

Mittelwerte

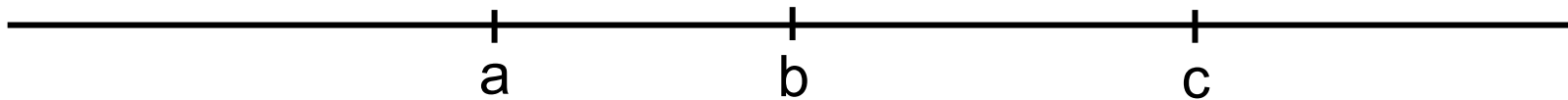
Arno Fehringer

August 2022

Das Arithmetische Mittel zweier Zahlen

Wir denken uns auf der Zahlengeraden zwei positive Zahlen a , c mit $a < c$.

Gesucht ist diejenige Zahl b , die von a und c jeweils gleichen Abstand hat !



Wo muss b liegen ?

Wie lautet die Abstandbedingung ?

Das Arithmetische Mittel zweier Zahlen

Wir denken uns auf der Zahlengeraden zwei positive Zahlen a , c mit $a < c$.

Gesucht ist diejenige Zahl b , die von a und c jeweils gleichen Abstand hat!



Wo muss b liegen?

In der Mitte zwischen a und c !

Wie lautet die Abstandbedingung ? $\underline{b - a} = \underline{c - b}$

Berechnung von b aus der Abstandsbedingung :

$$b - a = c - b$$

$$2b - a = c$$

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a + c}{2} \quad \text{Die Zahl } b \text{ hei\u00dft } \mathbf{\text{Arithmetisches Mittel}} \text{ von } a \text{ und } c !$$

Die dem Arithmetischen Mittel zugrunde liegende Verhältnisgleichung :

$$b - a = c - b$$

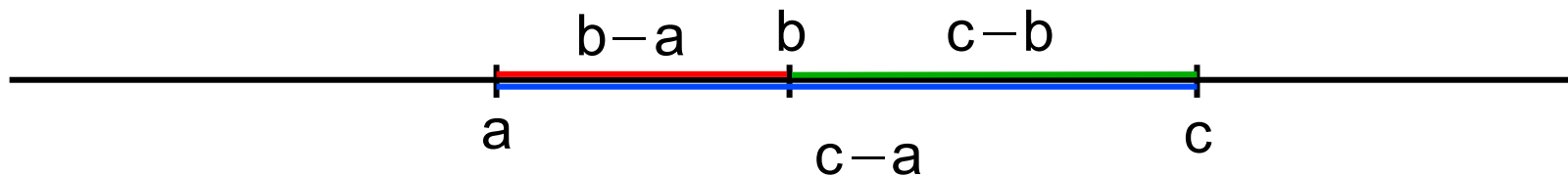
$$\frac{b - a}{c - b} = 1$$

$$\frac{b - a}{c - b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$$

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{b - a}{c - b}$$

Auf der linken Seite der **Verhältnisgleichung** kommen die Zahlen a , b oder c vor, auf der rechten Seite Differenzen der Zahlen a , b , c .

Es erhebt sich nun die Frage, wie viele **Verhältnisgleichungen** aus Zahlen a , b , c und Differenzen der Zahlen $b-a$, $c-b$ oder $c-a$ es gibt?



$$a < b < c$$

$$\underline{b-a} + \underline{c-b} = \underline{c-a}$$

$$b-a < c-a, \quad c-b < c-a$$

$$b-a \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} c-b$$

Verhältnisse der Zahlen

$$a < b < c :$$

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 1$$

$$\frac{a}{b} < 1 \quad \frac{b}{c} < 1 \quad \frac{a}{c} < 1$$

$$\frac{b}{a} > 1 \quad \frac{c}{b} > 1 \quad \frac{c}{a} > 1$$

Verhältnisse der Differenzen

$$b-a, c-b < c-a :$$

$$\frac{b-a}{b-a} = \frac{c-b}{c-b} = \frac{c-a}{c-a} = 1$$

$$\frac{b-a}{c-b} \leq 1 \quad \frac{c-b}{c-a} < 1 \quad \frac{b-a}{c-a} < 1$$

$$\frac{c-b}{b-a} \geq 1 \quad \frac{c-a}{c-b} > 1 \quad \frac{c-b}{b-a} > 1$$

Verhältnisgleichungen

$$(1) \quad 1 = \frac{b-a}{c-b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{a+c}{2}}$$

Arithmetisches Mittel

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(3) \quad \frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$(5) \quad \frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(6) \quad \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$(7) \quad \frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$(8) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(9) \quad \frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$(10) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$(11) \quad \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(12) \quad \frac{c}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(13) \quad \frac{c}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$a(c-b) = b(b-a)$$

$$ac - ab = b^2 - ab$$

$$ac = b^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \sqrt{ac}}$$

Geometrisches Mittel

$$(3) \quad \frac{a}{b} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$a(c-a) = b(c-b)$$

$$a(c-a) = bc - b^2$$

$$b^2 - cb + a(c-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c}{2}\right)^2 - a(c-a)}$$

Was soll man von den Lösungen $b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c}{2}\right)^2 - a(c-a)}$ halten ?

Liegen sie überhaupt zwischen a und c ?

$$a < b_{1/2} < c \quad ?$$

$$a < \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c}{2}\right)^2 - a(c-a)} < c \quad ?$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c}{2}\right)^2 - a(c-a)}$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - a(c-a)}$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4a(c-a)}{4}}$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4ca + 4a^2}{4}}$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{(c-2a)^2}{4}}$$

$$b_{1/2} = \frac{c}{2} \pm \frac{c-2a}{2}$$

$b_1 = c-a$ unbrauchbar, falls $c-a \leq a$

$b_2 = a$ unbrauchbar

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$a(c-a) = b(b-a)$$

$$a(c-a) = b^2 - ab$$

$$b^2 - ab - a(c-a) = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-a}{2}\right)^2 + a(c-a)}$$

$$b_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}}$$

$$a < b_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < c \quad ?$$

$$a < b_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < c \quad ?$$

$$a < \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} \quad \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < c$$

$$\frac{a}{2} < \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}}$$

$$\frac{a^2}{4} < \frac{4ac - 3a^2}{4}$$

$$a^2 < 4ac - 3a^2$$

$$4a^2 < 4ac$$

$$a < c \quad \text{wahr}$$

$$\sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < \frac{2c-a}{2}$$

$$\frac{4ac - 3a^2}{4} < \frac{4c^2 - 4ac + a^2}{4}$$

$$4ac - 3a^2 < 4c^2 - 4ac + a^2$$

$$0 < 4c^2 - 8ac + 4a^2$$

$$0 < (2c - 2a)^2 \quad \text{wahr}$$

$$a < b_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < c \quad ?$$

$$a < \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} \qquad \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} < c$$

$$\frac{a}{2} < -\sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}} \quad \text{falsch}$$

Also :

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}}}$$

$$(5) \quad \frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$b(c-b) = c(b-a)$$

$$bc - b^2 = bc - ac$$

$$-b^2 = -ac$$

$$b^2 = ac \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \sqrt{ac}}$$

Geometrisches Mittel

Siehe (2)

$$(6) \quad \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$b(c-a) = c(c-b)$$

$$(c-a)b = c^2 - cb$$

$$(2c-a)b = c^2$$

$$b = \frac{c^2}{(2c-a)}$$

$$a < \frac{c^2}{(2c-a)} \quad ?$$

$$a(2c-a) < c^2$$

$$2ca - a^2 < c^2$$

$$0 < c^2 - 2ca + a^2$$

$$0 < (c-a)^2 \quad \text{wahr}$$

$$\text{Also : } (6) \quad \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow$$

$$b = \frac{c^2}{(2c-a)}$$

$$\frac{c^2}{(2c-a)} < c \quad ?$$

$$c^2 < c(2c-a)$$

$$c^2 < 2c^2 - ac$$

$$-c^2 < -ac$$

$$c > a \quad \text{wahr}$$

$$(7) \quad \frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$b(c-a) = c(b-a)$$

$$-ab = -ac$$

$$b = c \quad \text{unbrauchbar}$$

$$(8) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$a(c-b) = c(b-a)$$

$$ac - ab = cb - ac$$

$$2ac = (a+c)b$$

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$\textbf{Also : } (8) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}$$

 $\Rightarrow$

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$a < \frac{2ac}{a+c} ?$$

$$a^2 + ac < 2ac$$

$$a^2 < ac$$

$$a < c$$

$$\frac{2ac}{a+c} < c ?$$

$$2ac < ac + c^2$$

$$ac < c^2$$

$$a < c$$

$$(9) \quad \frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a}$$

$$a(c-a) = c(c-b)$$

$$ac - a^2 = c^2 - cb$$

$$cb = c^2 - ac + a^2$$

$$b = \frac{c^2 - ac + a^2}{c}$$

$$\text{Also : } (9) \quad \frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c^2 - ac + a^2}{c}}$$

$$a < \frac{c^2 - ac + a^2}{c} ?$$

$$ac < c^2 - ac + a^2$$

$$0 < c^2 - 2ac + a^2$$

$$0 < (c-a)^2$$

$$\frac{c^2 - ac + a^2}{c} < c ?$$

$$c^2 - ac + a^2 < c^2$$

$$a^2 < ac$$

$$a < c$$

$$(10) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a}$$

$$a(c-a) = c(b-a)$$

$$ac - a^2 = cb - ac$$

$$cb = 2ac - a^2$$

$$b = \frac{2ac - a^2}{c}$$

$$\text{Also : } (10) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2ac - a^2}{c}}$$

$$a < \frac{2ac - a^2}{c} ?$$

$$ac < 2ac - a^2$$

$$a^2 < ac$$

$$a < c$$

$$\frac{2ac - a^2}{c} < c ?$$

$$2ac - a^2 < c^2$$

$$0 < c^2 - 2ca + a^2$$

$$0 < (c-a)^2$$

$$(11) \quad \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$b(c-b) = a(b-a)$$

$$cb - b^2 = ab - a^2$$

$$(c-a)b - b^2 = -a^2$$

$$b^2 - (c-a)b - a^2 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{c-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-(c-a)}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$b_{1/2} = \frac{c-a}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2ca + a^2 + 4a^2}{4}}$$

$$b_{1/2} = \frac{c-a}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2ca + 5a^2}{4}}$$

$$a < b_1 = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < c \quad ?$$

$$a < \frac{c-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}}$$

$$\frac{3a}{2} < \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}}$$

$$\frac{3a-c}{2} < \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}}$$

$$\frac{9a^2-6ac+c^2}{4} < \frac{c^2-2ca+5a^2}{4}$$

$$9a^2-6ac+c^2 < c^2-2ca+5a^2$$

$$4a^2 < 4ca$$

$$a < c$$

$$\frac{c-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < c$$

$$\sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < \frac{c+a}{2}$$

$$\frac{c^2-2ca+5a^2}{4} < \frac{c^2+2ca+a^2}{4}$$

$$c^2-2ca+5a^2 < c^2+2ca+a^2$$

$$4a^2 < 4ca$$

$$a < c$$

$$a < b_2 = \frac{c-a}{2} - \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < c \quad ?$$

$$a < \frac{c-a}{2} - \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} \qquad \frac{c-a}{2} - \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < c$$

$$\sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}} < \frac{c-3a}{2}$$

$$\frac{c^2-2ca+5a^2}{4} < \frac{c^2-6ca+9a^2}{4}$$

$$c^2-2ca+5a^2 < c^2-6ca+9a^2$$

$$4ca < 4a^2$$

$$c < a \quad \text{falsch}$$

Also :

$$(11) \quad \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c-b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2-2ca+5a^2}{4}}}$$

$$(12) \quad \frac{c}{b} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$c(c-b) = b(b-a)$$

$$c^2 - cb = b^2 - ab$$

$$b^2 + (c-a)b - c^2 = 0$$

$$b_{1/2} = -\frac{c-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$a < -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$\frac{a+c}{2} < \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$\frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} < \frac{9c^2 - 6ca + a^2}{4}$$

$$-\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2} < c$$

$$\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2} < \frac{3c-a}{2}$$

$$\frac{5c^2 - 2ca + a^2}{4} < \frac{9c^2 - 6ca + a^2}{4}$$

$$8ac < 8c^2$$

$$a < c$$

$$4ca < 4c^2$$

$$a < c$$

$$a < -\frac{c-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$a < 0 \quad \text{falsch}$$

$$-\frac{c-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2} < c$$

Also :

$$(12) \quad \frac{c}{b} = \frac{b-a}{c-b} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$(13) \quad \frac{c}{a} = \frac{b-a}{c-b}$$

$$c(c-b) = a(b-a)$$

$$c^2 - cb = ab - a^2$$

$$c^2 = (a+c)b - a^2$$

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a+c}$$

$$\text{Also : } (13) \quad \frac{c}{a} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow$$

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a+c}$$

$$a < \frac{a^2 + c^2}{a+c} < c \quad ?$$

$$a^2 + ac < a^2 + c^2$$

$$ac < c^2$$

$$a < c$$

$$a^2 + c^2 < ac + c^2$$

$$a^2 < ac$$

$$a < c$$

Alle 10 Verhältnisgleichungen mit Mittelwerten als Lösungen

$$(1) \quad 1 = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a+c}{2}} \quad \text{Arithmetisches Mittel}$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{ac}} \quad \text{Geometrisches Mittel}$$

$$(4) \quad \frac{a}{b} = \frac{b-a}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{4ac - 3a^2}{4}}}$$

$$(6) \quad \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c^2}{(2c-a)}}$$

$$(8) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$$

$$(9) \quad \frac{a}{c} = \frac{c-b}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c^2 - ac + a^2}{c}}$$

$$(10) \quad \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2ac - a^2}{c}}$$

$$(11) \quad \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2 - 2ca + 5a^2}{4}}}$$

$$(12) \quad \frac{c}{b} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{c-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + c^2}}$$

$$(13) \quad \frac{c}{a} = \frac{b-a}{c-b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a^2 + c^2}{a+c}}$$