Lineare Gleichungssysteme

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

November 2022

Lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten

Bei einem Konzert werden x Karten zum Preis von 30 €
und y Karten zum Preis von 10 € verkauft.

I	$x + y = 125$	Gesamtzahl der Karten
II	$30x + 10y = 2250$	Einnahmen

Kann man die jeweilige Anzahl der Karten bestimmen ?

Lösung nach dem Dreiecksverfahren :

$$
\begin{array}{llcl}
\text{I} & 1x + 1y & = & 125 \qquad \text{I} \cdot 30 \\
\text{II} & 30x + 10y & = & 2250 \qquad -
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
\text{I} & 1x + 1y & = & 125 \\
\text{II'} & 20y & = & 1500 \qquad \text{I} : 20
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \underline{y = 75}$$

$$\Rightarrow 1x + 1 \cdot 75 = 125$$

$$\Rightarrow \underline{x = 50}$$

$L = \{(50 \mid 75)\}$ Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung !

Theoretische Betrachtung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}$$

Dreiecksverfahren

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{II'} & \qquad\qquad c_{22}x_2 = d_2 \end{array}$$

1. Fall : $c_{22} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{d_2}{c_{22}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d_2}{c_{22}}$

$L = \{(x_1 \mid x_2)\}$ Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung !

2. Fall : $c_{22} = 0$ und $d_2 \neq 0$

$$c_{22} x_2 = d_2$$

$$0 \cdot x_2 = d_2$$

$L = \{ \quad \}$ Das Gleichungssystem keine Lösung !

3. Fall : $c_{22} = 0$ und $d_2 = 0$

$$c_{22} x_2 = d_2$$

$0 x_2 = 0$, das heißt $x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2$$

$L = \{ (x_1 \mid x_2) \}$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\
\text{II} & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\
\text{III} & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3
\end{array}$$

Dreiecksverfahren

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\
\text{II‘} & & & c_{22}x_2 & + & c_{23}x_3 & = & d_2 \\
\text{III‘} & & & & & e_{33}x_3 & = & f_3
\end{array}$$

Gleichung III‘ bestimmt, wie viele Lösungen es gibt !

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\
\text{II‘} & & & c_{22}x_2 & + & c_{23}x_3 & = & d_2 \\
\text{III‘} & & & & & e_{33}x_3 & = & f_3
\end{array}
$$

Gleichung III‘ bestimmt, wie viele Lösungen es gibt !

Je nach dem, ob die Koeffizienten e_{33} , f_3 gleich oder ungleich Null sind, gibt es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen .

Beispiel (1)

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 6 \\ \text{II} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 7 \\ \text{III} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Dreiecksverfahren

$$\begin{array}{llcllll} \text{I} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 6 & \text{I} \cdot 2 & & \text{I} \cdot 3 \\ \text{II} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 7 & & - & \\ \text{III} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 1 & & & - \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 6 \\ \text{II'} & \underline{4x_2 - 1x_3} & = & \underline{5} \\ \text{III'} & \underline{7x_2 + 1x_3} & = & \underline{17} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{I} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 & \\
\text{II'} & 4x_2 - 1x_3 = 5 & \left.\begin{array}{l} \mid \cdot 7 \\ \mid \cdot 4 \end{array}\right] - \\
\text{III'} & 7x_2 + 1x_3 = 17 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{I} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6 \\
\text{II'} & 4x_2 - 1x_3 = 5 \\
\text{III''} & \underline{-11x_3 = -33}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_3 = 3}$$

$$\Rightarrow \quad 4x_2 - 1 \cdot 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = 2}$$

$$\Rightarrow \quad 1x_1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 1}$$

$L = \{(1 \mid 2 \mid 3)\}$ Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung !

Beispiel (2)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1{,}4 \\ \text{II} & 3x_1 - 2x_2 - 1x_3 = 1{,}2 \\ \text{III} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1{,}4 \end{array}$$

Beispiel (3)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 = 5 \\ \text{II} & 5x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 7 \\ \text{III} & 12x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 11 \end{array}$$