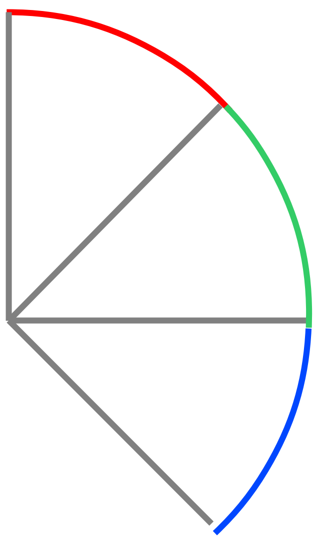
Brüche mit gleichem Nenner werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält :

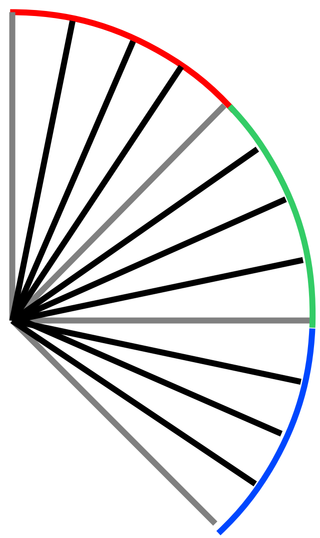
$$\frac{Z_1}{N} \pm \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 \pm Z_2}{N}$$

Schreibweise : $\frac{-Z}{N} = -\frac{Z}{N}$

Erweitern / Kürzen

Gegeben seien der Bruch $\frac{3}{8}$. Wenn man jedes $\frac{1}{8}$ in 4 gleich große Teile zerschneiden würde, hätte man $3 \cdot 4$ kleinere Teile . Jeder dieser Teile stellt den Bruch $\frac{1}{8 \cdot 4}$ dar . Also hat man den Bruch $\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4}$.





Erweitern mit 4

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4}$$

Kürzen durch 4

Jeder Bruch $\frac{Z}{N}$ kann mit jeder Zahl mit einer beliebigen Zahl $v \neq 0$ erweitert werden, ohne das sich der Wert des Bruches ändert .

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z \cdot v}{N \cdot v} \quad , \quad v \neq 0$$

Nicht jeder Bruch kann gekürzt werden !

Multiplikation

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = U$$

$$Z_1 \cdot \frac{Z_2}{N_2} = U \cdot N_1$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_2} = U \cdot N_1$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_2} : N_1 = U$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_2 \cdot N_2} = U \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_2 \cdot N_2}$$

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert .

Division

$$\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z}{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Z_1}{N_1} = \frac{Z \cdot Z_2}{N \cdot N_2}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot N_2 = \frac{Z \cdot Z_2 \cdot N_2}{N \cdot N_2}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot N_2 = \frac{Z \cdot Z_2}{N}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2} = \frac{Z \cdot Z_2}{N \cdot Z_2}$$

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2} = \frac{Z}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2}$$

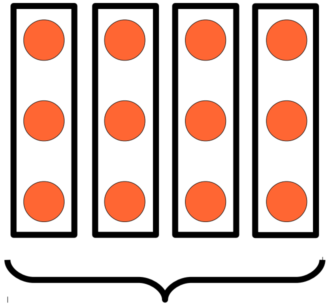
Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert .

Anhang : „Beweise“ einiger nicht so einfacher Regeln

Unterschiedliche Vorstellungen zur Division :

Eine Menge von 12 Orangen wird in kleinere Mengen mit jeweils 3 Orangen zerlegt . Wie viele kleinere Mengen gibt es ?

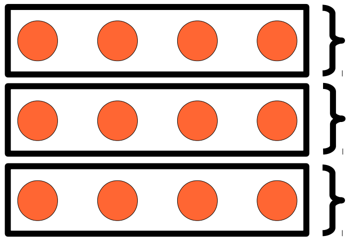
$12 : 3 = 4$



4

Eine Menge von 12 Orangen wird in 3 gleichgroße kleinere Mengen zerlegt . Wie viele Orangen hat jede der kleineren Menge ?

$12 : 3 = 4$



4
4
4

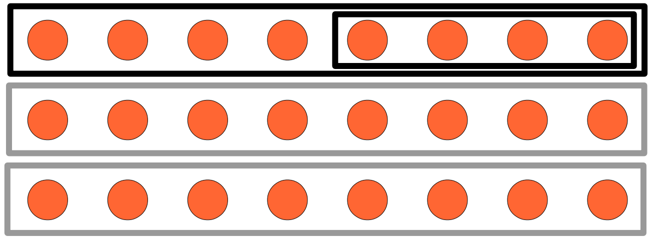
Klammerregel (Assoziativ-Gesetz)

$$24 : 3 : 2 = 24 : (3 \cdot 2)$$

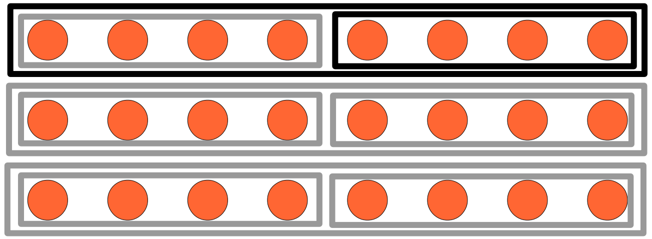
Beweis :

Die Menge aus 24 Orangen wird in 3 Mengen zu je 8 Orangen zerlegt , und dann die Menge aus 8 Orangen in 2 Mengen zu jeweils 4 Orangen :

$$24 : 3 : 2 = 8 : 2 = 4$$



$$24 : (3 \cdot 2) = 4$$



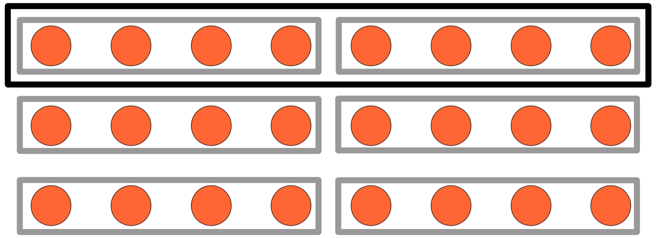
Die Menge aus 24 Orangen wird in $3 \cdot 2$ Mengen zu je 4 Orangen zerlegt .

Klammerregel (Assoziativ-Gesetz)

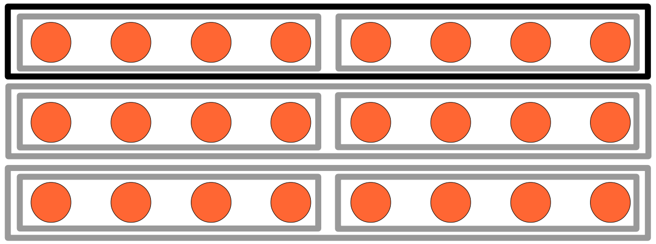
$$24 : 6 \cdot 2 = 24 : (6 : 2)$$

Beweis :

$$24 : 6 \cdot 2 = 8$$



$$24 : (6 : 2) = 24 : 3 = 8$$



$$a - b = \begin{Bmatrix} a-b & \text{falls } b<a \\ -(b-a) & \text{falls } a<b \end{Bmatrix}$$

Beweis :

Sei $a<b$.

$$a - b = a - (b - a + a)$$
$$a - b = a - (a + b - a)$$
$$a - b = a - a - (b - a)$$
$$a - b = 0 - (b - a)$$
$$a - b = -(b - a)$$

$$(-a) + b = \begin{Bmatrix} -(a-b) & \text{falls } b<a \\ b-a & \text{falls } a<b \end{Bmatrix}$$

Beweis :

Sei $a<b$.

$$(-a) + b = 0 - a + b$$
$$(-a) + b = 0 - (a - b)$$
$$(-a) + b = 0 - (-(b - a))$$
$$(-a) + b = 0 - (0 - (b - a))$$
$$(-a) + b = 0 - 0 + (b - a)$$
$$(-a) + b = b - a$$

Sei $b<a$.

$$(-a) + b = 0 - a + b$$
$$(-a) + b = 0 - (a - b)$$
$$(-a) + b = -(a - b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Beweis :

$$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (0 - b)$$
$$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot 0 - (-a) \cdot b$$
$$(-a) \cdot (-b) = 0 - (-a) \cdot b$$
$$(-a) \cdot (-b) = 0 - (-a \cdot b)$$
$$(-a) \cdot (-b) = 0 - (0 - a \cdot b)$$
$$(-a) \cdot (-b) = 0 - 0 + a \cdot b$$
$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$