Geometrische Grundlagen

Arno Fehringer

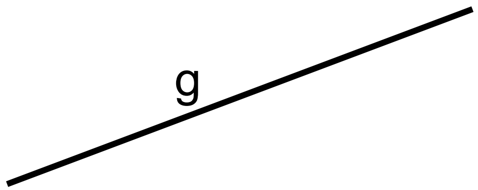
Juli 2022

Die **Geometrie** ist ein Teilgebiet der Mathematik. Das Wort stammt aus dem altgriechischen Wort γεωμετρία = geometria und bedeutet so viel wie **Erdmessung**.

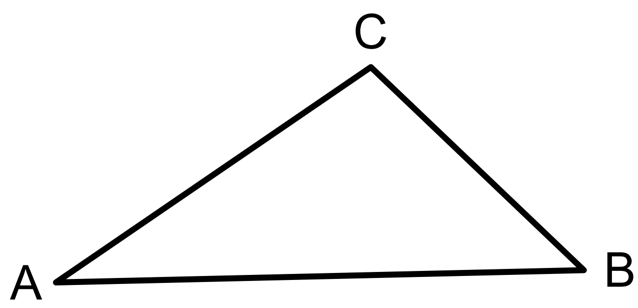
Tatsächlich beschäftigt sich etwa die auf **Euklid (~ 300 v. Chr.)** zurückgehende Geometrie mit Gebilden wie Punkten, Geraden, Ebenen, Winkeln, spezielleren Figuren wie Kreisen, Vielecken oder regelmäßigen Körpern, Beziehungen zwischen Gebilden und auch Bewegungen oder Abbildungen solcher Gebilde.

Die Geometrie in wenigen Sätzen vollständig zu beschreiben ist nur schwer möglich.

Punkte P, Q



Gerade g



Dreieck ABC

Die **Geometrie** basiert auf sogenannten **Axiomen** (gr. ἀξίωμα = axíoma, Forderung, Grundsatz), also Grundsätzen, die man nicht bewiesen kann und muss, die also keines Beweises bedürfen und als **wahr** angenommen werden.

Ein Beispiel für ein Axiom ist das folgende :

Durch zwei Punkte P, Q gibt es genau eine Gerade g .

Aus den Axiomen folgert man durch logisches Schließen wahre Aussagen oder Sätze und aus den Axiomen und Sätzen weitere wahre Aussagen.

Die Geometrie besteht also neben den Grundgebilden und Axiomen aus einer ganzen Ansammlung wahrer Sätze.

Bemerkung :

Da **Euklids** „Gebäude“ der Geometrie, welches er in seinen **„Elemente“** genannten Büchern aufbaute, noch lückenhaft war, haben sich seitdem viele Mathematikergenerationen mit der Geometrie beschäftigt.

Der Mathematiker **David Hilbert (1862 - 1943)** stellte in seinem Buch „**Grundlagen der Geometrie**“ insgesamt **21 Axiome** in 5 Gruppen geordnet zusammen, woraus er die gesamte **Euklidische Geometrie** aufbaute. [Vgl. Hilberts Axiome, Uni Bielefeld]

I : Axiome der Inzidenz

II : Axiome der Anordnung

II : Axiome der Kongruenz

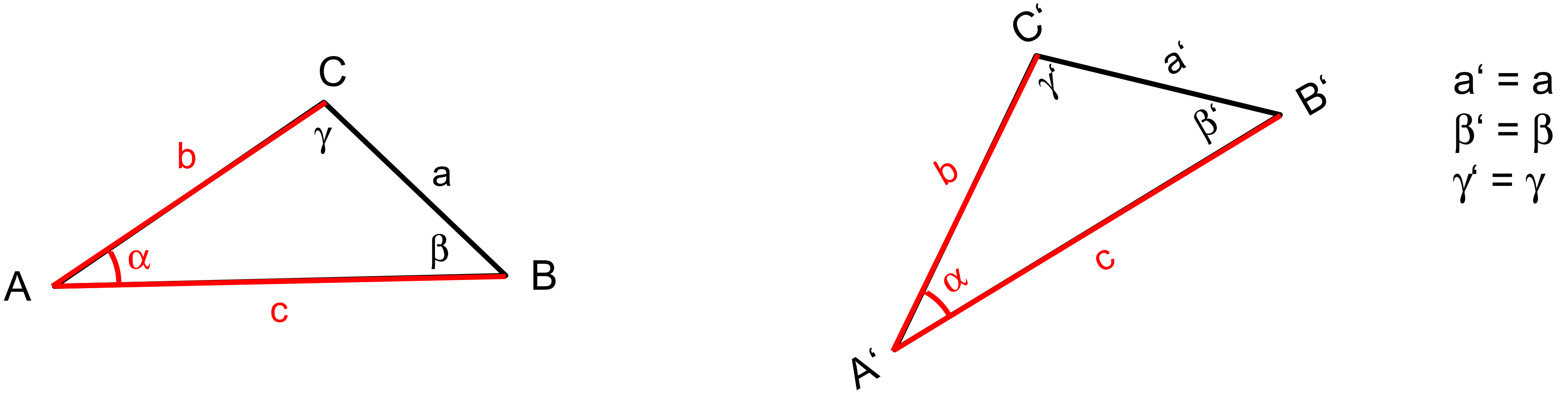
IV : Das Parallelenaxiom

V : Axiome der Stetigkeit

Wichtig für dieses Skriptum sind vor allem zwei Axiome, nämlich das **Kongruenzaxiom** und das **Parallelenaxiom** .

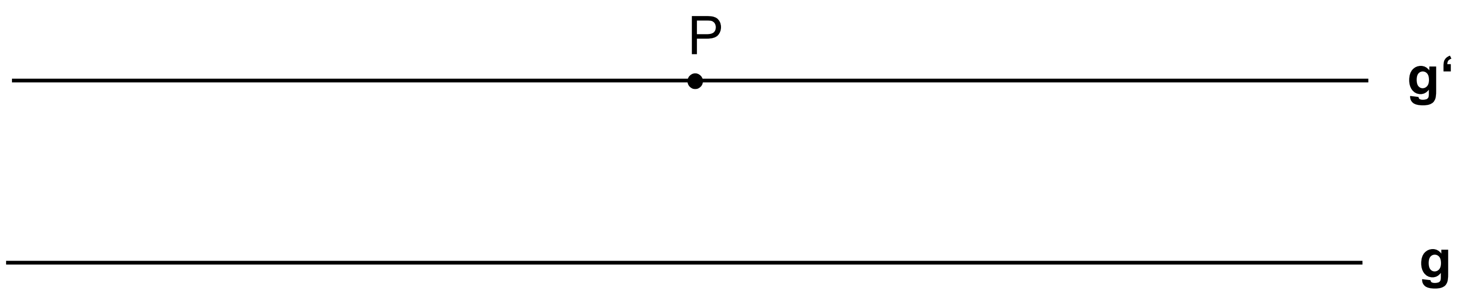
Kongruenzaxiom sws (lat. congruere = übereinstimmen) :

> Stimmen zwei Dreiecke ΔABC und ΔA'B'C' in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so stimmen sie in allen Seiten und Winkeln überein.
> Man sagt die Dreiecke sind kongruent und schreibt ΔABC ≅ ΔA'B'C' .



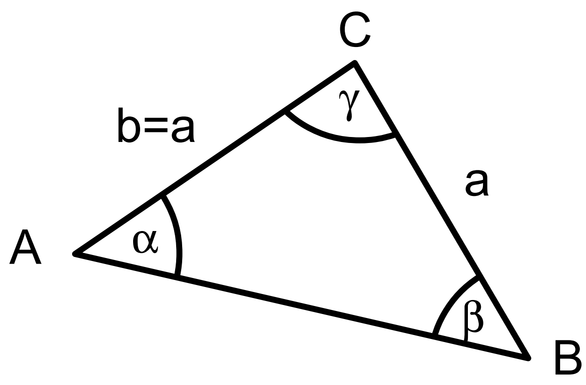
Parallelenaxiom :

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g gibt es genau eine zu g parallele Gerade g‘ durch P .



Aus dem **Kongruenzaxiom sws** folgt sofort der sogenannte **Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke** :

In jedem gleichschenkligen Dreieck ΔABC mit den gleichen Schenkeln a und $b=a$, den Basiswinkeln α , β und dem Winkel γ gilt : $\alpha = \beta$

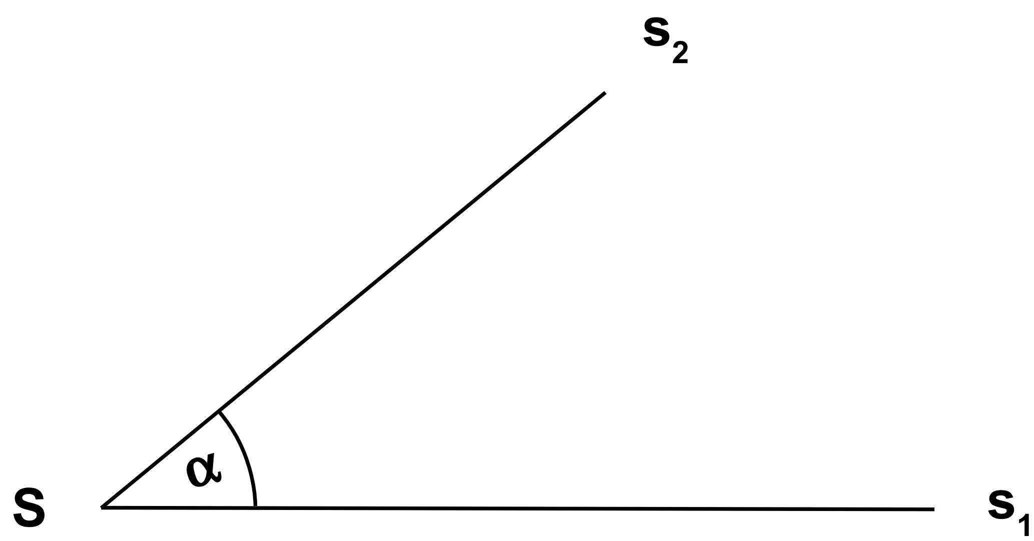


Beweis :

Die Dreiecke ΔACB und ΔBCA stimmen im Winkel γ und den anliegenden Seiten a und $b=a$ überein, und sind deshalb kongruent .
Daraus folgt speziell die Übereinstimmung in den entsprechenden Winkeln α und β , also $\alpha = \beta$.

Grundkenntnisse zu Winkeln

Ein Winkel beseht aus zwei Strahlen s_1 , s_2 mit gemeinsamen Anfangspunkt S.
Der Punkt S heißt auch **Scheitel**, und die zwei Strahlen heißen **Schenkel** des Winkels.



Winkel werden mit Buchstaben des **Griechischen Alphabets** bezeichnet kombiniert mit einem **Kreisbogen**, der die beiden Schenkel miteinander verbindet .

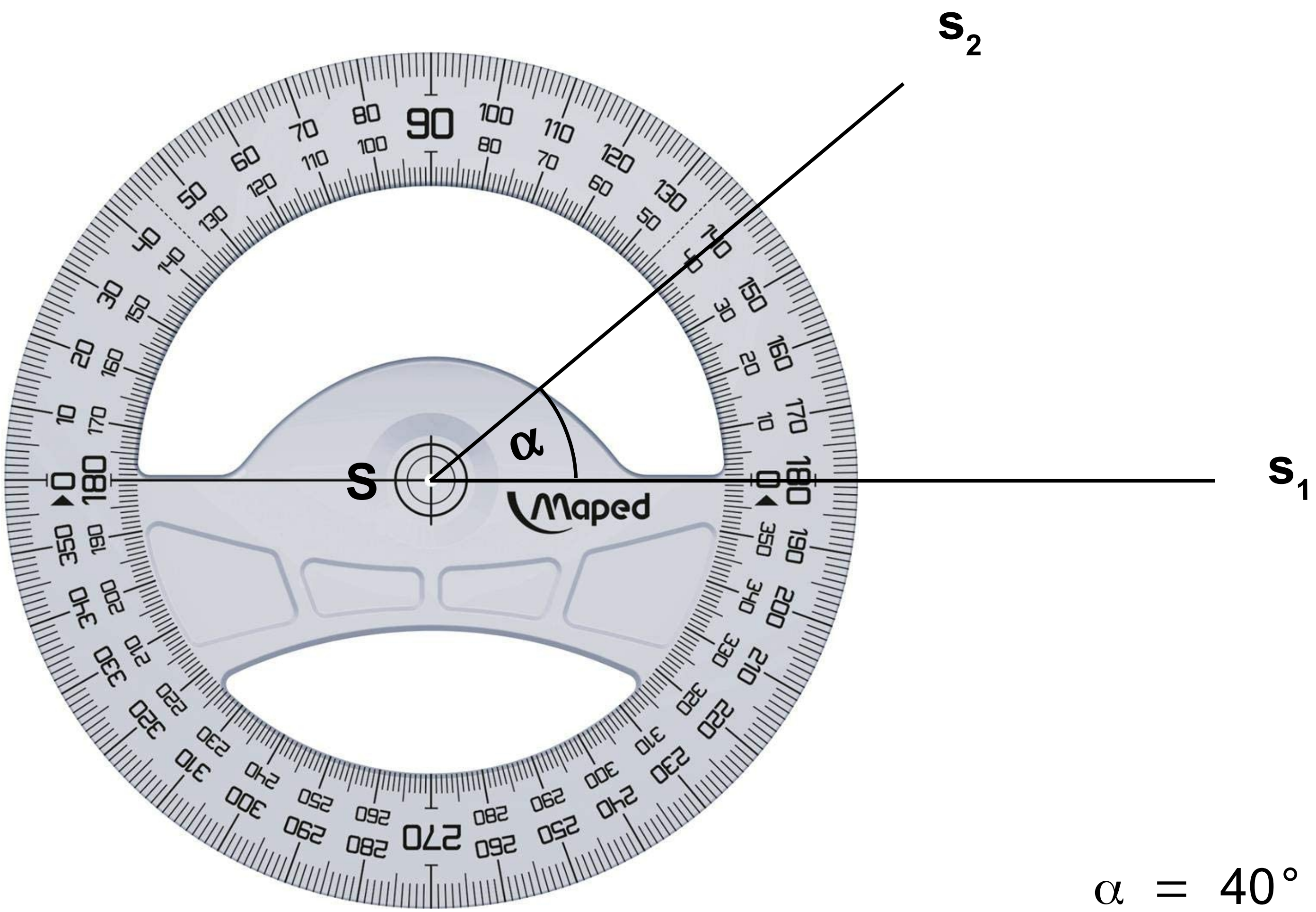
Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	m	Υ	υ	psilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	n	Φ	ϕ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

https://www.math.uni-hamburg.de/home/kiechle/uebl/griechAlphabet.html

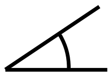
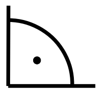
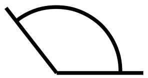
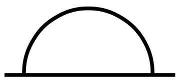
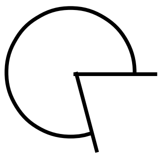
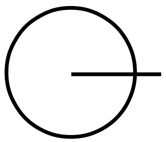
Messung von Winkeln mit dem Winkelmesser in Grad (°) .

Die Winkelskala reicht von 0° - 360° .



$\alpha = 40°$

Winkelbereiche und Bezeichnungen

	Nullwinkel	$0°$
	**spitzer** Winkel	$0° < \alpha < 90°$
	**rechter** Winkel	$90°$
	**stumpfer** Winkel	$90° < \alpha < 180°$
	**gestreckter** Winkel	$180°$
	**überstumpfer** Winkel	$180° < \alpha < 360°$
	**Voll**winkel	$360°$

Winkelsätze an Geraden

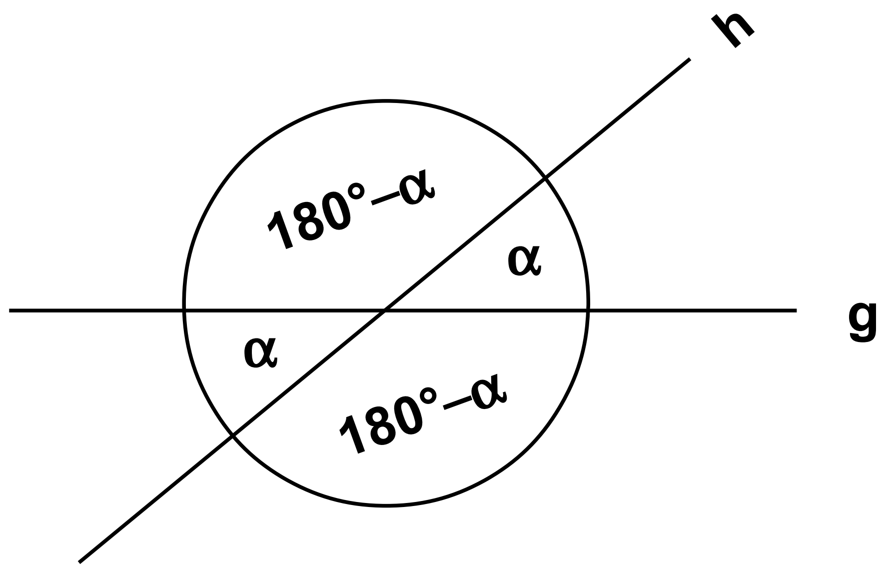
Für Winkel an zwei sich schneidenden Geraden gelten folgende Sätze :

Nebenwinkelsatz:

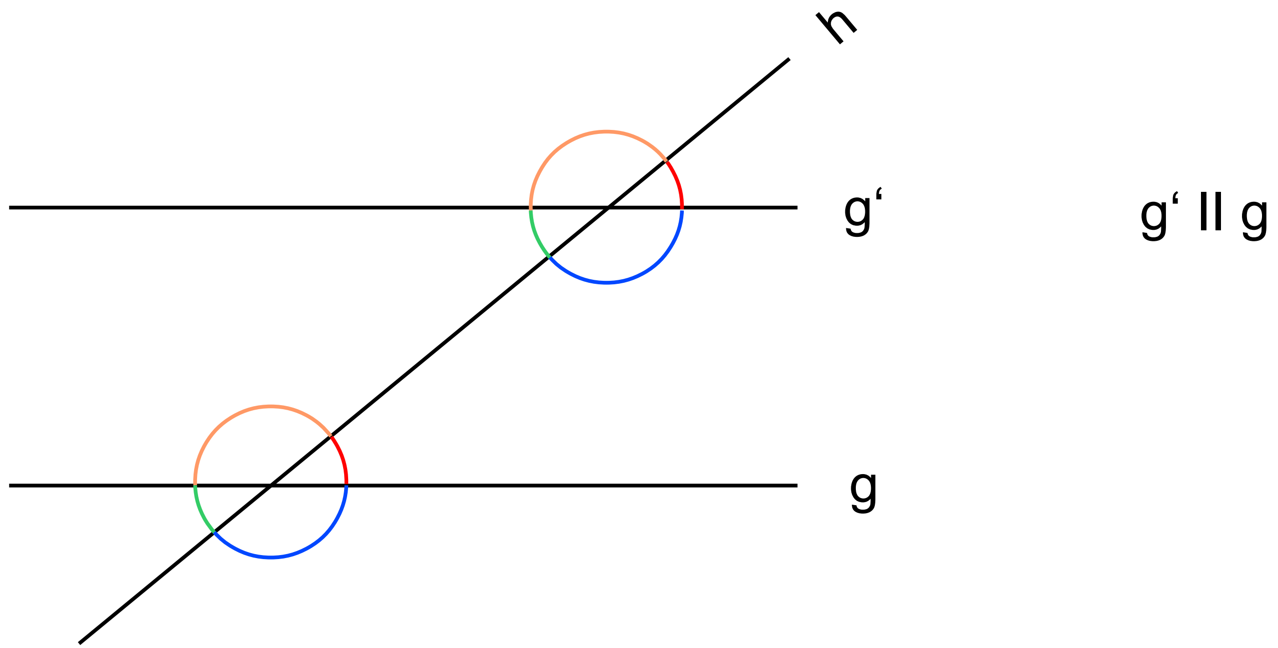
Nebenwinkel sind zusammen 180° .

Gegenwinkelsatz :

Gegenwinkel sind gleich groß .



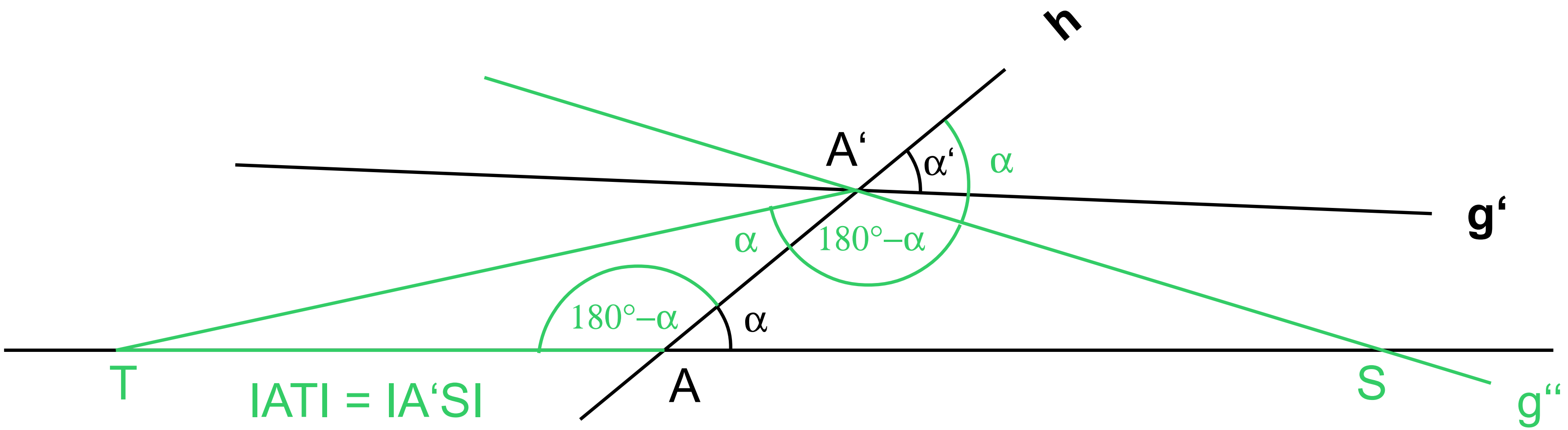
Stufenwinkelsatz:
Werden zwei parallele Geraden g und g‘ von einer Geraden h geschnitten, so sind Stufenwinkelpaare gleich groß .



Bemerkung : Stufenwinkelpaare haben jeweils gleiche Farbe !

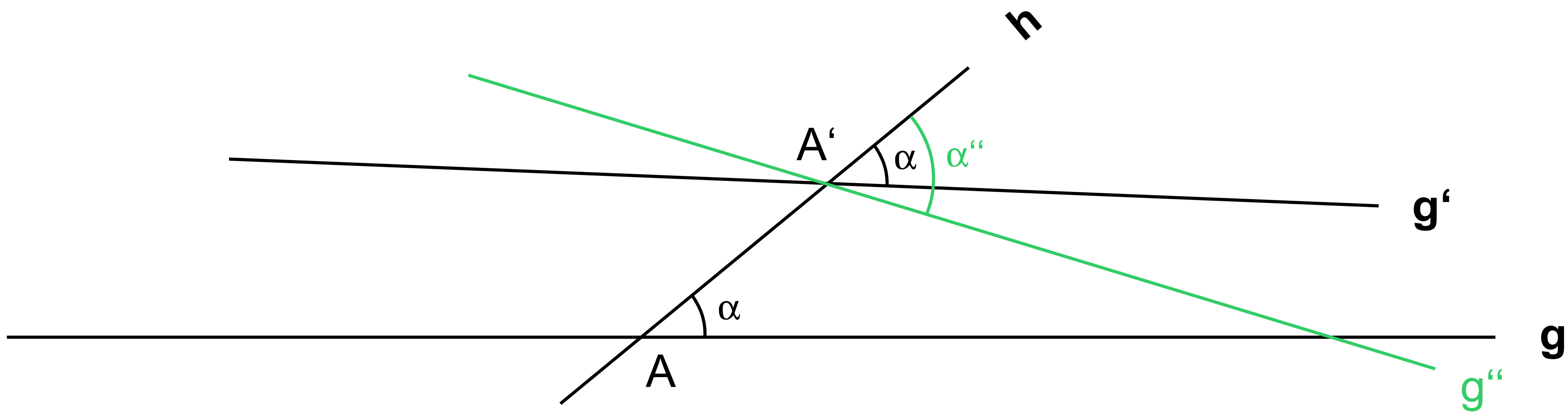
Exakte Formulierung des Stufenwinkelsatzes :

Werden zwei Geraden g und g‘ von einer dritten Geraden h in den Punkten A und A‘ geschnitten, so gilt : $\alpha = \alpha' \quad \Leftrightarrow \quad g \parallel g'$



Beweis : „ $\Leftarrow$ “

Sei . $g \parallel g'$ Angenommen $\alpha \neq \alpha'$, etwa $\alpha > \alpha'$. Dann gilt $g'' \cap g = \{S\}$ und $\Delta AA'S \cong \Delta A'AT$ nach dem Kongruenzaxiom sws .
Dann folgt aber, dass ST eine Gerade ist mit $ST \cap g = \{ S, T \}$ im Widerspruch dazu, dass zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben .
Die Annahme $\alpha \neq \alpha'$ ist also falsch, das heißt $\alpha = \alpha'$ ist wahr .



Beweis : „ $\Rightarrow$ “

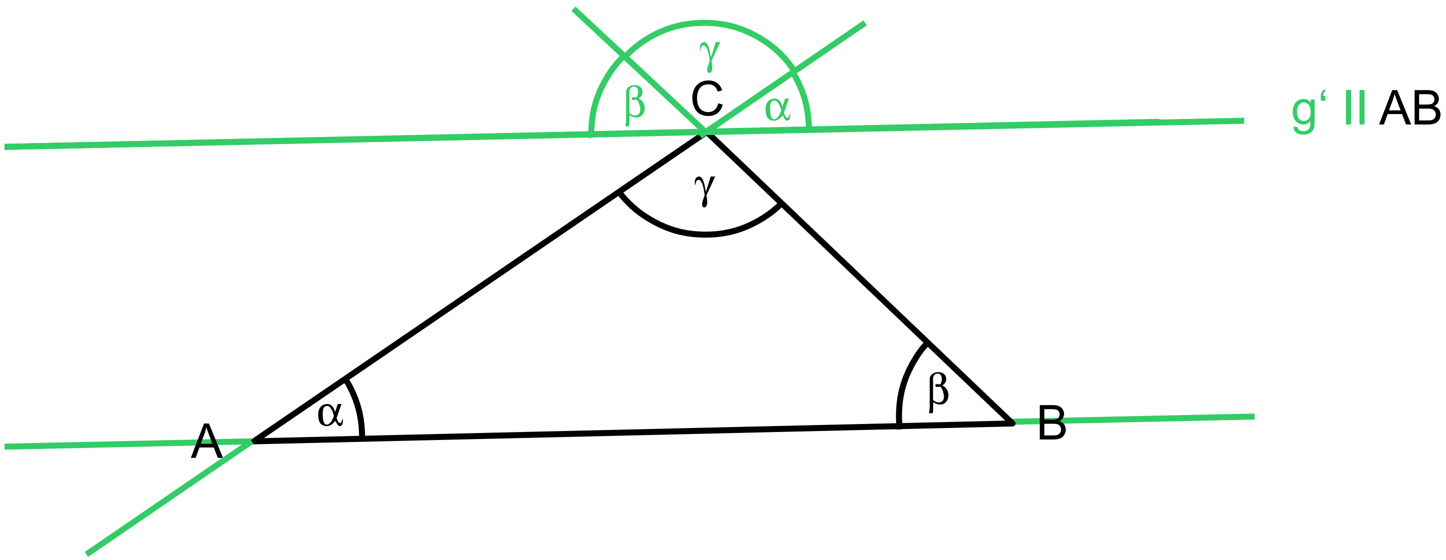
Sei $\alpha = \alpha'$. Angenommen $g \nparallel g'$. Dann gibt es durch den Punkt A' nach dem Parallelenaxiom genau eine Gerade g'' mit $g'' \parallel g$. Dann müsste aber nach dem vorigen Beweis $\alpha = \alpha''$ sein, im Widerspruch zur Tatsache, dass $\alpha \neq \alpha''$ ist . Also ist $g \parallel g'$ wahr .

Der Winkelsummensatz im Dreieck

In jedem Dreieck ΔABC gilt : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

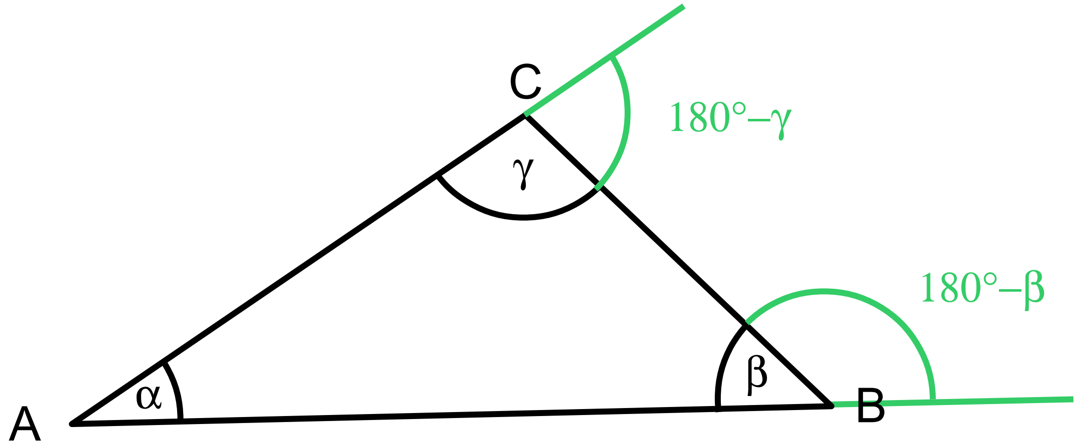
Beweis :

Man zeichnet durch C die Parallele g‘ zu AB . Nach dem Stufen- und dem Gegenwinkelsatz folgt dann die Behauptung .



Folgerung (1) :

In jedem Dreieck ΔABC ist jeder Winkel an eine Ecke jeweils kleiner als die Außenwinkel an den anderen beiden Ecken, zum Beispiel : $\alpha < 180° - \beta$, $\alpha < 180° - \gamma$



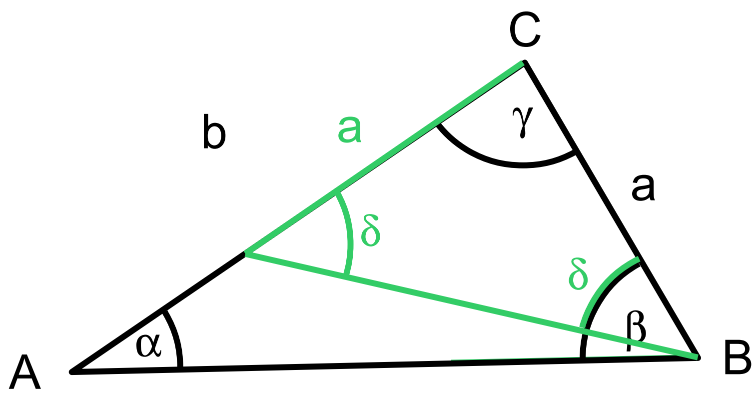
Beweis :

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma < 180° - \beta$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma < 180° - \gamma$$

Folgerung (2) :

In jedem Dreieck ΔABC liegt dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenüber, zum Beispiel : $\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad a < b$



Beweis : „ $\Leftarrow$ “

Sei $a < b$. Dann folgt nach **Folgerung (1)** und und dem **Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke**, dass $\alpha < \delta < \beta$ ist .

Beweis : „ $\Rightarrow$ “

Sei $\alpha < \beta$. Angenommen $a \geq b$.
Im Fall $a = b$ folgte nach dem Basiswinkelsatz für Dreiecke, dass $\alpha = \beta$ ist. Im Fall $a > b$ folgte nach dem vorigen Beweis, dass $\alpha > \beta$ ist .
In beiden Fällen erhält man jeweils einen Widerspruch zur Voraussetzung .

Also ist die Behauptung $a < b$ wahr .

Die Dreiecksungleichung

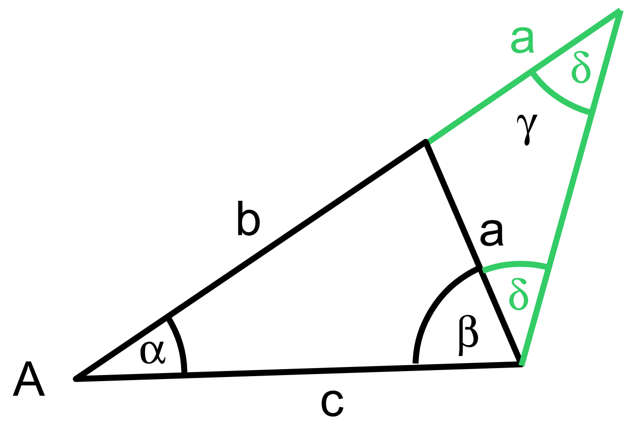
In jedem ΔABC mit den Seiten a , b , c gelten folgende Ungleichungen :

$a + b > c \quad , \quad b + c > a \quad , \quad c + a > b$

Beweis :

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $a < b < c$ ist .

Wegen $\delta + \beta > \delta$ folgt $a + b > c$.



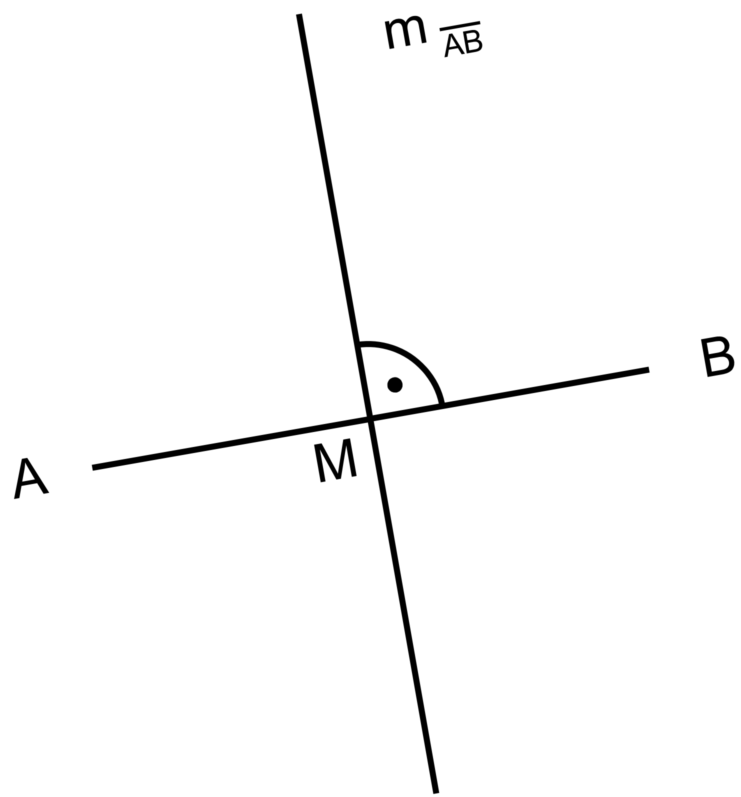
Nach Voraussetzung folgt :

$b + c \geq a + c > a$

$c + a \geq b + a > b$

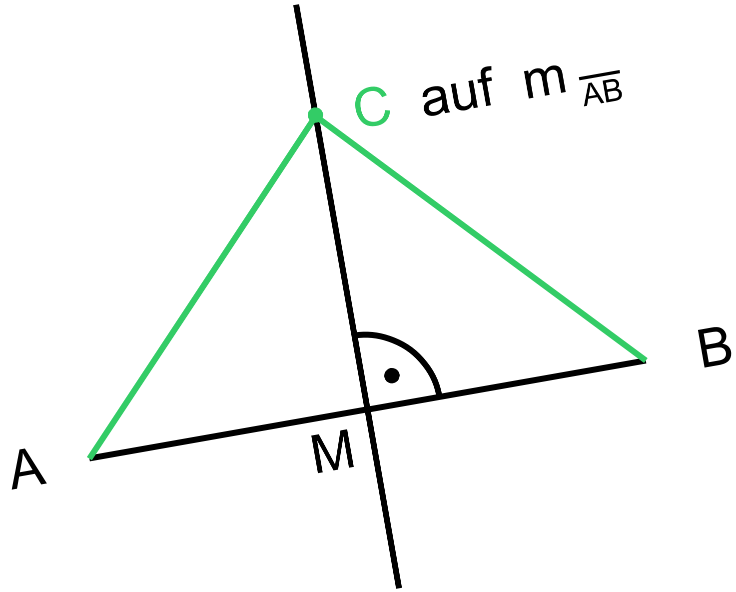
Die Mittelsenkrechte zu einer Strecke

Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$.
Die **Mittelsenkrechte** $m_{\overline{AB}}$ **zur Strecke** $\overline{AB}$ ist die Gerade durch die Mitte der Strecke, die diese in einem Winkel von 90° schneidet .



Eigenschaft der Mittelsenkrechten (1)

Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$ und die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$.
Außerdem sei $C \in m_{\overline{AB}}$ irgend ein Punkt der Mittelsenkrechten .
Dann gilt : $|CA| = |CB|$

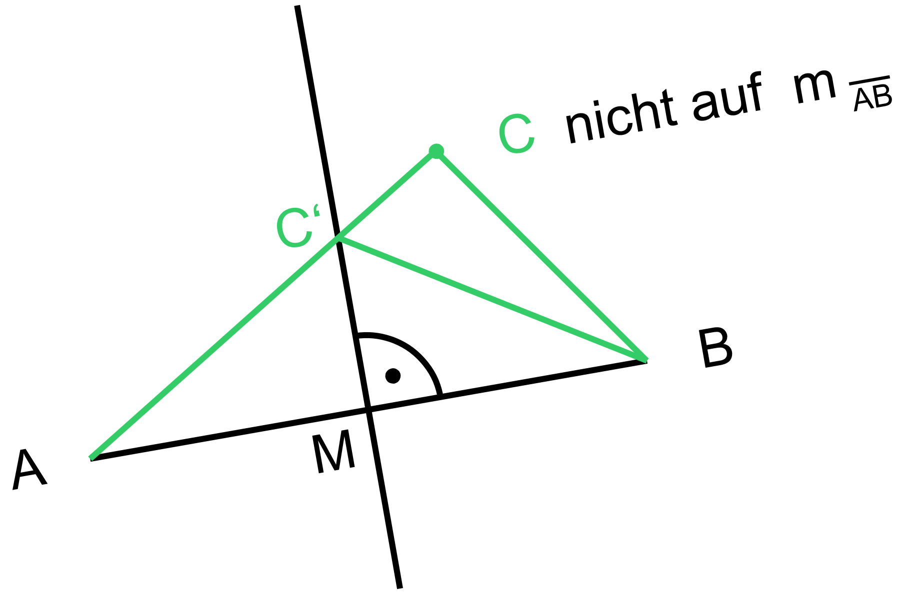


Beweis :

Die Dreiecke ΔAMC und ΔBMC stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind somit kongruent, also folgt $|CA| = |CB|$.

Eigenschaft der Mittelsenkrechten (2)

Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$ und die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$.
Außerdem sei $C \notin m_{\overline{AB}}$ irgend ein Punkt der nicht auf der Mittelsenkrechten liegt. Dann gilt : $|CA| \neq |CB|$



Beweis :

$|CA| = |AC| = |AC'| + |C'C| = |BC''| + |C'C| > |BC| = |CB|$, wegen der **Dreiecksungleichung** , also $|CA| \neq |CB|$.

Charakterisierung der Mittelsenkrechten

Aufgrund der Eigenschaften **(1)** , **(2)** kann man sagen, dass die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ zur Strecke $\overline{AB}$ aus genau den Punkten besteht, die von A und B jeweils gleichen Abstand haben :

$$m_{\overline{AB}} = \{ C : |CA| = |CB| \}$$

Da eine Gerade bereits durch zwei Punkte bestimmt ist, kann man die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ mit Zirkel und Lineal bestimmen. Dies führt einem auf folgende Konstruktion :

Konstruktion der Mittelsenkrechten

(I) Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$.

(II) Zeichne zwei Kreise $K_{A;r}$, $K_{B;r}$ mit genügend großem Radius

$$r > \frac{|AB|}{2} .$$

(III) Der Schnittmenge der Kreise seien die Punkte C , C' :

$$K_{A;r} \cap K_{B;r} = \{C \; ; \; C'\}$$

(IV) Die Mittelsenkrechte ist die Gerade durch C , C' : $m_{\overline{AB}} = CC'$

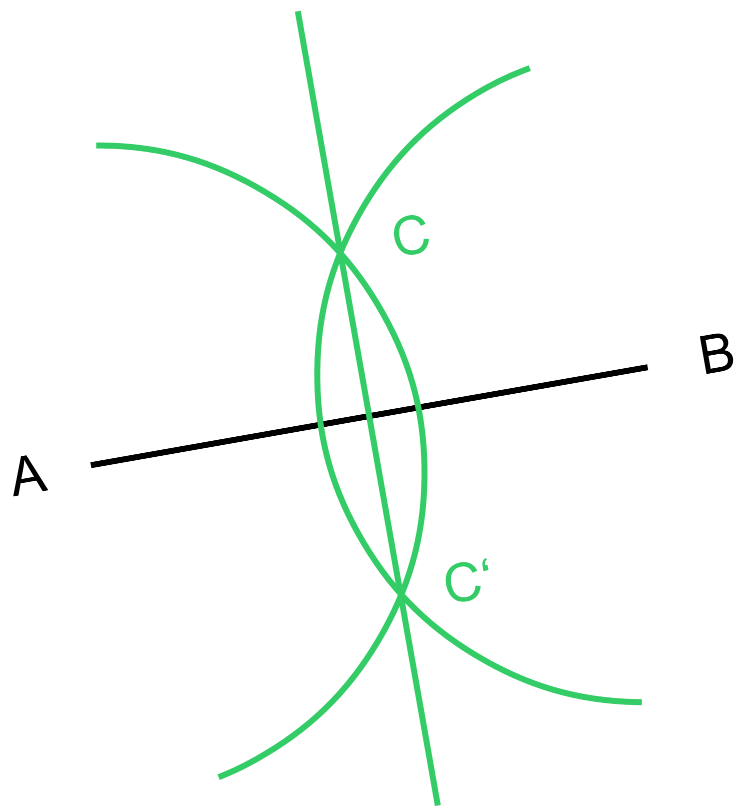
Konstruktion der Mittelsenkrechten (minimalistisch)

(I) $\overline{AB}$

(II) $K_{A;r}\ ,\ K_{B;r}\ ,\ r > \dfrac{|AB|}{2}$

(III) $K_{A;r} \cap K_{B;r} = \{C\ ;\ C'\}$

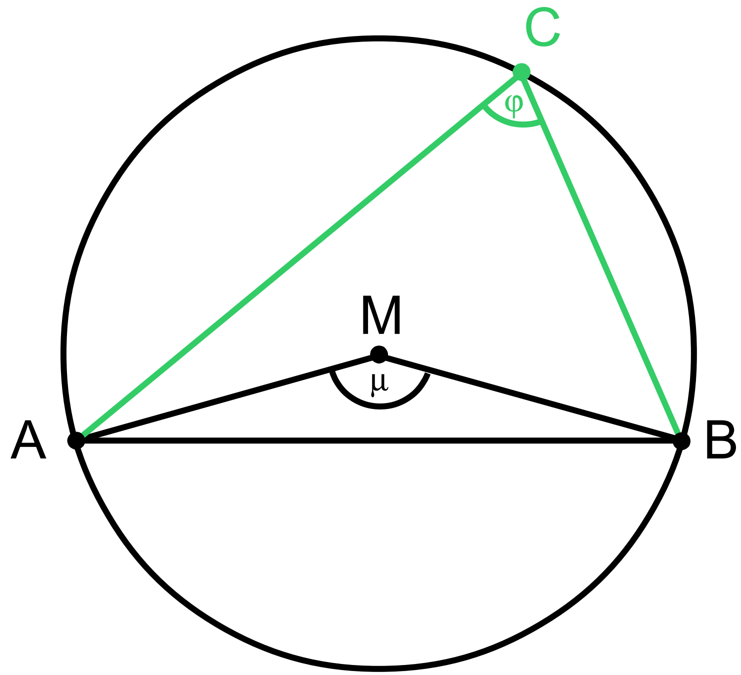
(IV) $m_{\overline{AB}} = CC'$



Der Umfangswinkelsatz

Gegeben sei der Kreis $K_{M;r}$, zwei Punkte A , B , die Sehne $\overline{AB}$ sowie der zugehörige Mittelpunktswinkel $\mu = \sphericalangle AMB$.
Dann gilt für jeden Punkt $C \in K_{M;r}$ mit entsprechendem Umfangswinkel $\varphi = \sphericalangle ACB$:

$$\varphi = \frac{\mu}{2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{360° - \mu}{2}$$



Beweis :

1. Fall : C liegt auf dem größeren Kreisbogen

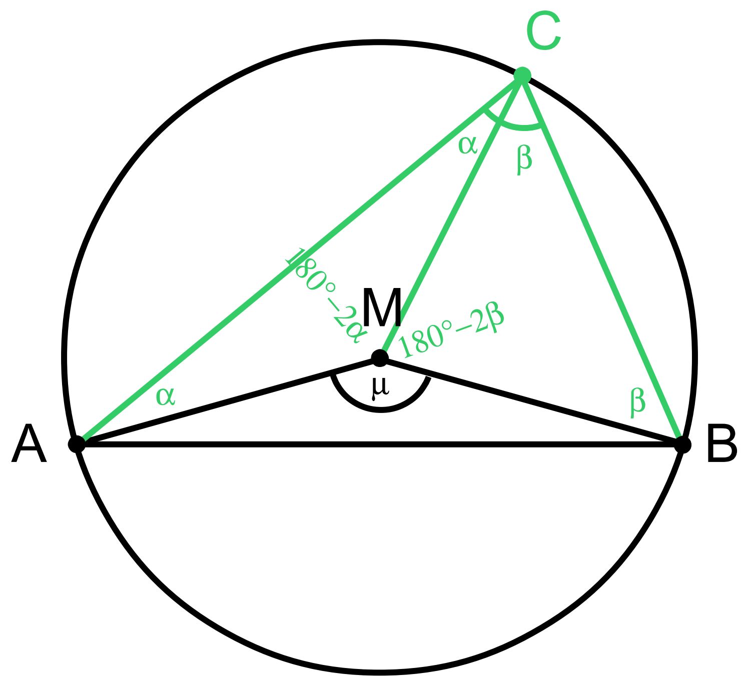
$$\mu = 360° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta)$$

$$\mu = 2\alpha + 2\beta$$

$$\mu = 2(\alpha + \beta)$$

$$\mu = 2\varphi$$

$$\varphi = \frac{\mu}{2}$$



Beweis :

2. Fall : C liegt auf dem kleineren Kreisbogen

$$\mu = (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta)$$

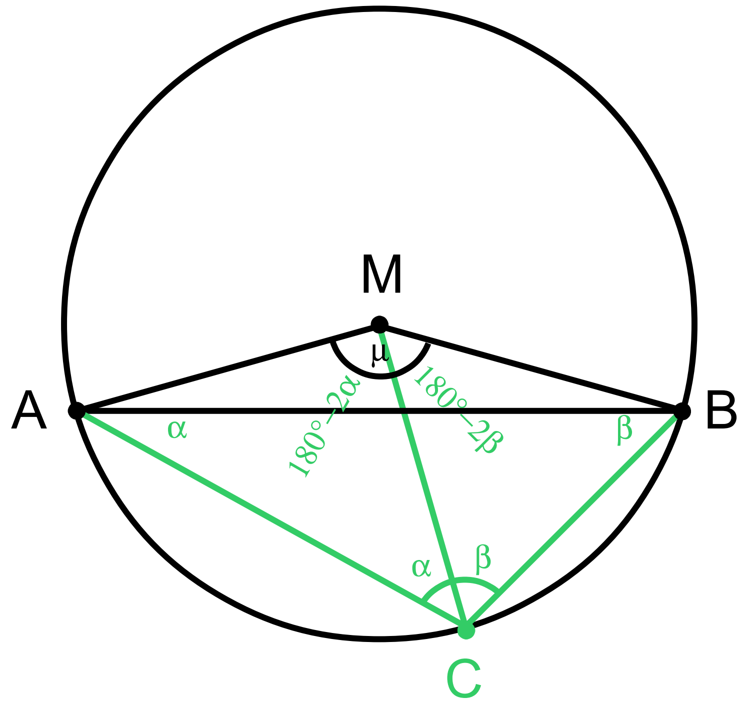
$$\mu = 360° - 2\alpha - 2\beta$$

$$\mu = 360° - 2(\alpha + \beta)$$

$$\mu = 360° - 2\varphi$$

$$2\varphi = 360° - \mu$$

$$\varphi = \frac{360° - \mu}{2}$$

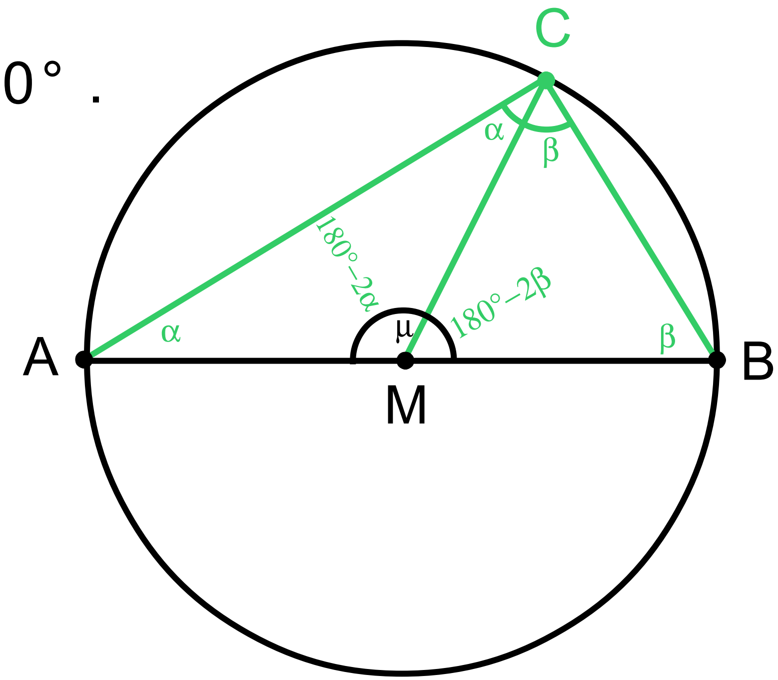


Folgerung : Satz von Thales (~600 v. Chr.)

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel .

Beweis :

Wenn $\overline{AB}$ ein Durchmesser ist, ist $\mu = 180°$.



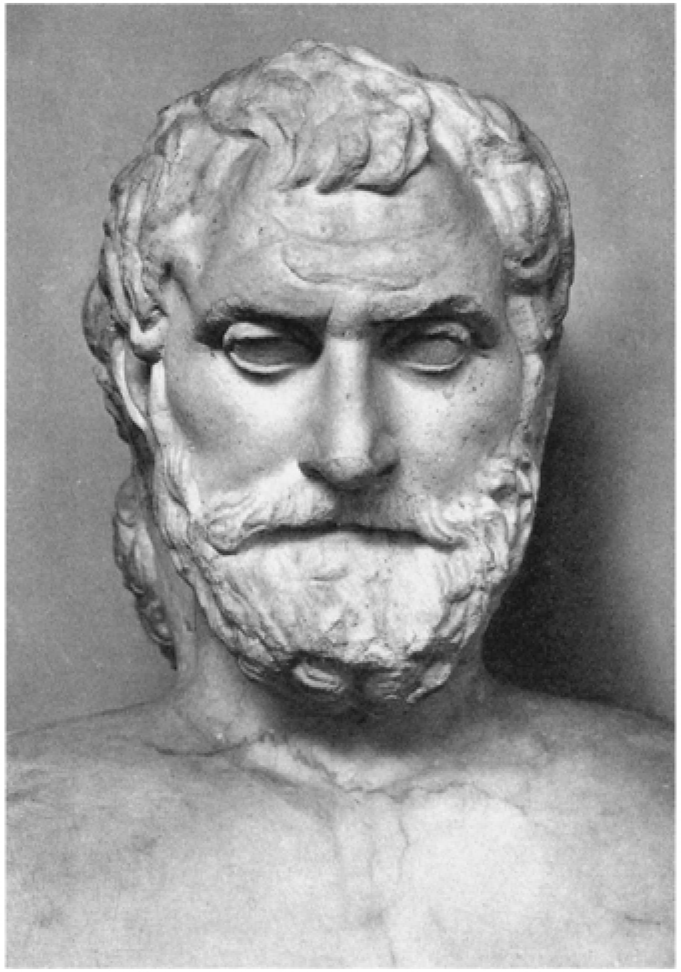
Dann folgt :

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$$

$$180° - 2(\alpha + \beta) = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{180°}{2}$$

$$\varphi = 90°$$



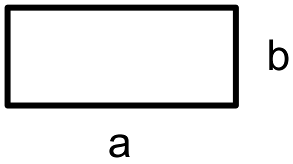
Thales von Milet
(~ 623 – 648 v. Chr.)

Thales aranged with Bias of Priene in a double herm.
Roman copy of a 4th century B.C. Greek original. Vatican, Galleria Geografica Inv. 2892
(photo G. Lippold, Die Skulpturen des Vaticanischen Museums III 2, Berlin, 1956, pl. 198, 18 [right])

Le Mort dans la ville - Burying A Sage: The Heroon Of Thales In The Agora Of Miletos - Institut français d'études anatoliennes (openedition.org)

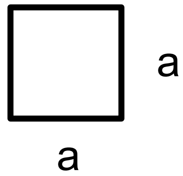
Flächenrechnung

Rechteck



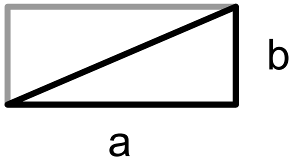
$$A = a\,b$$

Quadrat



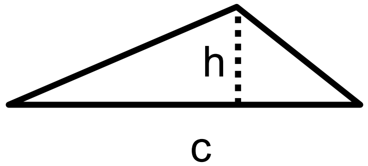
$$A = a^2$$

Rechtwinkliges Dreieck



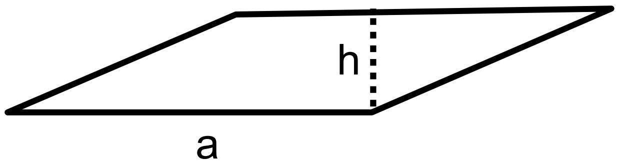
$$A = \frac{a\,b}{2}$$

Dreieck



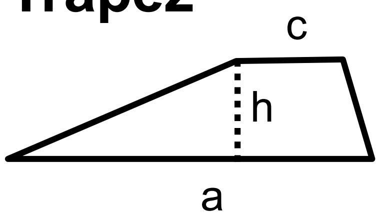
$$A = \frac{c\,h}{2}$$

Parallelogramm



$$A = a\,h$$

Trapez



$$A = \frac{a+c}{2}\,h$$

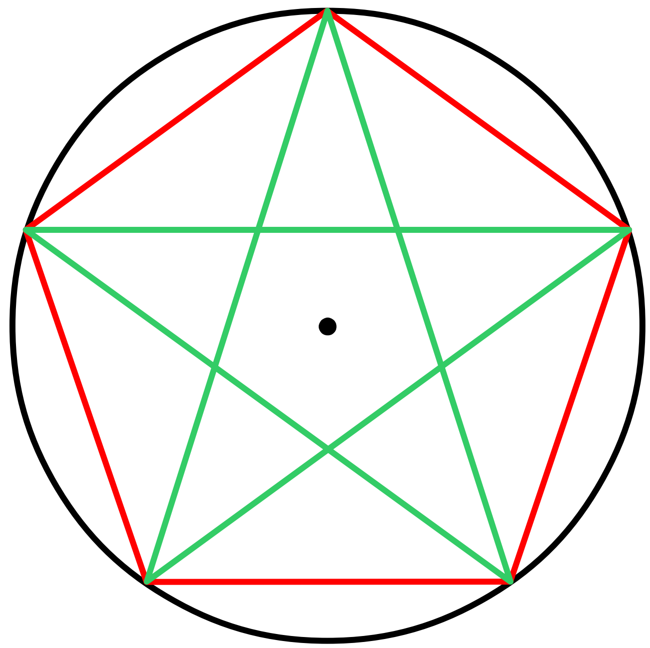
Pythagoras (~ 500 v. Chr.)

Römische Bronzebüste des Pythagoras im Achäologischen Museum in Neapel

Original Büste Foto:
„Roman Bronze possibly Pythagoras“ von Allan Gluck

Pythagoras gilt neben **Thales** als Begründer der griechischen Mathematik, welche sich dadurch auszeichnet, dass alle verwendeten Aussagen oder Sätze, selbstverständlich unter Ausnahme der Axiome, auch bewiesen wurden. Unsere heutige Mathematik begründet sich auf diesem Prinzip. Kulturen wie die der Ägypter oder der Babylonier haben im Rahmen ihrer Mathematik keinerlei Beweise hinterlassen.

Pythagoras selbst und seine Schüler waren in einem philosophischen Geheimbund, den sogenannten Pythagoreern, organisiert. Alle Erkenntnisse wurden mündlich weitergegeben. Schriftliche Aufzeichnung haben sie nicht hinterlassen.



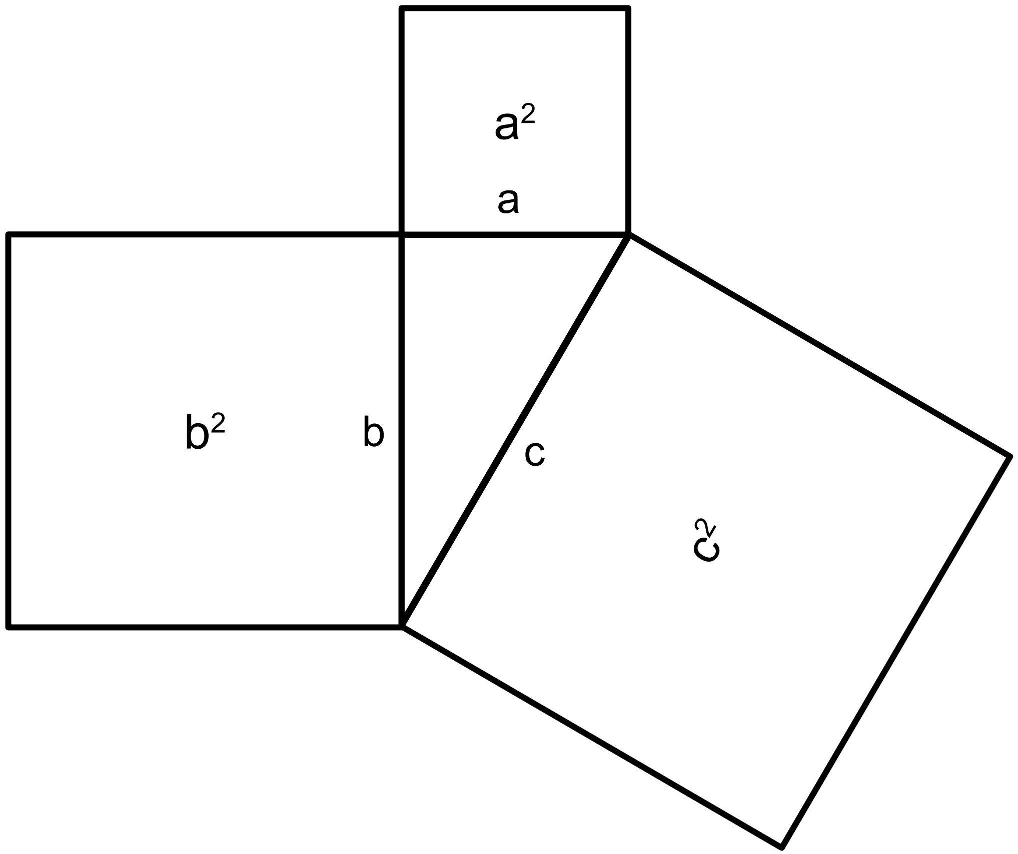
Das Erkennungszeichen der Pythagoreer soll das **Pentagramm**, also der regelmäßige Fünfstern, der durch die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks gebildet wird, gewesen sein .

Die Besonderheit des Pentagramms ist, dass sich die Diagonalen im sogenannten **Goldenen Schnitt** teilen.

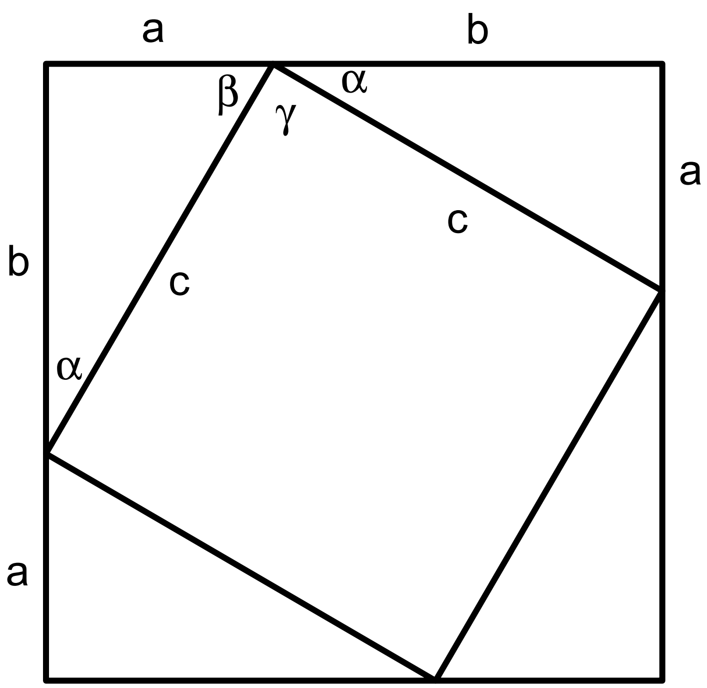
Der Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c gilt :

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Beweis :



Winkelbetrachtung :

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$90° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 90°$$

Flächenbetrachtung :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}$$

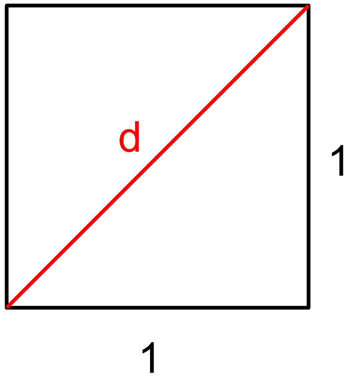
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Anwendungen des Satzes von Pythagoras

(1) Diagonale im Einheitsquadrat



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$d = ?$ heutige Schreibweise : $d = \sqrt{2}$

Näherungswerte für d :

$$\begin{array}{lcl} 1 & < d < & 2 \\ 1{,}4 & < d < & 1{,}5 \\ 1{,}41 & < d < & 1{,}42 \\ 1{,}414 & < d < & 1{,}415 \\ & \vdots & \end{array}$$

Der Prozess der immer genaueren Darstellung der Diagonalen d hört niemals auf. Das heißt, dass d nicht durch eine Dezimalzahl oder als Bruchzahl dargestellt werden kann. Dies konnten die **Pythagoreer** durch einen sogenannten **Widerspruchsbeweis** zeigen :

Angenommen : $d = \frac{Z}{N}$ maximal gekürzt

$$\left(\frac{Z}{N}\right)^2 = 2$$

$$\frac{Z^2}{N^2} = 2$$

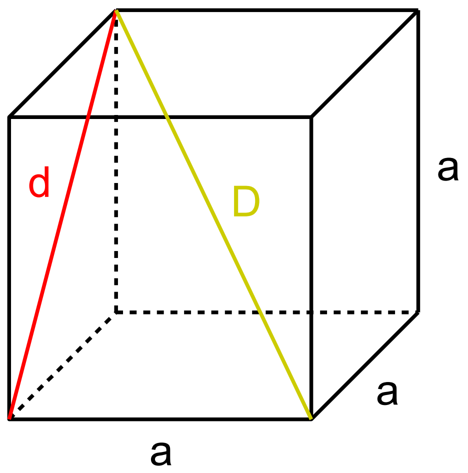
$Z^2 = 2N^2 \quad \Rightarrow \quad Z$ gerade, etwa $Z = 2Z'$

$$4Z'^2 = 2N^2$$

$2Z'^2 = N^2 \quad \Rightarrow \quad N$ gerade, etwa $N = 2N'$

$\Rightarrow \quad d = \frac{Z}{N} = \frac{2Z'}{2N'}$ Kürzbar durch 2 .
Widerspruch zur Annahme !

(2) Flächen- und Raumdiagonalen des Würfels



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$\boxed{d = \sqrt{2}\,a}$$

$$D^2 = a^2 + d^2$$

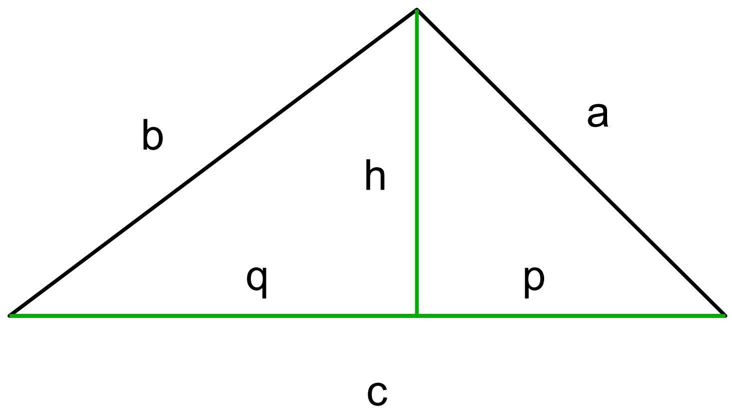
$$D^2 = a^2 + 2a^2$$

$$D^2 = 3a^2$$

$$D = \sqrt{3a^2}$$

$$\boxed{D = \sqrt{3}\,a}$$

(3) Berechnung von h , p , q , A am Dreieck Δabc



$$p^2 + h^2 = a^2$$

$$q^2 + h^2 = b^2$$

$$p + q = c \quad \Rightarrow \quad q = c - p$$

$$q^2 + h^2 = b^2$$

$$(c-p)^2 + h^2 = b^2$$

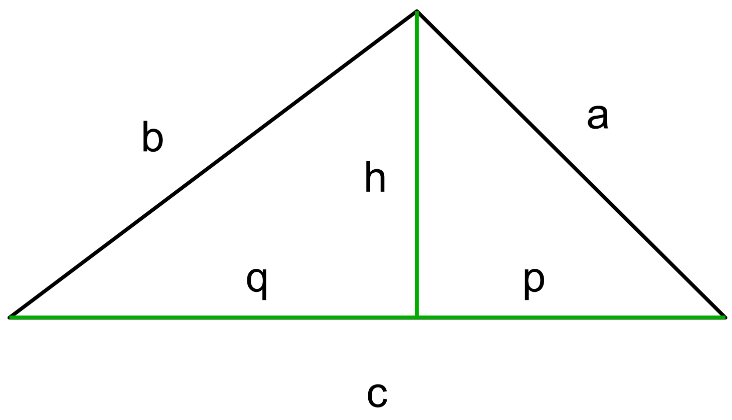
$$h^2 = b^2 - (c-p)^2$$

$$p^2 + h^2 = a^2$$

$$p^2 + b^2 - (c-p)^2 = a^2$$

$$\cancel{p^2} + b^2 - c^2 + 2cp - \cancel{p^2} = a^2$$

$$\boxed{p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}}$$



$$p^2 + h^2 = a^2$$
$$q^2 + h^2 = b^2$$
$$p + q = c$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}}$$

Analog :

$$\boxed{q = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}}$$

$$p^2 + h^2 = a^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)^2}{4c^2}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2}{4c^2} - \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{- a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}$$

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}}$$

$$A = \frac{1}{2}ch$$

$$A = \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}$$

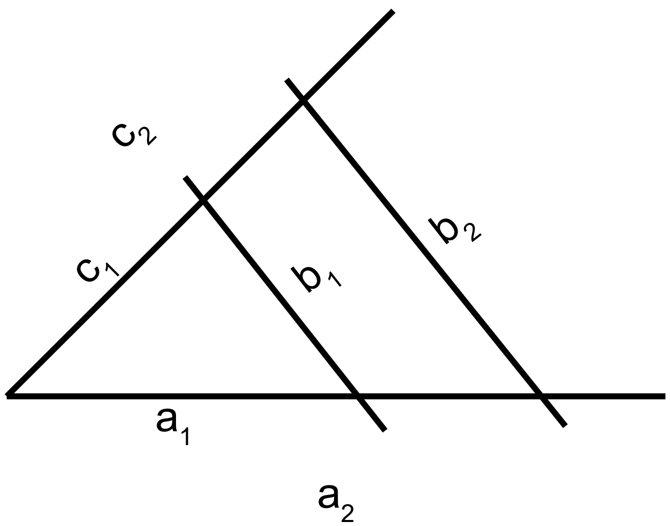
$$\boxed{A = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}$$

Strahlensätze

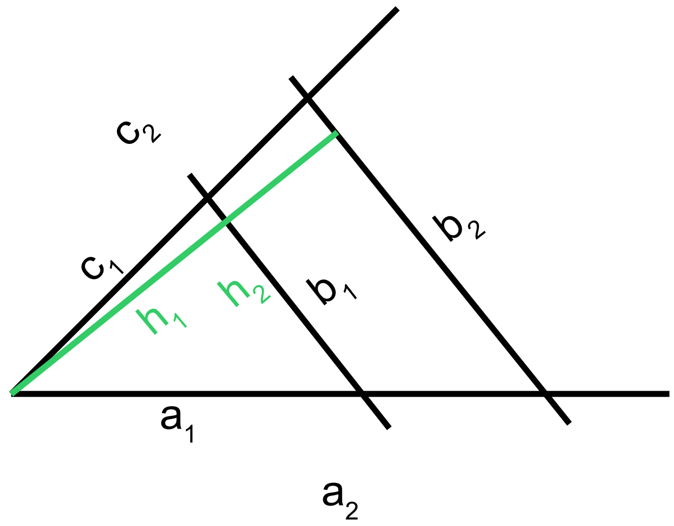
Werden zwei Halbgeraden (Strahlen) mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen Geraden geschnitten, so gelten für die entsprechenden Abschnitte auf den Strahlen bzw. Parallelen folgende Gleichungen :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1} \qquad\qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

1. Strahlensatz **2. Strahlensatz**



1. Beweis :



Flächenbetrachtung der Dreiecke $\Delta\, a_2 b_2 c_2$, $\Delta\, a_1 b_1 c_1$ und des Trapezes :

$$\frac{b_2 h_2}{2} = \frac{b_1 h_1}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2}\left(h_2 - h_1\right)$$

$$b_2 h_2 = b_1 h_1 + \left(b_1 + b_2\right)\left(h_2 - h_1\right)$$

$$b_2h_2 = b_1h_1 + (b_1+b_2)(h_2-h_1)$$

$$b_2h_2 = b_1h_1 + b_1h_2 - b_1h_1 + b_2h_2 - b_2h_1$$

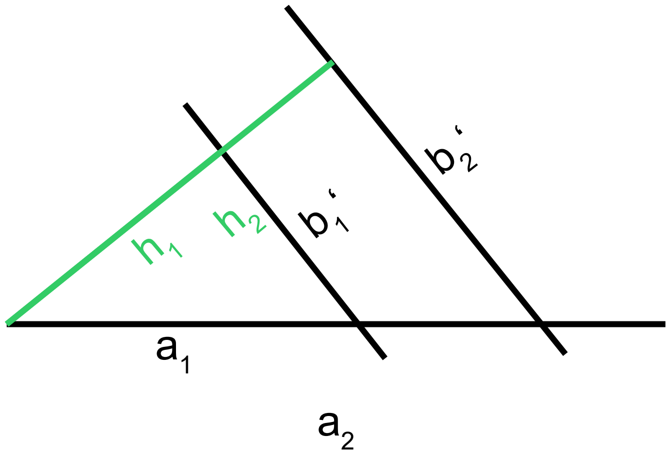
$$\cancel{b_2h_2} = \cancel{b_1h_1} + b_1h_2 - \cancel{b_1h_1} + \cancel{b_2h_2} - b_2h_1$$

$$0 = b_1h_2 - b_2h_1$$

$$b_2h_1 = b_1h_2$$

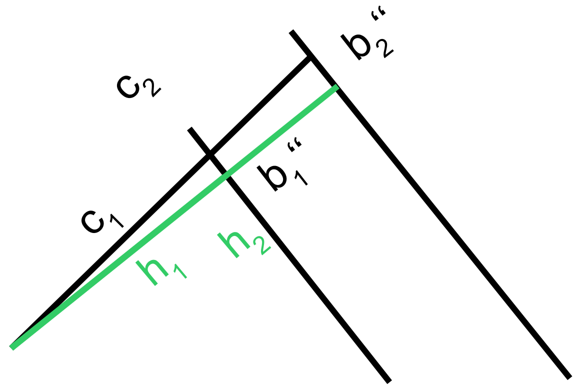
$$\boxed{\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1}}$$

Die Flächenbetrachtung der Dreiecke $\Delta a_1 b_1' h_1$, $\Delta a_2 b_2' h_2$ und des entsprechenden Trapezes liefert :



$$\boxed{\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{h_2}{h_1}}$$

Die Flächenbetrachtung der Dreiecke $\Delta a_1 b_1'' h_1$, $\Delta a_2 b_2'' h_2$ und des entsprechenden Trapezes liefert :

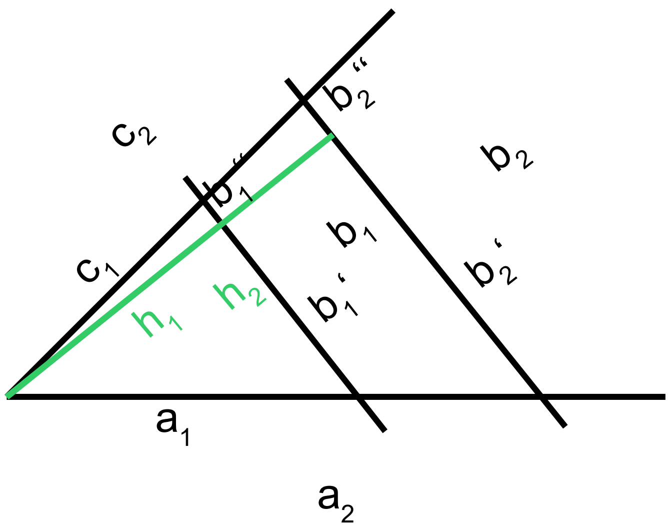


$$\boxed{\frac{b_2''}{b_1''} = \frac{h_2}{h_1}}$$

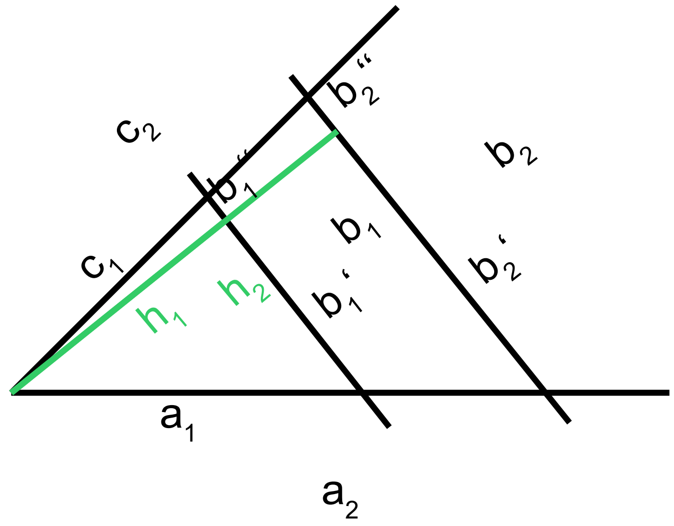
Insgesamt hat man jetzt folgende Gleichungen :

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2'}{b_1'} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2''}{b_1''} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \qquad b_2' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1' \qquad b_2'' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1''$$



$$b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \qquad b_2' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1' \qquad b_2'' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1''$$



Mit dem Satz des Pythagoras folgt :

$$a_2 = \sqrt{h_2^{\,2} + b_2^{'\,2}}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\, h_1\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\, b_1'\right)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\ h_1\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\ b_1'\right)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 h_1^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 b_1'^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left(h_1^2 + b_1'^2\right)}$$

$$a_2 = \frac{h_2}{h_1} \sqrt{\left(h_1^2 + b_1'^2\right)}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{h_2}{h_1}\ a_1}$$

Analog $\boxed{c_2 = \frac{h_2}{h_1}\ c_1}$

Man hat nun drei Gleichungen

$$a_2 = \frac{h_2}{h_1}\, a_1 \quad , \quad b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \quad , \quad c_2 = \frac{h_2}{h_1}\, c_1 \quad ,$$

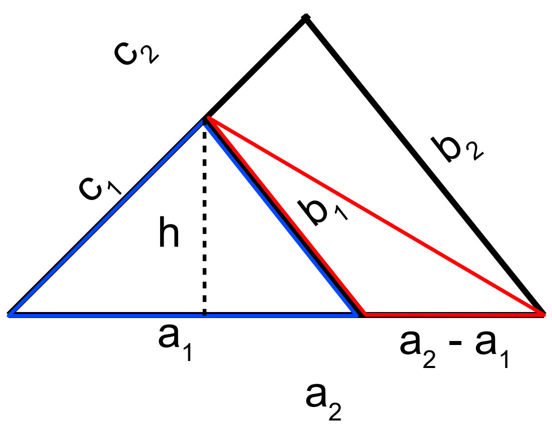
die man wie folgt umformen kann :

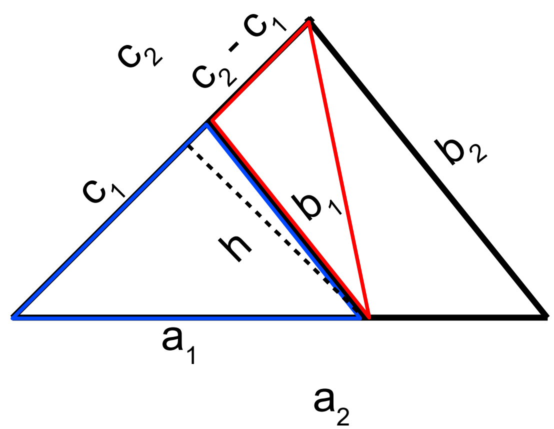
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{c_2}{c_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1} \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

1. Strahlensatz **2. Strahlensatz**

2. Beweis :





Die beiden roten Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt Δ , weil Grundseite und Höhe gleich sind. Für das Verhältnis Δ zu Δ folgt :

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\frac{(a_2 - a_1)h}{2}}{\frac{a_1 h}{2}} \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\frac{(c_2 - c_1)h}{2}}{\frac{c_1 h}{2}}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

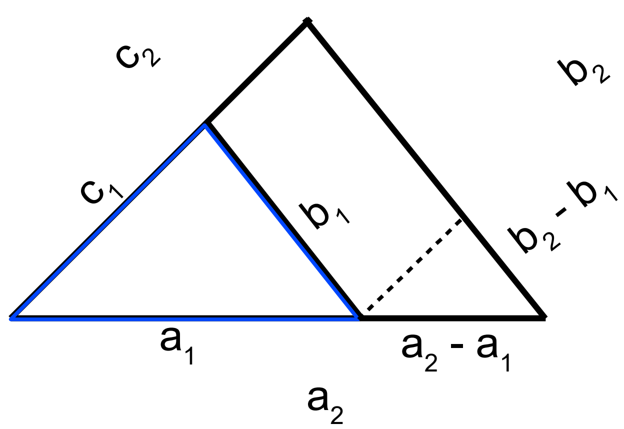
$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \qquad\qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

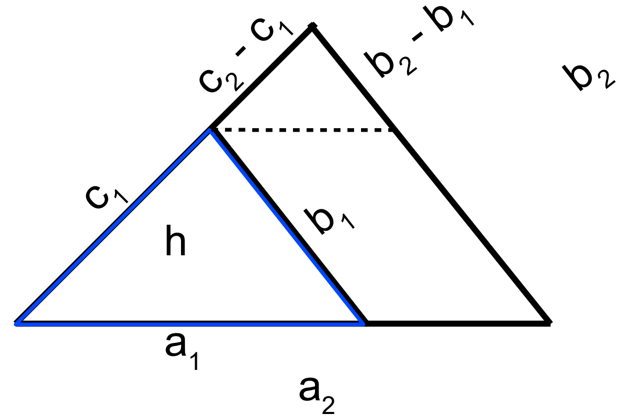
$$\Rightarrow \quad \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

1. Strahlensatz





$$\frac{a_2-a_1}{a_2} = \frac{b_2-b_1}{b_2} \qquad\qquad \frac{c_2-c_1}{c_2} = \frac{b_2-b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow\ 1-\frac{a_1}{a_2} = 1-\frac{b_1}{b_2} \qquad\qquad \Rightarrow\ 1-\frac{c_1}{c_2} = 1-\frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad\qquad \Rightarrow\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}} \qquad\qquad \Rightarrow\ \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

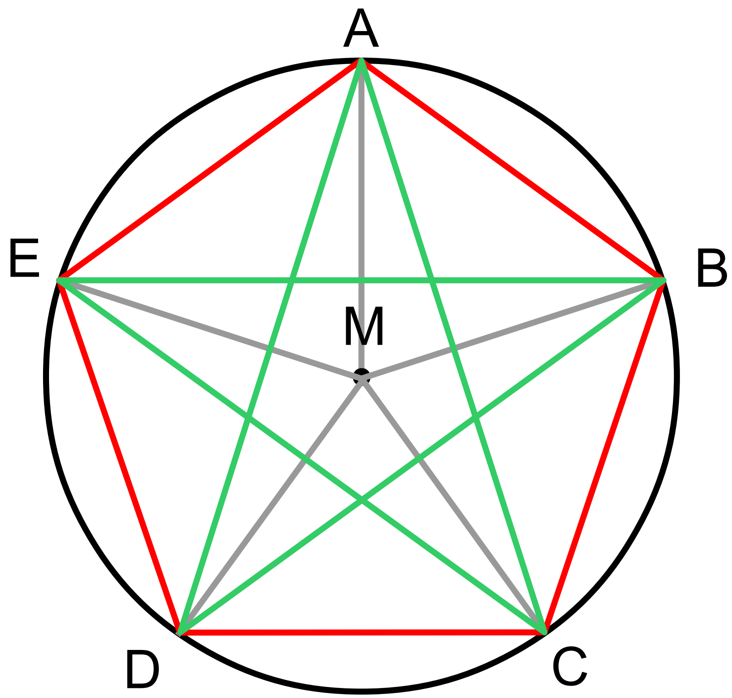
2. Strahlensatz

Das Pentagramm

Gegeben sei ein Kreis $K_{M;r}$. Unterteilt man den Vollwinkel am Mittelpunkt in fünf gleich gleich große Teilwinkel $\mu = \dfrac{360°}{5} = 72°$, so erhält auf dem Kreis die Punkte A , ... , E und mittels gewisser Verbindungslinien das regelmäßige Fünfeck oder **Pentagon** sowie den Fünfstern oder das **Pentagramm** .

Fünfeckseite : s

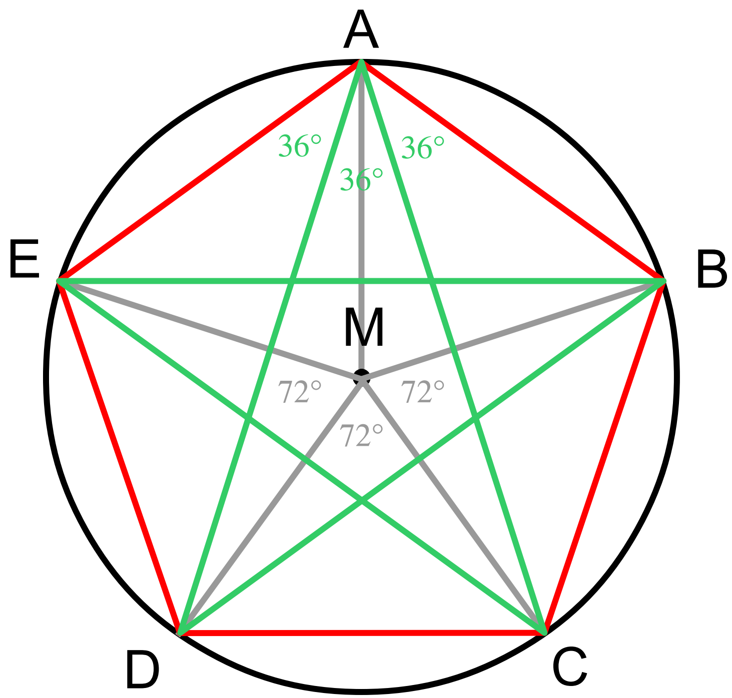
Fünfsternseite : d



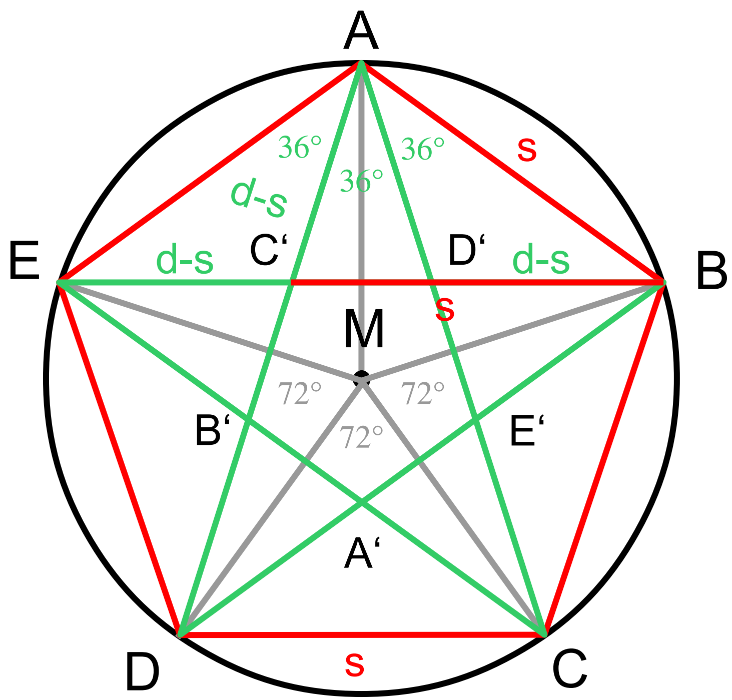
Da die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ jeweils den Mittelpunktswinkel von 72° haben, ergeben sich an den Ecken A , ... , E jeweilige Umfangswinkel zu 36° .

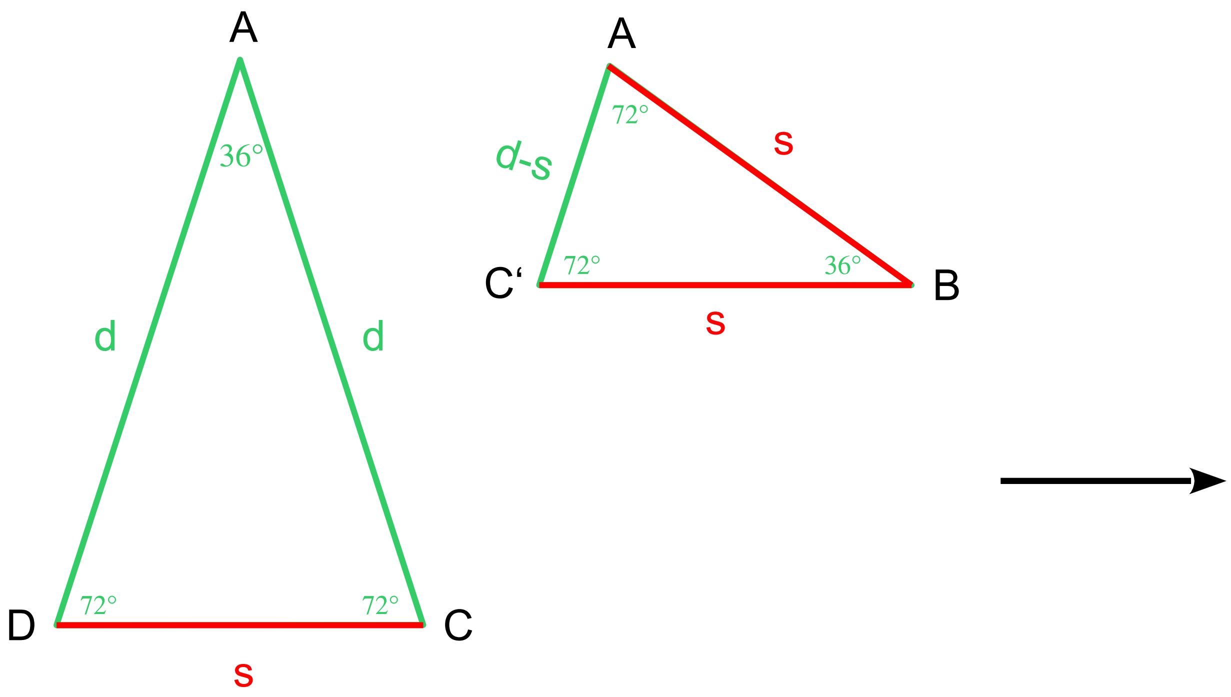
Fünfeckseite : s

Fünfsternseite : d



Die Figur enthält außerdem ähnliche (das heißt in allen drei Winkeln übereinstimmende) gleichschenklige Dreiecke :





Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

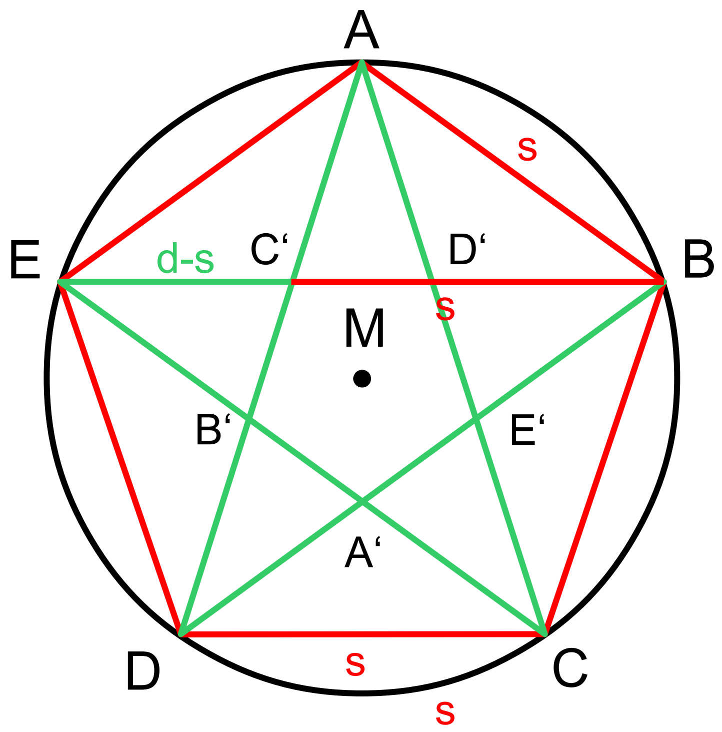
$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

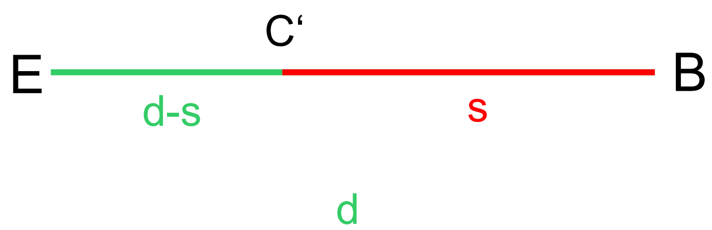
Nach dem 2. Strahlensatz gilt :

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

Bezogen auf die Teilung der Strecke $\overline{EB}$ durch den Punkt C' bzw. die Gesamtstrecke d , der größeren Strecke s und der kleiner d-s sagt diese Gleichung Folgendes :

Das Verhältnis der Gesamtstrecke zur größeren Strecke gleich ist dem Verhältnis der größeren Strecke zur kleineren . Diese Teilung heißt **Teilung im Goldenen Schnitt** !





Die Diagonalen im Pentagon teilen einander im **Goldenen Schnitt** !

Die Lösung der Gleichung des Goldenen Schnitts $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

$$\frac{d}{s}\left(\frac{d}{s}-1\right) = 1$$

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 - \frac{d}{s} = 1$$

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 - 1\,\frac{d}{s} - 1 = 0$$

$$\frac{d}{s} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \qquad \frac{d}{s} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} 1{,}618033989 \\ -0{,}618033989 \end{cases}$$

Die Zahl $\varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$ heißt **Goldene Schnittzahl** !