Polynomfunktionen

Arno Fehringer

Oktober 2022

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt die Funktion

$$p_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array} \right\}$$

Polynomfunktion vom Grad n .

Kurzschreibweise der Polynomfunktion mittels der Funktionsgleichung :

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Kurzschreibweise der Polynomfunktion mittels der Funktionsgleichung :

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Was bedeutet die Schreibweise $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$?

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \; . \; . \; . \; + a_n x^n$$

Vertauschung der Reihenfolge der Summation :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \; . \; . \; . \; + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Wegen $x^1 = x$ und $x^0 = 1$ folgt :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \; . \; . \; . \; + a_1 x + a_0$$

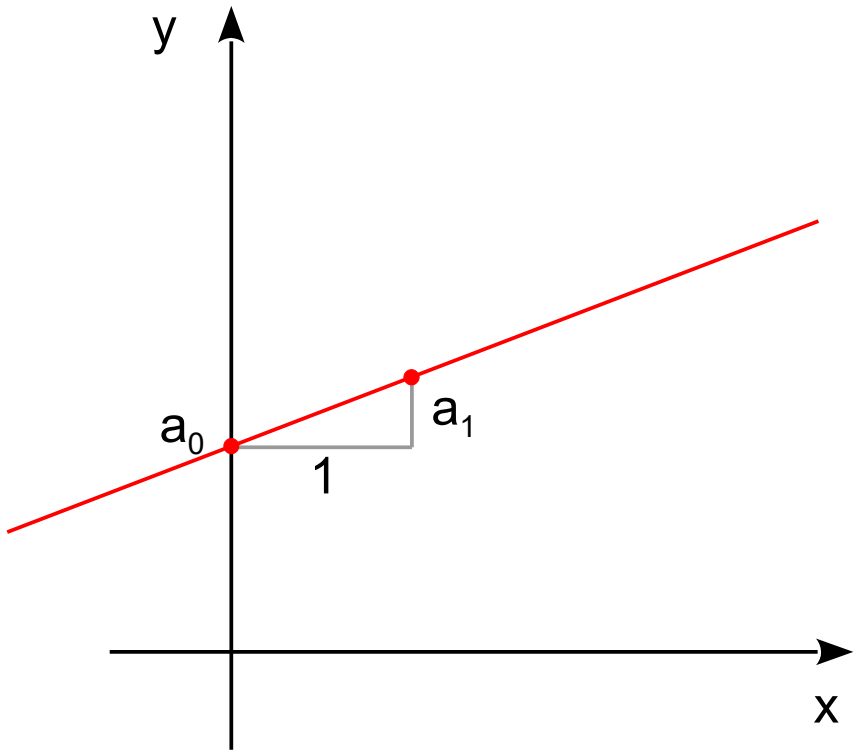
Beispiele für Polynomfunktionen $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$n = 1$:	$y = a_1 x + a_0$	lineare Funktion Graph: Gerade
$n = 2$:	$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	quadratische Funktion Graph: Parabel
$n = 3$:	$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	kubische Funktion Graph: kubische Parabel

Graphen und Eigenschaften von Polynomfunktionen

(1) Lineare Funktion $y = a_1 x + a_0$

a_0 = y-Achsenabschnitt a_1 = Steigung



(2) **Quadratische Funktion** $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Erzeugung der sogenannten **Scheitelform** :

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$y = a_2 \left[x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right]$$

$$y = a_2 \left[x^2 + 2\, x \frac{a_1}{2 a_2} + \frac{a_0}{a_2} \right]$$

Quadratische Ergänzung

$$y = a_2 \left[x^2 + 2\, x \underline{\frac{a_1}{2 a_2}} \underline{+ \left(\frac{a_1}{2 a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2 a_2}\right)^2} + \frac{a_0}{a_2} \right]$$

$$y = a_2\left[\underbrace{x^2 + 2x\frac{a_1}{2a_2} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2}\right]$$

$$y = a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2}\right]$$

$$y = a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2}\right]$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_2 a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_2 a_0}{a_2}$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + \frac{4a_0a_2}{4a_2}$$

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_2}$$

Setze : $x_S := -\frac{a_1}{2a_2}$ $\quad y_S := \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_2}$ $\quad$ Scheitel $S\left(x_S \mid y_S\right)$

$$y = a_2\left(x - x_S\right)^2 + y_S$$ **Scheitelform**

$$y = a_2\left(x - x_S\right)^2 + y_S \qquad x_S := -\frac{a_1}{2a_2} \qquad y_S := \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_2} \qquad S\left(\, x_S \mid y_S \,\right)$$

Für $x = x_S$ ist $y = y_S$

1. Fall : $a_2 > 0$

Für $x \neq x_S$ ist $y > y_S$

Der Scheitel ist der
tiefste Punkt der Parabel .

Die Parabel ist nach oben
geöffnet .

2. Fall : $a_2 < 0$

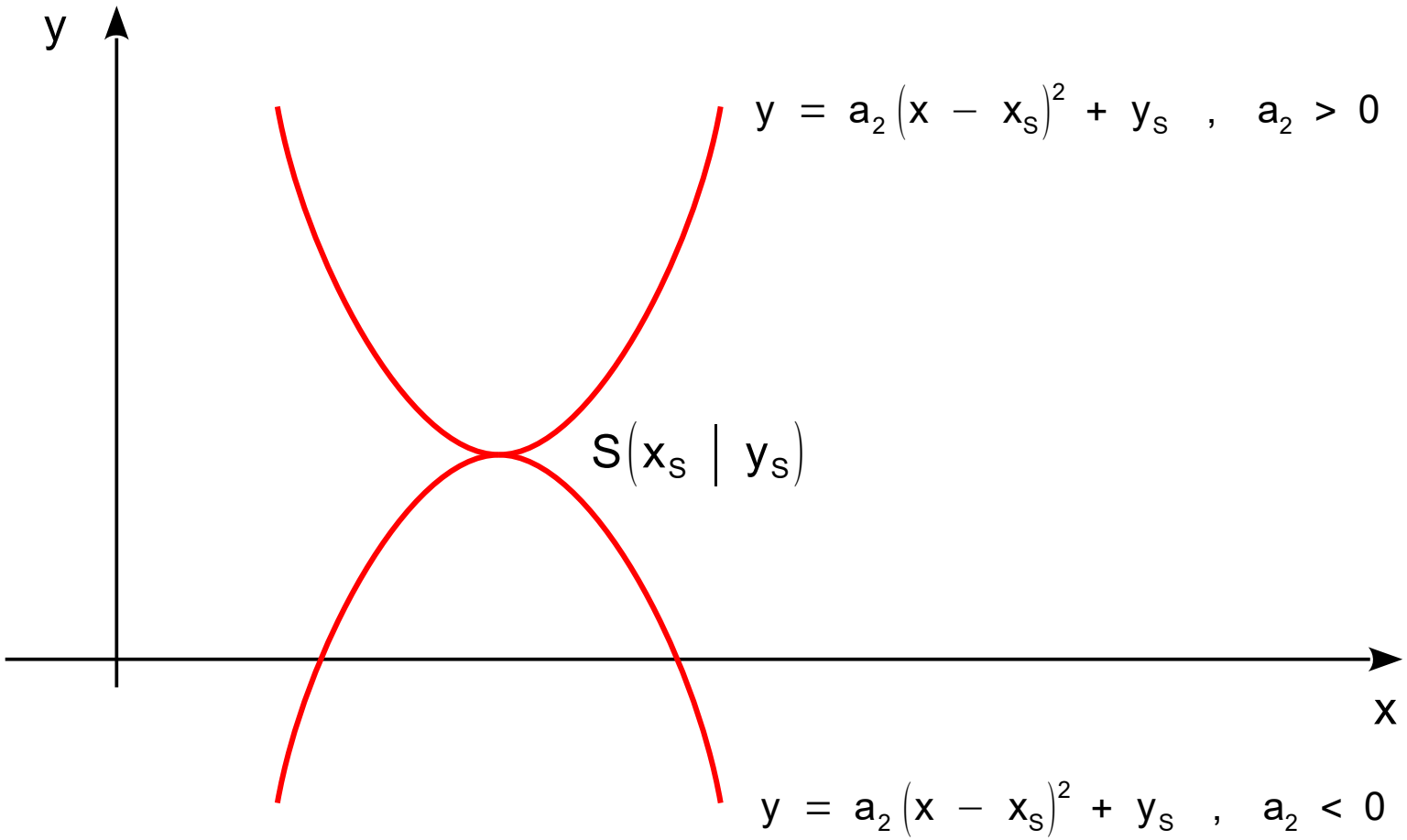
Für $x \neq x_S$ ist $y < y_S$

Der Scheitel ist der
höchste Punkt der Parabel .

Die Parabel ist nach unten
geöffnet .

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

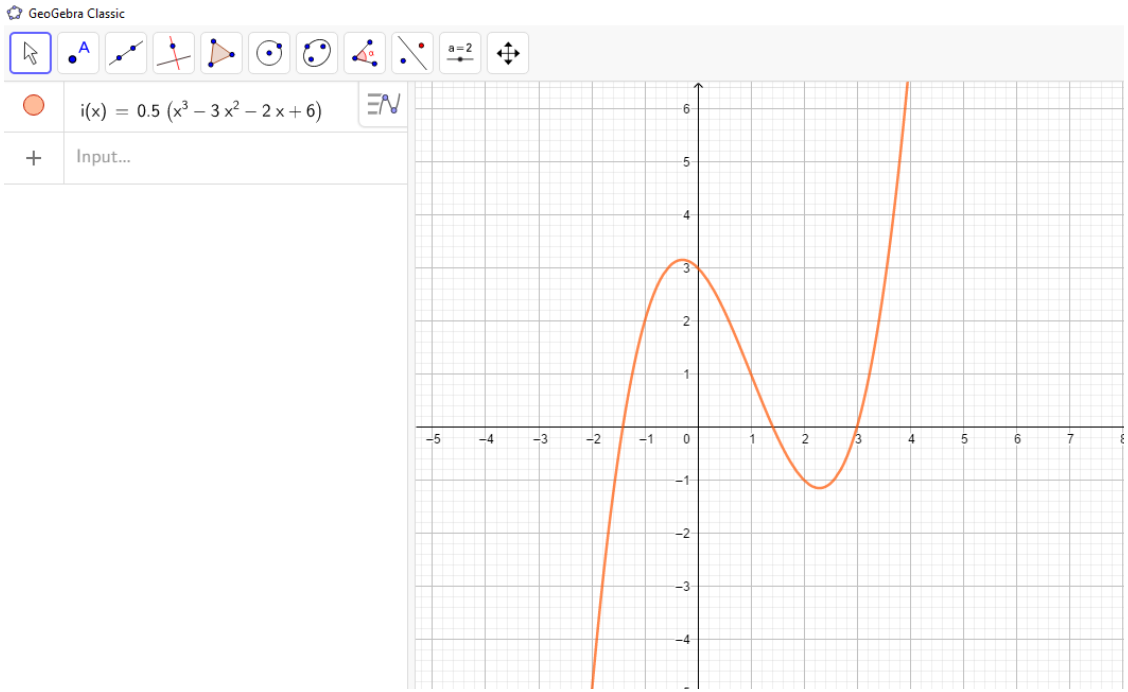
$$y = a_2 (x - x_S)^2 + y_S \qquad x_S := -\frac{a_1}{2a_2} \qquad y_S := \frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_2} \qquad S(x_S \mid y_S)$$



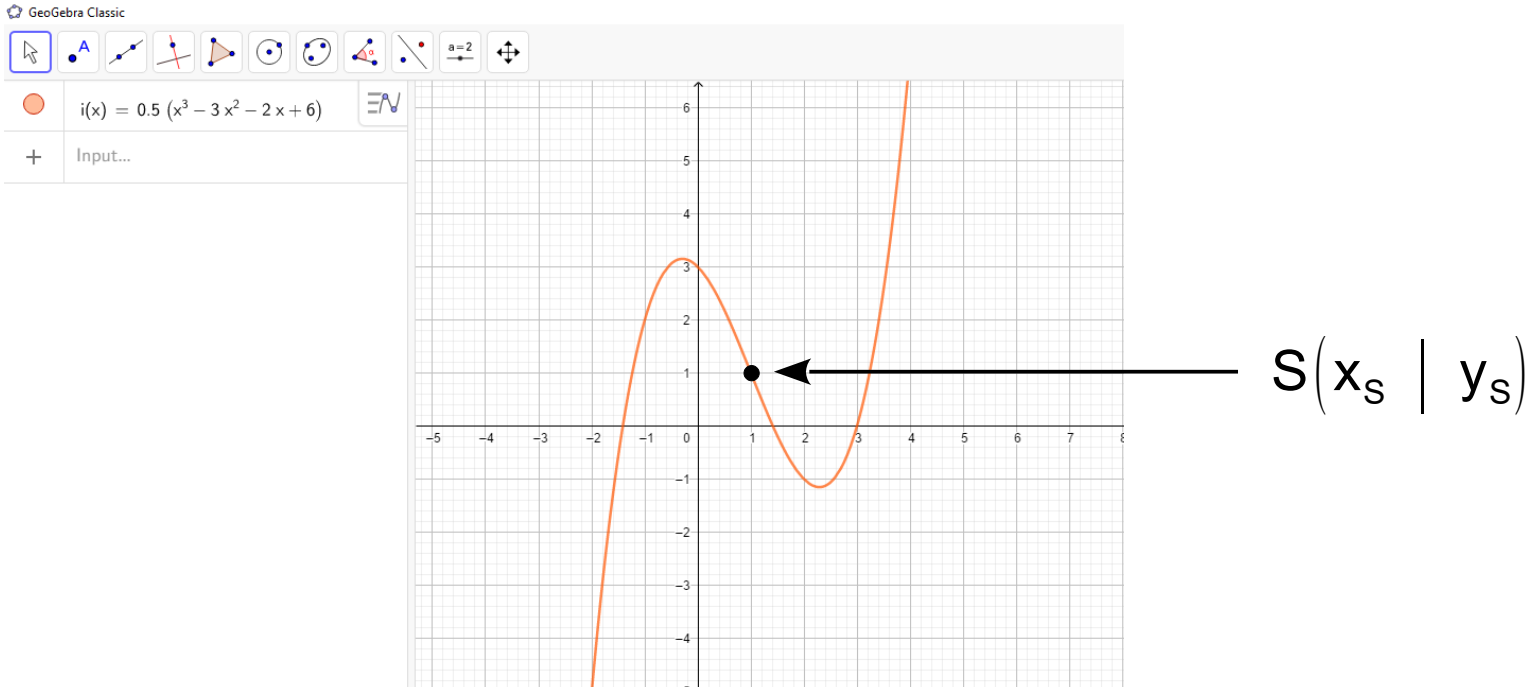
(3) **Kubische Funktion** $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Zeichnet man die Graphen von unterschiedlichen kubischen Funktionen, wird man feststellen, das diese immer punktsymmetrische sind zu einem Punkt $S(x_S \mid y_S)$ des Graphen sind !

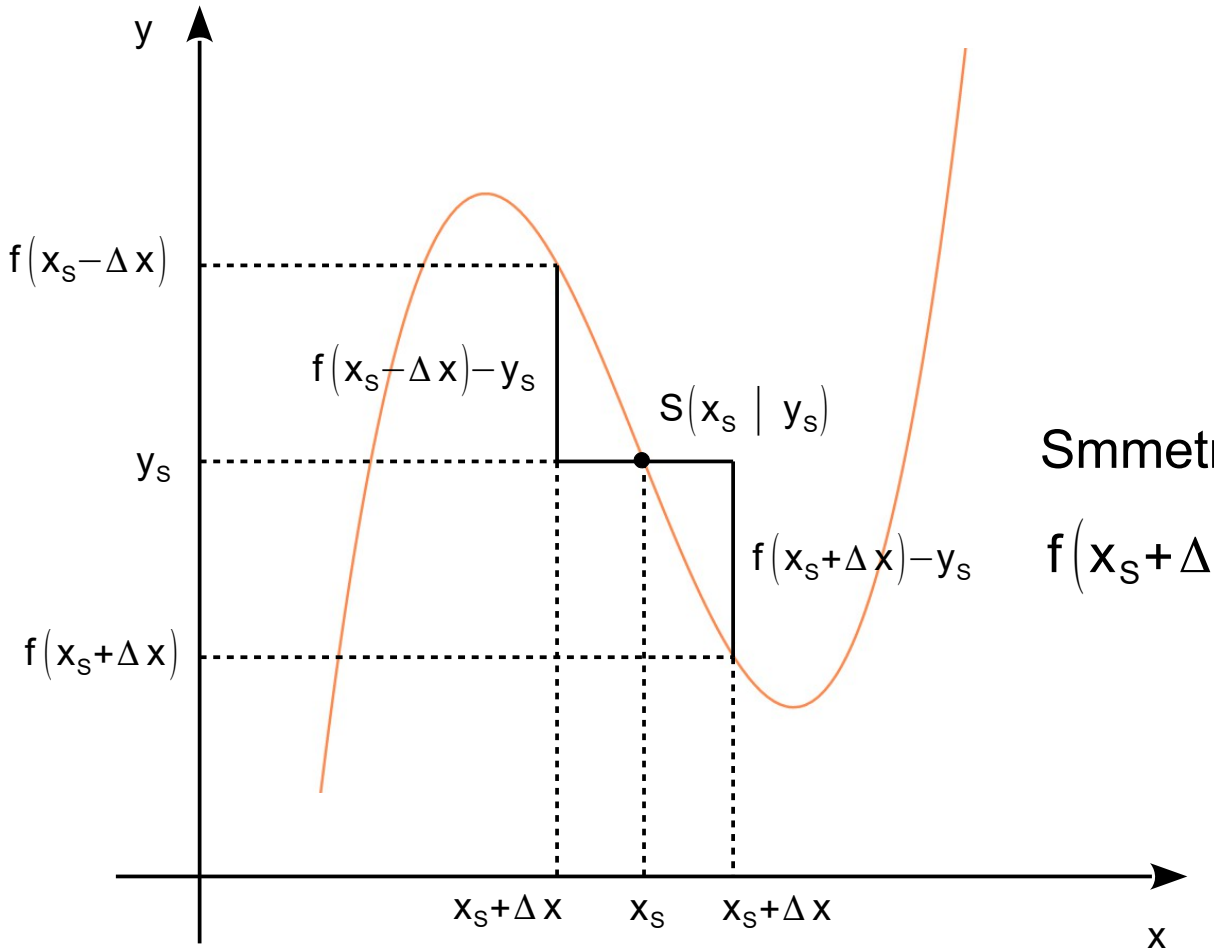
Beispiel : $y = f(x) = 0.5(x^3 - 3x^2 - 2x + 6)$



Beispiel : $y = f(x) = 0.5\left(x^3 - 3x^2 - 2x + 6\right)$



Berechnung des Symmetriepunktes kubischer Funktionen



Smmetriebedingung

$$f(x_s+\Delta x)-y_s \quad = \quad -\left[\; f(x_s+\Delta x)-y_s \;\right]$$

Symmetriebedingung für punktsymmetrische Funktionsgrapfen

$$f(x_S+\Delta x)-y_S \quad = \quad -\left[\ f(x_S+\Delta x)-y_S\ \right]$$

Symmetriepunkt $S(x_S \mid y_S)$

$$f(x_S+\Delta x)-f(x_S) \quad = \quad -\left[\ f(x_S+\Delta x)-f(x_S)\ \right]$$

$$f(x_S+\Delta x)-f(x_S) \quad = \quad f(x_S)-f(x_S+\Delta x)$$

$$a_3(x_s+\Delta x)^3+a_2(x_s+\Delta x)^2+a_1(x_s+\Delta x)+a_0 \quad = \quad a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0$$

$$-\ \left(\ a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0\ \right) \qquad -\ \left(\ a_3(x_s-\Delta x)^3+a_2(x_s-\Delta x)^2+a_1(x_s-\Delta x)+a_0\ \right)$$

$$a_3(x_s+\Delta x)^3+a_2(x_s+\Delta x)^2+a_1(x_s+\Delta x)+a_0 \quad = \quad a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0$$

$$- \left(a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0 \right) \qquad - \left(a_3(x_s-\Delta x)^3+a_2(x_s-\Delta x)^2+a_1(x_s-\Delta x)+a_0 \right)$$

$$\begin{aligned}
& a_3\left(\cancel{x_S^3}+3x_S^2\Delta x+3x_S\Delta x^2+\Delta x^3 \right) \\
+\ & a_2\left(\cancel{x_S^2}+2x_S\Delta x+\Delta x^2 \right) \\
+\ & a_1\left(\cancel{x_s}+\Delta x \right) \\
+\ & \cancel{a_0} \\
-\ & \cancel{\left(a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0 \right)}
\end{aligned}
\quad = \quad
\begin{aligned}
& \cancel{\left(a_3x_s^3+a_2x_s^2+a_1x_s+a_0 \right)} \\
-\ & a_3\left(\cancel{x_S^3}-3x_S^2\Delta x+3x_S\Delta x^2-\Delta x^3 \right) \\
-\ & a_2\left(\cancel{x_S^2}-2x_S\Delta x+\Delta x^2 \right) \\
-\ & a_1\left(\cancel{x_s}-\Delta x \right) \\
-\ & \cancel{a_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3\left(\cancel{3x_S^2\Delta x}+3x_S\Delta x^2+\cancel{\Delta x^3} \right) \\
+\ & a_2\left(\cancel{2x_S\Delta x}+\Delta x^2 \right) \\
+\ & \cancel{a_1\left(\Delta x \right)}
\end{aligned}
\quad = \quad
\begin{aligned}
-\ & a_3\left(-3x_S^2\cancel{\Delta x+3x_S}\Delta x^2-\Delta x^3 \right) \\
-\ & a_2\left(-2x_S\cancel{\Delta x+\Delta x^2} \right) \\
-\ & a_1\left(\cancel{-\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$3a_3x_S\Delta x^2+a_2\Delta x^2 \quad = \quad -3a_3x_S\Delta x^2-a_2\Delta x^2$$

$$\Rightarrow \quad 3a_3x_S\Delta x^2+a_2\Delta x^2 \ = \ 0$$

$$3a_3x_S+a_2 \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_S \ = \ -\frac{a_2}{3a_3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_S \ = \ f\left(\frac{-a_2}{3a_3}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S\left(\frac{-a_2}{3a_3} \,\middle|\, f\left(\frac{-a_2}{3a_3}\right)\right)}$$

Polynomfunktionen und Faktorisierung mittels Nullstellen

Nullstellen der quadratischen Funktion $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **:**

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_2 \left[x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right] = 0$$

$$a_2 \left[x^2 + 2\, x \frac{a_1}{2 a_2} + \frac{a_0}{a_2} \right] = 0$$

Quadratische Ergänzung

$$a_2 \left[x^2 + 2\, x \frac{a_1}{2 a_2} \underline{+ \left(\frac{a_1}{2 a_2} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{2 a_2} \right)^2} + \frac{a_0}{a_2} \right] = 0$$

$$a_2\left[\underbrace{x^2 + 2x\frac{a_1}{2a_2} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2}\right] = 0$$

$$a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2}\right] = 0$$

$$a_2\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2}\right] = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_2 a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_2 a_0}{a_2} = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + \frac{4a_0a_2}{4a_2} = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4a_2} - \frac{4a_0a_2}{4a_2} = 0$$

$$a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2}$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$$

$$x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}}$$

$$x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$x = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}}$$

Nullstellen der quadratischen Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ **:**

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}}$$

1. Fall : Der Radikant $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$

Es gibt **keine Nullstellen** !

2. Fall : Der Radikant $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$

Es gibt **genau eine Nullstelle** $x_1 = -\frac{a_1}{2a_2}$!

3. Fall : Der Radikant $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$

Es gibt **genau zwei Nullstellen** , nämlich

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad !$$

Die Sätze von Vieta und die Faktorisisierung mittels der Nullstellen :

Wenn man nun wie der französische Mathematiker **Francois Viete (lateinisiert Vieta; 1540 – 1603)** hingeht und die Summe und das Produkt der beiden Lösungen bildet, erhält man Folgendes :

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad , \quad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} + \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} - a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \cdot \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right)\left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right)}{4a_2^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-a_1\right)^2 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}^{\,2}}{4a_2^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4a_0a_2}{4a_2^2}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}}$$

Die Gleichungen $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}}$ und $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}}$

für die Lösungen der quadratischen Gleichung $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ heißen **Gleichungen von Vieta** !

Francois Viete
(lateinisiert Vieta; 1540 – 1603)

https://de.wikipedia.org/wiki/François_Viète

Die Gleichungen $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}}$ und $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}}$

für die Lösungen der quadratischen Gleichung $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ heißen **Gleichungen von Vieta** !

Wozu nützen diese Gleichungen ?

Man kann mit ihnen das quadratische Polynom faktorisieren :

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_2 \left[x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} \right] = 0$$

$$a_2 \left[x^2 - \left(x_1 + x_2 \right) x + x_1 x_2 \right] = 0$$

$$a_2\left[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right] = 0$$

$$a_2\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = 0$$

$$a_2\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = 0$$

$$a_2\left[(x - x_1)(x - x_2)\right] = 0$$

Also : $a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - x_1)(x - x_2)$

Linearfaktorisierung der quadratischen Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit Hilfe der Nullstellen x_1 , x_2 !

Bemerkung :

Die Linearfaktorisierung der quadratischen Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ist auch möglich, wenn diese genau eine Nullstelle $x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{2a_2}$ hat , da die Vietaschen Gleichungen $x_1+x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$ dann immer noch gelten !

Faktisierung von kubischen Funktionen mit Hilfe einer Nullstelle

Nachdem die Faktorisierung einer quadratischen Funktion mit Hilfe zweier Nullstellen, insbesonders auch mit nur einer Nullstelle, gelungen ist, fragt man sich, ob kubische Funktionenen ebenfalls in dieser Weise faktorisiert werden können ?

Sei also die kubische Funktion $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ und eine Nullstelle x_1 gegeben.

Dann gilt $a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0$.

Ist die Faktorisierung des kubischen Terms mittels der Nullstelle x_1 und einem noch zu bestimmenden zweiten Faktor möglich ?

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)[\ .\ .\ .\ ] \quad ?$$

Ist die Faktorisierung des kubischen Terms mittels der Nullstelle x_1 und einem noch zu bestimmenden zweiten Faktor möglich ?

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)[\ .\ .\ .\ ] \quad ?$$

Übergang zur Divisionsschreibweise oder zur Polynomdivision :

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_1) = [\ .\ .\ .\ ]$$

$$(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0) : (x-x_1) = a_3x^2 + (a_2+a_3x_1)x + (a_1+(a_2+a_3x_1)x_1)$$

$$\underline{-[a_3x^3-a_3x_1x^2]}$$

$$(a_2+a_3x_1)x^2+a_1x+a_0$$

$$\underline{-[(a_2+a_3x_1)x^2-(a_2-a_3x_1)x_1x]}$$

$$(a_1+(a_2+a_3x_1)x_1)x+a_0$$

$$\underline{-[(a_1+(a_2+a_3x_1)x_1)x-(a_1+(a_2+a_3x_1)x_1)x_1]}$$

$$a_0+(a_1+(a_2+a_3x_1)x_1)x_1 \quad \text{Rest ?}$$

Bei genauerer Betrachtung ergibt der Rest gleich Null :

$$a_0+\left(a_1+\left(a_2+a_3x_1\right)x_1\right)x_1 \;=\; a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3 \;=\; 0$$ nach Voraussetzung

Die Polynomdivision ist aufgegangen, und deshalb kann der kubische Term mittels der Nullstelle faktorisiert werden :

$$\left(\; a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \;\right) : \left(x-x_1\right) \;=\; a_3x^2 \;+\; \left(a_2+a_3x_1\right)x \;+\; \left(a_1+\left(a_2+a_3x_1\right)x_1\right)$$

$$\left(\; a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \;\right) \;=\; \left(x \;-\; x_1\right)\left[\; a_3x^2 \;+\; \left(a_2+a_3x_1\right)x \;+\; \left(a_1+\left(a_2+a_3x_1\right)x_1\right) \;\right]$$

Zum Auffinden weiterer Nullstellen der kubischen Funktion
$$y \;=\; a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \;=\; \left(x \;-\; x_1\right)\left[\; a_3x^2 \;+\; \left(a_2+a_3x_1\right)x \;+\; \left(a_1+\left(a_2+a_3x_1\right)x_1\right) \;\right]$$
müsste jetzt der quadratische Funktionsterm gleich Null gesetzt werden :

$$a_3x^2 \;+\; \left(a_2+a_3x_1\right)x \;+\; \left(a_1+\left(a_2+a_3x_1\right)x_1\right) \;=\; 0$$

Zum Auffinden weiterer Nullstellen der kubischen Funktion

$$y = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = (x - x_1)\left[a_3x^2 + (a_2+a_3x_1)x + (a_1+(a_2+a_3x_1)x_1) \right]$$

müsste jetzt der quadratische Funktionsterm gleich Null gesetzt werden :

$$a_3x^2 + (a_2+a_3x_1)x + (a_1+(a_2+a_3x_1)x_1) = 0$$

Da jede quadratische Funktion höchstens 2 **Nullstellen haben kann, kann die kubische Funktion höchstens** 3 **Nullstellen haben !**

Diesen Satz kann man zum <u>Nullstellensatz</u> verallgemeinern :

Jede Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$ **hat höchstens** n **Nullstellen .**

Beweis (durch vollständige Induktion) :

I. Die Behauptung gilt für $n = 0$:

$y = a_0 \neq 0$ hat keine Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen ist also höchstens gleich Null .

II. Die Behauptung gelte für irgend ein $n \in \mathbb{N}$. Man muss zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt .

1. Fall : Die Polynomfunktion $y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$ vom Grad $n+1 > 0$ hat keine Nullstellen, also ist die Anzahl der Nullstellen höchstens gleich n .

.

2. Fall : Die Polynomfunktion $y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$ vom Grad $n+1 > 0$ hat mindestens eine Nullstelle x_1 . Dann gilt :

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n+1} a_i x_1^i$$

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(x^i - x_1^i \right)$$

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(x - x_1 \right) \left(x^{i-1} + x^{i-1} + .. + x_1^{i-1} \right)$$

verallgemeinerte
3. Binomische Formel

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = \left(x - x_1 \right) \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(x^{i-1} + x^{i-1} + .. + x_1^{i-1} \right)$$

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = \left(x - x_1 \right) p_n(x) \text{ , wobei } p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(x^{i-1} + x^{i-1} + .. + x_1^{i-1} \right)$$

eine Polynomfunktion vom Grad n ist, mit höchstens n Nullstellen .

$$y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = (x - x_1)\ p_n(x)\ , \text{ wobei } p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(x^{i-1} + x^{i-1} + .. + x_1^{i-1}\right)$$

eine Polynomfunktion vom Grad n ist, mit höchstens n Nullstellen .

Deshalb hat die Polynomfunktion $y = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i = (x - x_1)\ p_n(x)$ vom Grad $n+1$ höchstens $n+1$ Nullstellen .

III. Aus **I.** Und **II.** folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folgerung hieraus ist der <u>Identitätssatz für Polynomfunktionen</u> :

Identische Polynomfunktionen haben gleiche Koeffizienten .
Die Koeffizienten einer Polynomfunktion sind deshalb eindeutig bestimmt .

Beweis :

Angenommen , $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$, seien zwei Darstellungen einer Polynomfunktion , und es sei etwa $n \geq l$. Dann würde nacheinander folgen :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{l} b_i x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

1. Fall : $n > l$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{l} b_i x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=l+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{l} \left(a_i - b_i\right) x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die linke Seite wäre also eine Polynomfunktion vom Grad n mit unendlich vielen Nullstellen, was einen Widerspruch darstellte . Also gibt es keine zwei derart unterschiedliche Darstellungen einer Polynomfunktion .

2. Fall : $n = l$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i - b_i\right) x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i - b_i\right) x^i = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Angenommen, es gäbe ein $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $a_i - b_i \neq 0$.
Mit $m := \text{Maximum}\left\{i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ mit } a_i - b_i \neq 0\right\}$ wäre die linke Seite der Gleichung ein Polynomfunktion vom Grad m mit ebenfalls unendlich vielen Nullstellen, im Widerspruch zu der Existenz von höchstens m Nullstellen .
Darum gilt für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dass $a_i - b_i = 0$, also $a_i = b_i$ ist .
Somit gibt es auch in diesem Fall keine zwei unterschiedlichen Darstellungen einer Polynomfunktion .

Anhang :

Verallgemeinerte 3. Binomische Formel

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt :

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Beweis :

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$\begin{aligned} a^n - b^n = a^n &+ a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} \\ &- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n \end{aligned}$$

$$a^n - b_1^n = a^n - b^n$$