

Polynom- und Rationale Funktionen

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

Februar 2023

Rationale Funktionen

Gegeben sei die Funktion $y = \frac{2x^2-1}{x+1}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **Bei $x = -1$ ist eine Definitionslücke !**

Nullstellen :

$$y = \frac{2x^2-1}{x+1} = 0$$

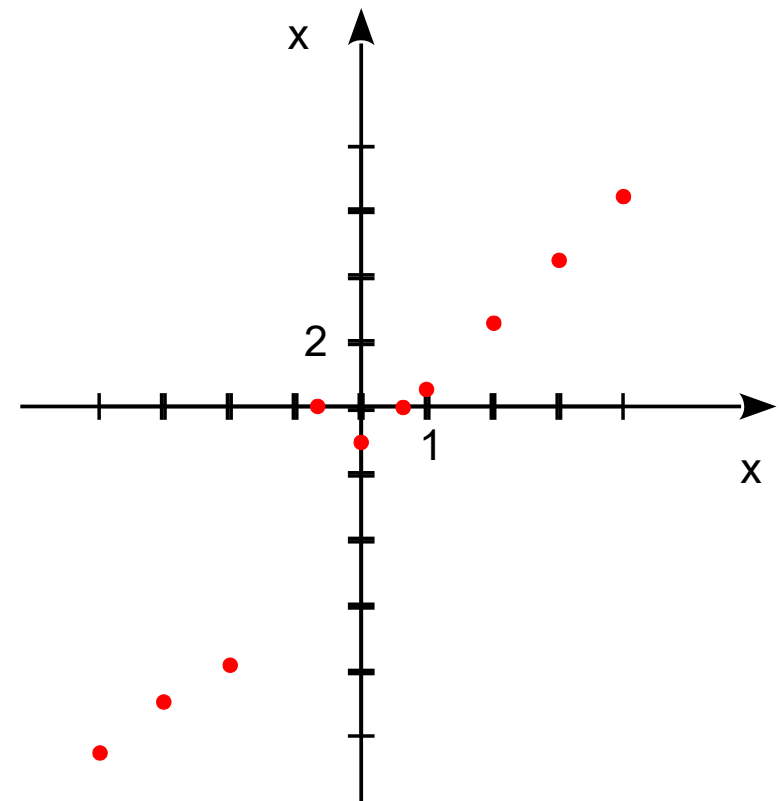
$$2x^2-1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \underline{x_1 \approx -0,7} \quad \underline{x_2 \approx 0,7}$$

Wertetabelle / Schaubild von $y = \frac{2x^2-1}{x+1}$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10,33	-8,50	-7,00	#DIV/0!	-1,00	0,50	2,33	4,25	6,20



Verhalten in der Nähe der Definitionslücke $x = -1$:

Annäherung von links : Sei $x = -1 - h$ mit $h \longrightarrow 0$

$$y = \frac{2(-1-h)^2 - 1}{-1-h+1}$$

$$y = \frac{2(1+2h+h^2) - 1}{-h}$$

$$y = \frac{2+4h+2h^2 - 1}{-h}$$

$$y = \frac{4h+2h^2+1}{-h}$$

$$y = -4 - 2h - \frac{1}{h} \longrightarrow -\infty \text{ für } x = -1 - h \text{ und } h \longrightarrow 0$$

Annäherung von rechts : Sei $x = -1 + h$ mit $h \longrightarrow 0$

$$y = \frac{2(-1+h)^2 - 1}{-1+h+1}$$

$$y = \frac{2(1-2h+h^2) - 1}{h}$$

$$y = \frac{2-4h+2h^2-1}{h}$$

$$y = \frac{-4h+2h^2+1}{h}$$

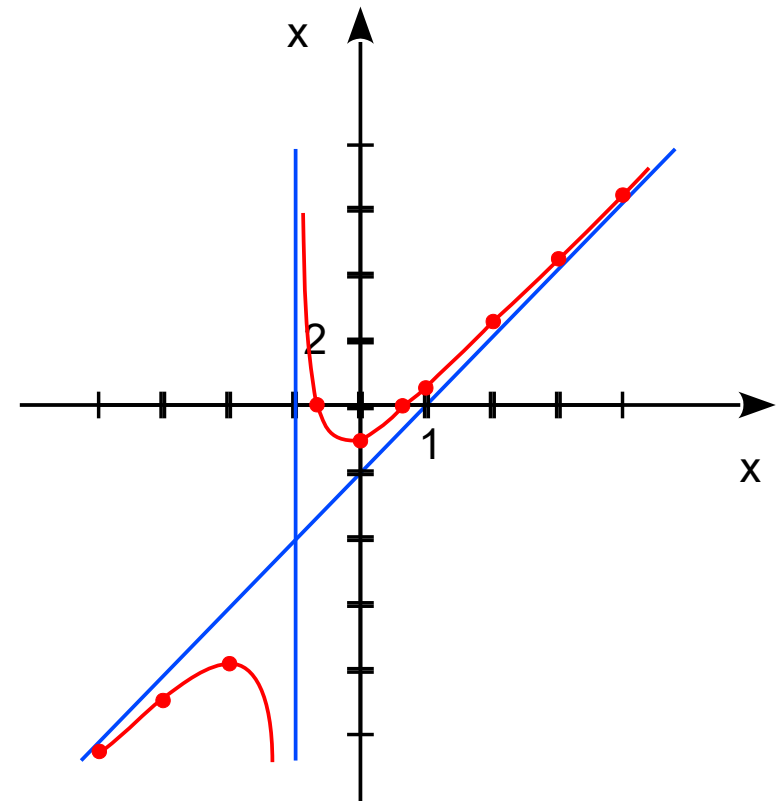
$$y = -4+2h+\frac{1}{h} \longrightarrow +\infty \text{ für } x = -1 + h \text{ und } h \longrightarrow 0$$

Man sagt auch : Die Gerade $x = -1$ ist eine **senkrechte Asymptote !**

Rationale Funktion : $y = \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10,33	-8,50	-7,00	#DIV/0!	-1,00	0,50	2,33	4,25	6,20

Senkrechte Asymptote : $x = -1$



Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$:

Ausführung der Division für die Funktion $y = \frac{2x^2-1}{x+1}$:

$$(2x^2-1) : (x+1) = ?$$

$$(2x^2 + 0x - 1) : (x + 1) = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(2x^2 + 2x)} \\ -2x - 1 \\ \underline{-(-2x - 2)} \\ 1 \end{array}$$

$$y = 2x - 2 + \frac{1}{x+1} \longrightarrow 2x - 2 \text{ für } x \longrightarrow \pm\infty$$

$$y = 2x - 2 + \frac{1}{x+1} \longrightarrow 2x - 2 \quad \text{für } x \longrightarrow \pm\infty$$

Der Graph der Funktion $y = \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}$ nähert sich dem Graphen der linearen Funktion $y = 2x - 2$ an .

Die Gerade $y = 2x - 2$ ist eine **schiefe Asymptote** !

Rationale Funktion : $y = \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x - 2 + \frac{1}{x+1}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10,33	-8,50	-7,00	#DIV/0!	-1,00	0,50	2,33	4,25	6,20

Senkrechte Asymptote : $x = -1$

Schiefe Asymptote : $y = 2x - 2$

