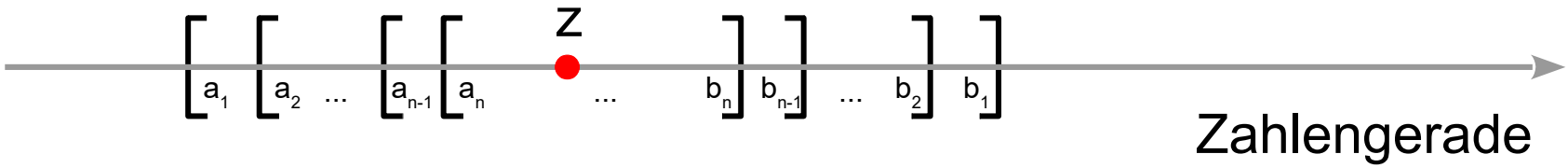
Integralrechnung

Arno Fehringer

Juni 2022

Axiom der Intervallschachtelung

Eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle $\left[a_n;b_n\right]_{n\in\mathbb{N}}$, deren Intervall-längen gegen 0 streben, bestimmen genau eine Zahl z , Zentrum genannt, die innerhalb aller Intervalle liegt :

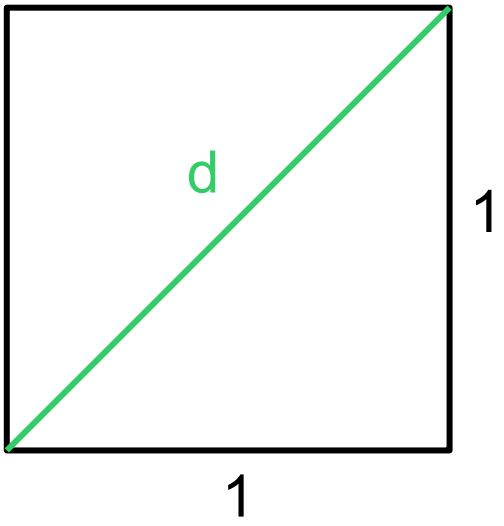


(1) Intervallschachtelung : $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(2) Intervalllängen : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = 0$

(3) Zentrum : $z \in \left[a_n;b_n\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Eine Intervallschachtelung kennt man durch die näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{2}$ als Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat .



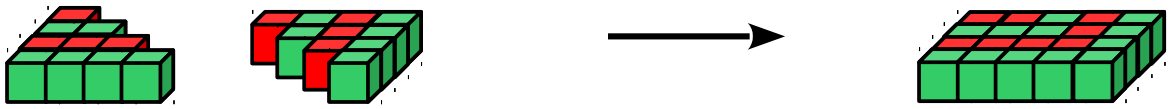
$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{2}$$

Näherungen für d :

$a_1 = 1 < d < 2 = b_1$	$b_1 - a_1 = 1$
$a_2 = 1{,}4 < d < 1{,}5 = b_2$	$b_2 - a_2 = 0{,}1$
$a_3 = 1{,}41 < d < 1.42 = b_3$	$b_3 - a_3 = 0{,}01$
$a_4 = 1{,}414 < d < 1{,}415 = b_4$	$b_4 - a_4 = 0{,}001$

Bereits griechische Mathematiker haben vor über 2000 Jahren gezeigt, dass dieser Prozess der Einschachtelung von d niemals aufhört, dass d also durch keine Dezimalzahl darstellbar ist, sondern eben eine Zahl, die durch die Intervallschachtelung festgelegt sein muss .

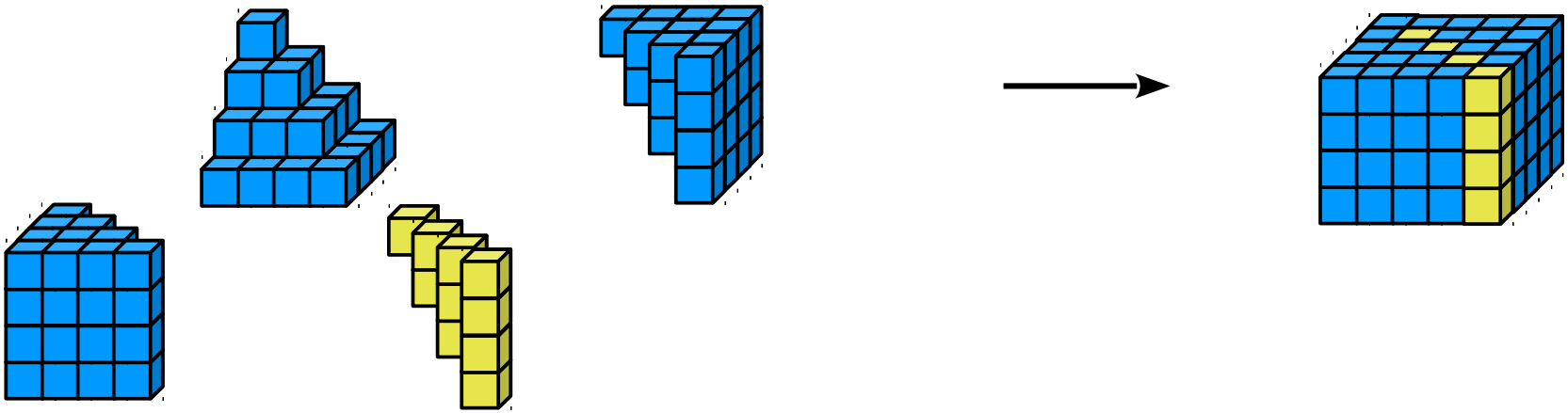
Figurierte Zahlen und Summenregeln



$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Figurierte Zahlen und Summenregeln



$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)(n+1)$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n+1)$$

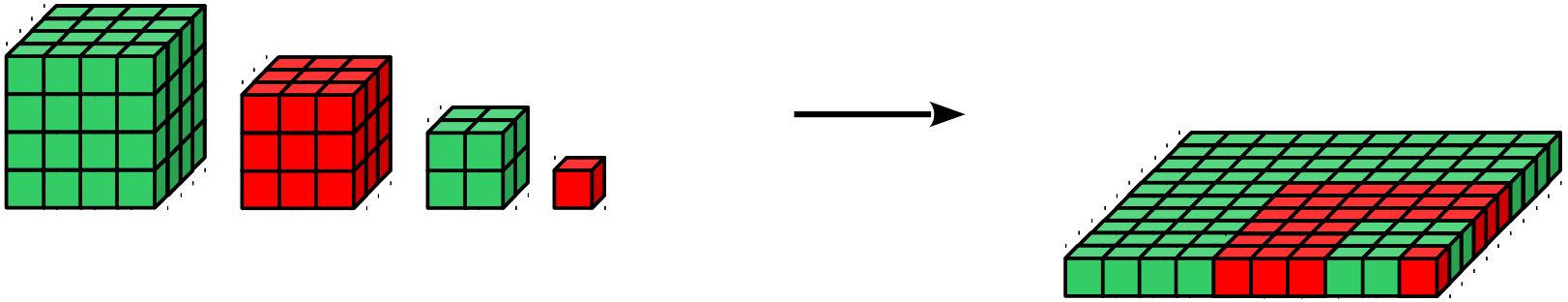
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n(n+1)(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n(n+1)(n+1) - n(n+1)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2(n+1) - 1)}{6}}$$

Figurierte Zahlen und Summenregeln



$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}$$

Ergebnis :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

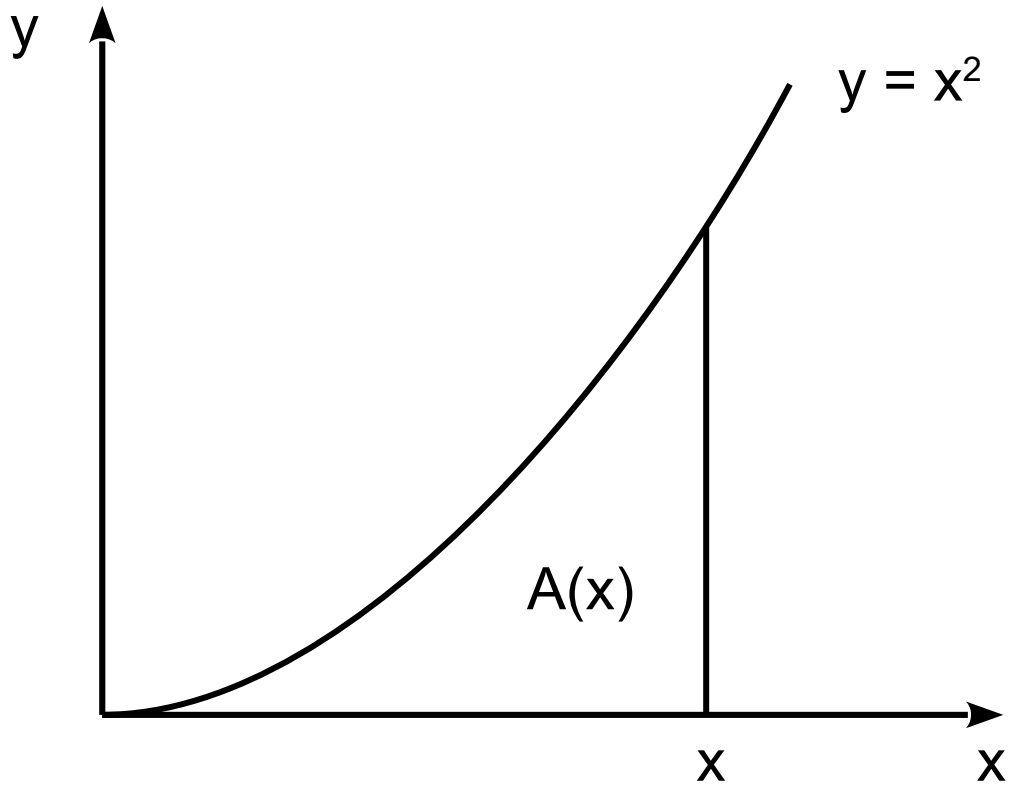
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2(n+1) - 1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

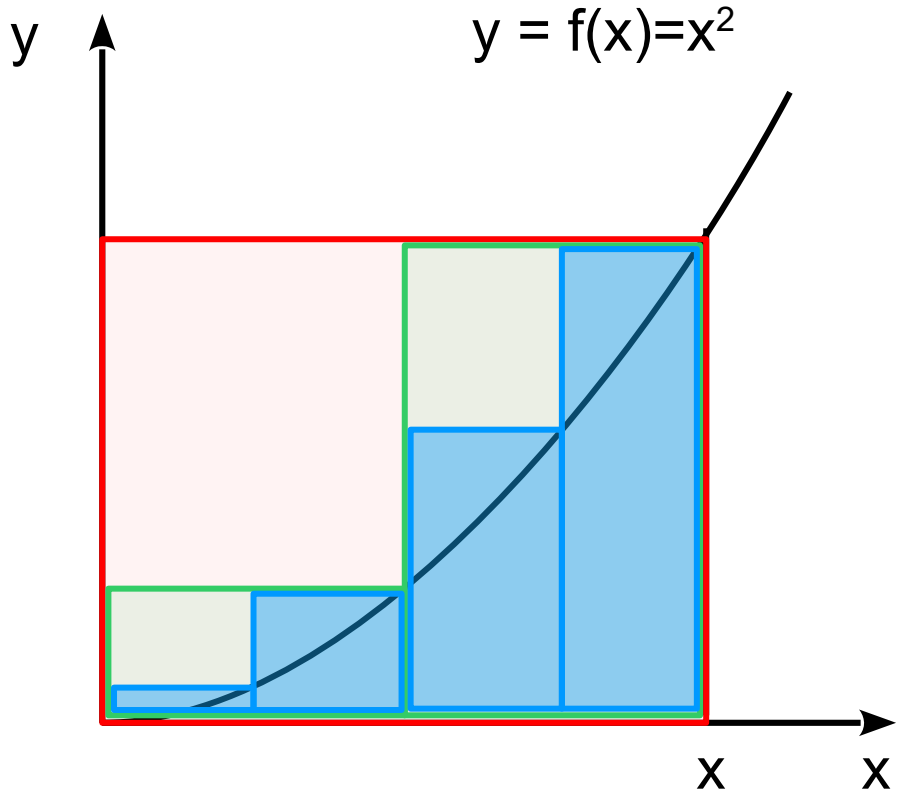
Man kann selbstverständlich auch Formeln für die Summe von Potenzen mit beliebigen Exponenten $\sum_{i=1}^{n} i^k$, $k \in \mathbb{N}$ entwickeln .

Integration als Näherungsverfahren zur Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen

Gegeben sei der Graph der Funktion $y = f(x) = x^2$.
Gesucht ist der Flächeninhalt $A(x)$!



Integration als Näherungsverfahren zur Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen



Näherungen von oben

$$\overline{A}_1 = f(x)\,x$$

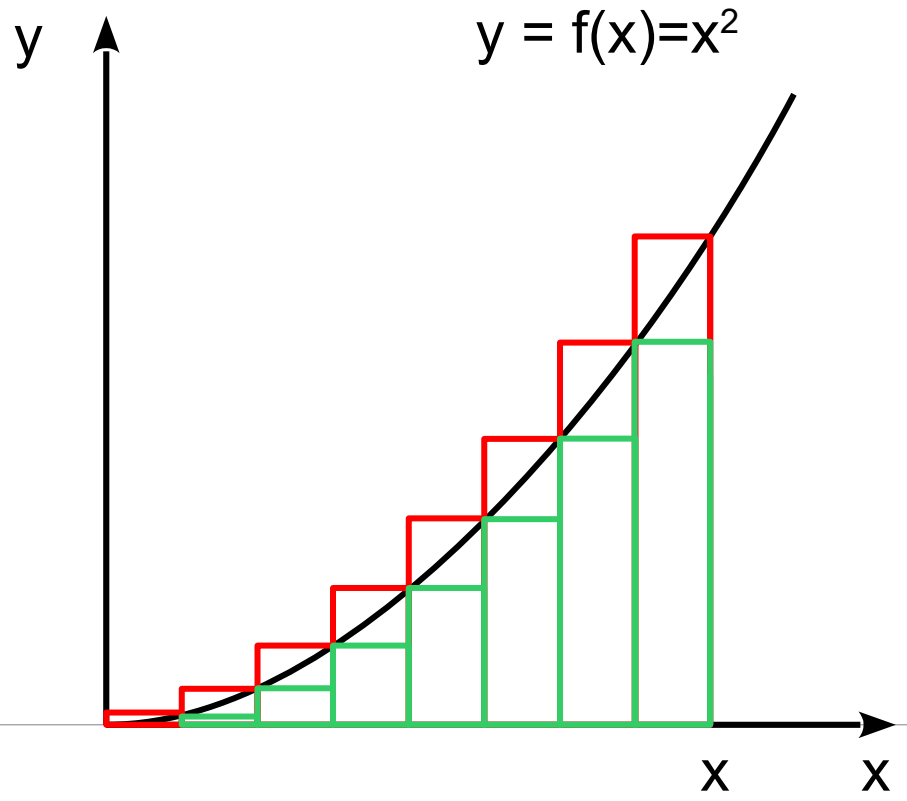
$$\overline{A}_2 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\,\Delta x \;,\quad x_i = \frac{i}{2}x \;,\quad \Delta x = \frac{x}{2}$$

$$\overline{A}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x \;,\quad x_i = \frac{i}{4}x \;,\quad \Delta x = \frac{x}{4}$$

$$\overline{A}_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\,\Delta x \;,\quad x_i = \frac{i}{8}x \;,\quad \Delta x = \frac{x}{8}$$

$$A(x) < \overline{A}_8 < \overline{A}_4 < \overline{A}_2 < \overline{A}_1$$

Integration als Näherungsverfahren zur Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen



2^n -te Näherung von oben

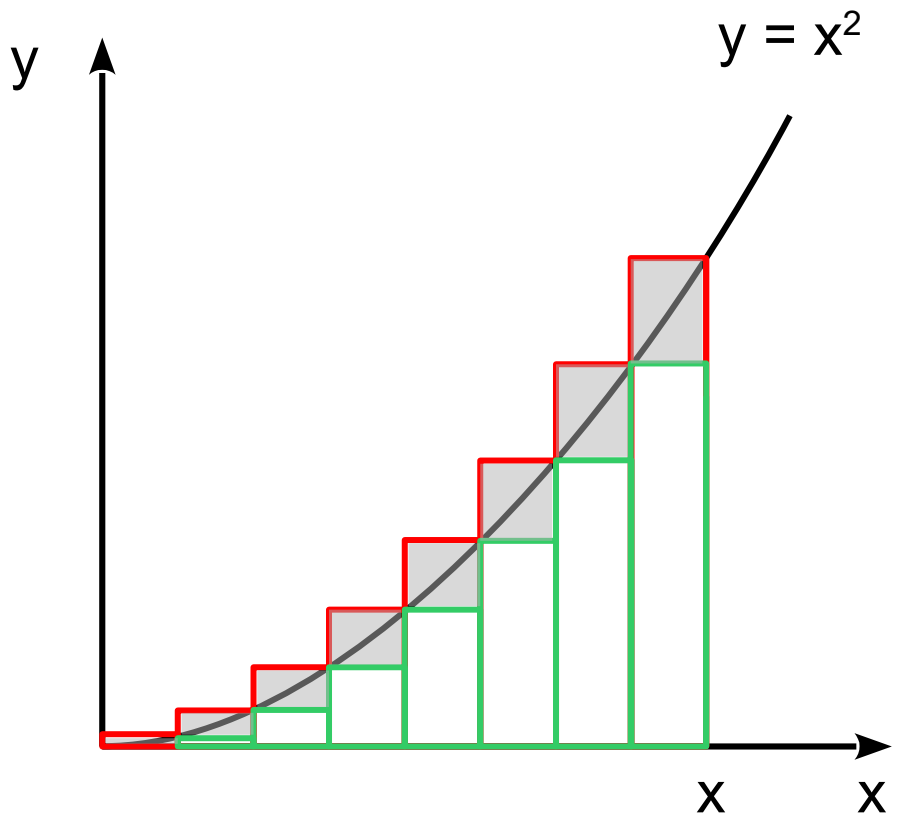
$$\overline{A}_{2^n} = \sum_{i=1}^{2^n} f\left(x_i\right)\Delta x \;,\; x_i = \frac{i}{2^n}x \;,\; \Delta x = \frac{x}{2^n}$$

2^n -te Näherung von unten

$$\underline{A}_{2^n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} f\left(x_i\right)\Delta x \;,\; x_i = \frac{i-1}{2^n}x \quad \Delta x = \frac{x}{2^n}$$

$$\underline{A}_1 < \ldots < \underline{A}_{2^n} < A\left(x\right) < \overline{A}_{2^n} < \ldots < \overline{A}_1$$

Integration als Näherungsverfahren zur Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen



$$\overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n} = f(x)\Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{x}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{A}_{2^n} - \underline{A}_{2^n}\right) = 0$$

Damit existiert der gesuchte Flächeninhalt $A(x)$ als Zentrum der Intervallschachtelung $\left[\underline{A}_{2^n}; \overline{A}_{2^n}\right]_{n\in\mathbb{N}}$

Berechnung von $A(x)$

Die Berechnung von $A(x)$ ergibt sich nun aus den Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A}_{2^n}$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{A}_{2^n}$:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \lim_{n\to\infty} \overline{A}_{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n}x\right)^2 \frac{x}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} i^2 \; \frac{x^3}{\left(2^n\right)^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\left(2^n\right)^3} \sum_{i=1}^{2^n} i^2
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\left(2^n\right)^3} \sum_{i=1}^{2^n} i^2$$

Bevor man jetzt weiter rechnet, sollte man die Summenformel $\sum_{i=1}^{n} i^2$ von S. 5 etwas vereinfachen :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\left(2(n+1)\ -\ 1\right)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{\left(n^2+n\right)(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+n^2-n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+n^2-n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{6} - \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} i^2 = \frac{\left(2^n\right)^3}{3} + \frac{\left(2^n\right)^2}{6} - \frac{\left(2^n\right)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\left(2^n\right)^3} \sum_{i=1}^{2^n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} i^2 = \frac{\left(2^n\right)^3}{3} + \frac{\left(2^n\right)^2}{6} - \frac{\left(2^n\right)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\left(2^n\right)^3} \left(\frac{\left(2^n\right)^3}{3} + \frac{\left(2^n\right)^2}{6} - \frac{\left(2^n\right)}{6} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6\left(2^n\right)} - \frac{x^3}{\left(2^n\right)^2} = \frac{x^3}{3}$$

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Der Flächeninhalt unter der Kurve $y = x^2$ über dem Intervall $[0;x]$ ist gleich $\frac{1}{3}x^3$.

Auf entsprechende Art kann man die Flächeninhalt unter den Kurven

$y = x^1$, $y = x^3$, $y = x^4$, ... über dem Intervall $[0;x]$ berechnen .

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt :

$f(x)$	$A(x)$
x^1	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
x^3	$\frac{1}{4}x^4$
x^n	?

Schreibweise der Flächeninhaltsfunktion nach Leibniz :

Die Berechnung der Fläche $A(x)$ unter der Kurve über dem Intervall $[0;x]$ ergibt sich aus der Summation der Flächeninhalte $f(x_i)\Delta x$, $i = 1$, ... , 2^n durch anschließende Grenzwertbildung $n \to \infty$:

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)\Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{x}{2^n}$$

$$A(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i)\Delta x$$

$$A(x) = \int_0^x f(\xi)\ d\xi$$

Schreibweise nach **Leibniz (1646 - 1716)**

„ Integral 0 bis x f(ξ) dξ “

Hier steht der Term $f(\xi)$ für $f(x_i)$ und $d\xi$ für die „unendlich kleine Größe“

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} x \quad .$$

Das Zeichen $\int$ stellt ein lang gezogenes S dar und erinnert an die Summation .

Wenn man die Tabelle betrachtet, könnte man auf die Idee kommen, dass wenn $f(x) = x^n$, der Flächeninhalt $A(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ist .

$f(x)$	$A(x)$
x^1	$\frac{1}{2} x^2$
x^2	$\frac{1}{3} x^3$
x^3	$\frac{1}{4} x^4$
x^n	?

Oder schärfer formuliert , die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $A(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ zur Funktion $f(x) = x^n$ ist gleich der Funktion $f(x)$:

$f(x)$	$A(x)$
x^1	$\frac{1}{2} x^2$
x^2	$\frac{1}{3} x^3$
x^3	$\frac{1}{4} x^4$
x^n	?

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad A'(x) = x^n$$

Möglicherweise gilt die entsprechende Aussage für jede integrierbare Funktion $f(x)$. Dieser Idee kann man nun theoretisch nachgehen !

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

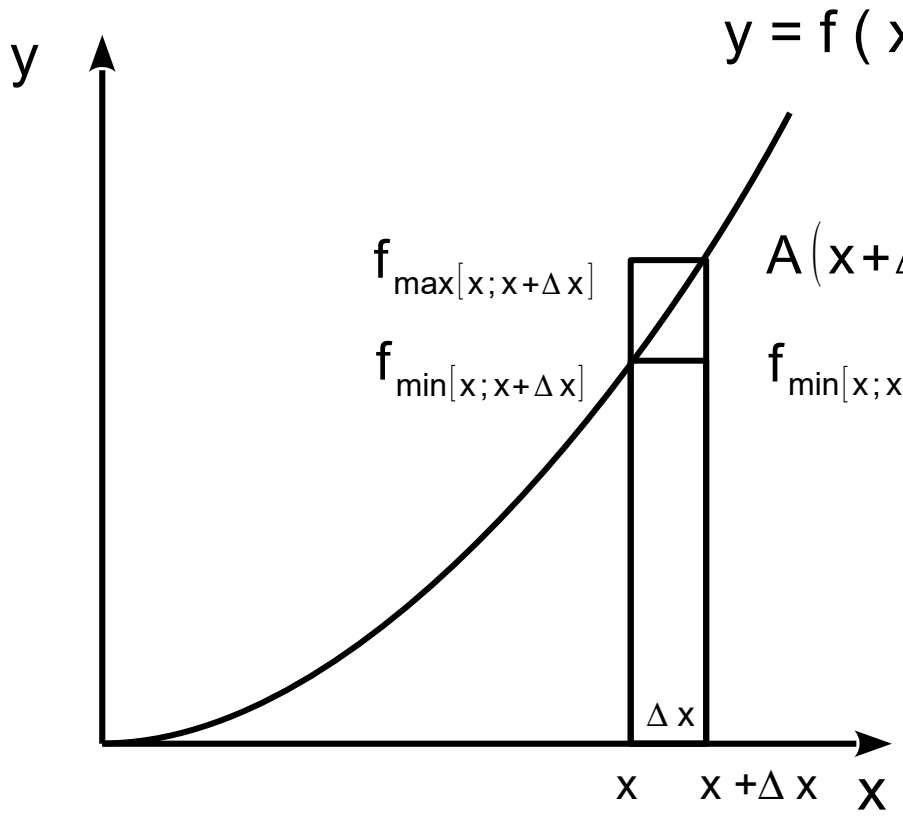
Behauptung :

Für die Flächeninhaltsfunktion $A(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$ zu der integrierbaren Funktion $f(x)$ gilt : $A'(x) = f(x)$

Beweis :

Zu zeigen : $A'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$

Zu zeigen : $A'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$



$$A(x+\Delta x) - A(x) \leq f_{max[x;x+\Delta x]} \Delta x$$

$$f_{min[x;x+\Delta x]} \Delta x \leq A(x+\Delta x) - A(x)$$

Flächenbetrachtung :

$$f_{\min[x;x+\Delta x]}\Delta x \le A(x+\Delta x) - A(x) \le f_{\max[x;x+\Delta x]}\Delta x$$

$$f_{\min[x;x+\Delta x]} \le \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \le f_{\max[x;x+\Delta x]}$$

Wegen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f_{\min[x;x+\Delta x]} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f_{\min[x;x+\Delta x]} = f(x)$ folgt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x) \quad .$$

q.e.d

Bemerkungen :

Die Funktion $A(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, da $A'(x) = f(x)$. Mit $A(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$ ist auch jede Funktion $A(x)+C$, C konstant, eine Stammfunktion von $f(x)$.

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** gestattet nun zwei weitere Aussagen zur Berechnung des Flächeninhalts unter der Kurve $y = f(x)$ über dem Intervall $[a;b]$:

$$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ := \ \int_0^b f(\xi)\ d\xi \ - \ \int_0^a f(\xi)\ d\xi$$

(1) $$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ := \ A(b) - A(a)$$ **Schreibweise :** $$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ = \ \left[\ A(\xi)\ \right]_a^b$$

(2) Ist $A(x)+C$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, so kann man auch mit dieser Funktion den Flächeninhalt ausrechnen :

$$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ = \ A(b) - A(a)$$

$$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ = \ A(b)+C - \left(A(a)+C\right)$$

$$\int_a^b f(\xi)\ d\xi \ = \ \left[\ A(\xi)+C\ \right]_a^b$$