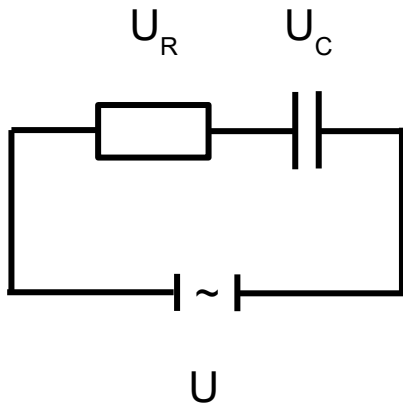


Reelle und komplexe Rechnungen im Wechselstromkreis

Arno Fehring

September 2022

RC - Reihenschaltung



An einen in Reihe geschalteten Ohmschen Widerstand R und einen Kondensator mit der Kapazität C wird die Wechselspannung U gelegt.

Für die Spannungen gilt : $U_R = RI$ $U_C = \frac{1}{C} Q$ Q ist die Ladung !

$$U_R + U_C = U$$

$$RI + \frac{1}{C} Q = U$$

$$RI' + \frac{1}{C} Q' = U'$$

$$RI' + \frac{1}{C} I = U'$$

$$R I' + \frac{1}{C} I = U'$$

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$R I' + \frac{1}{C} I = -\omega U_0 \sin(\omega t)$$

Ansatz : $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_c)$

$$I' = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi_c)$$

$$R \omega I_0 (-\sin(\omega t + \varphi_c)) + \frac{1}{C} I_0 \cos(\omega t + \varphi_c) = -\omega U_0 \sin(\omega t)$$

$$R \sin(\omega t + \varphi_c) - \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_c) = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$R \cos(\varphi_c) \sin(\omega t) + R \sin(\varphi_c) \cos(\omega t)$$

$$- \frac{1}{\omega C} R \cos(\varphi_c) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega C} \sin(\varphi_c) \sin(\omega t) = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{R \cos(\varphi_c) \sin(\omega t)} + \underline{R \sin(\varphi_c) \cos(\omega t)} \\
 & - \underline{\frac{1}{\omega C} R \cos(\varphi_c) \cos(\omega t)} + \underline{\frac{1}{\omega C} R \sin(\varphi_c) \sin(\omega t)} = \underline{\frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich :

$$R \cos(\varphi_c) + \frac{1}{\omega C} \sin(\varphi_c) = \frac{U_0}{I_0}$$

$$R \sin(\varphi_c) - \frac{1}{\omega C} \cos(\varphi_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\varphi_c) = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\varphi_c = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

$$R \cos(\varphi_c) + \frac{1}{\omega C} \sin(\varphi_c) = \frac{U_0}{I_0}$$

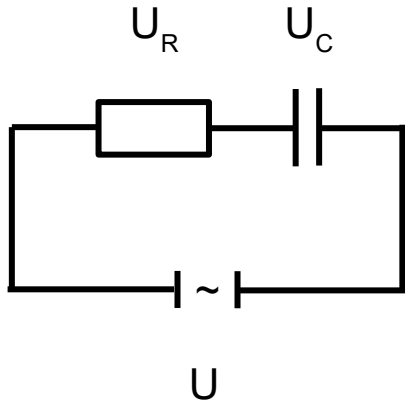
$$R \sin(\varphi_c) - \frac{1}{\omega C} \cos(\varphi_c) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \left(R \cos(\varphi_c) + \frac{1}{\omega C} \sin(\varphi_c) \right)^2 &= \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \\ \left(R \sin(\varphi_c) - \frac{1}{\omega C} \cos(\varphi_c) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right] +$$

$$\left(R \cos(\varphi_c) + \frac{1}{\omega C} \sin(\varphi_c) \right)^2 + \left(R \sin(\varphi_c) - \frac{1}{\omega C} \cos(\varphi_c) \right)^2 = \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2$$

$$R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 = \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{U_0}{I_0}}$$

RC - Reihenschaltung (Ergebnis)



$$U = U_0 \cos(\omega t) \Rightarrow I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_c)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

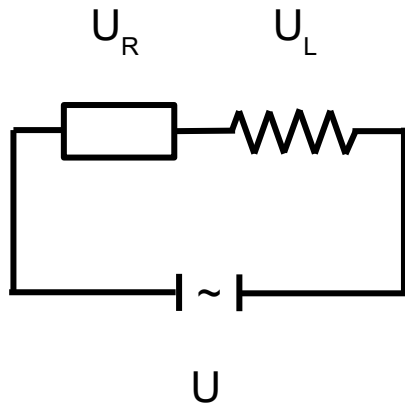
$$\varphi_c = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Bemerkung :

$$\text{Für } R = 0 \text{ ist } I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}}, \quad \varphi_c = \frac{\pi}{2}, \quad I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus !

RL - Reihenschaltung



An einen in Reihe geschalteten Ohmschen Widerstand R und eine Spule mit der Induktivität L wird die Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ gelegt.

Für die Spannungen gilt : $U_R = RI$ $U_L = L I'$

$$U_R + U_L = U$$

$$RI + L I' = U$$

$$RI + L I' = U_0 \cos(\omega t)$$

$$RI + L I' = U_0 \cos(\omega t)$$

Ansatz : $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_L)$
 $I' = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi_L)$

$$RI_0 \cos(\omega t + \varphi_c) - \omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi_c) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$R \cos(\omega t + \varphi_c) - \omega L \sin(\omega t + \varphi_c) = \frac{U_0}{I_0} \cos(\omega t)$$

$$R \cos(\varphi_c) \cos(\omega t) - R \sin(\varphi_c) \sin(\omega t)$$

$$- \omega L \cos(\varphi_c) \sin(\omega t) - \omega L \sin(\varphi_c) \cos(\omega t) = \frac{U_0}{I_0} \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
 & \underline{R \cos(\varphi_c) \cos(\omega t)} - \underline{R \sin(\varphi_c) \sin(\omega t)} \\
 & \underline{-\omega L \cos(\varphi_c) \sin(\omega t)} - \underline{\omega L \sin(\varphi_c) \cos(\omega t)} = \underline{\frac{U_0}{I_0} \cos(\omega t)}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich :

$$R \cos(\varphi_c) - \omega L \sin(\varphi_c) = \frac{U_0}{I_0}$$

$$-R \sin(\varphi_c) - \omega L \cos(\varphi_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\varphi_c) = -\frac{\omega L}{R}$$

$$\boxed{\varphi_c = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)}$$

$$R \cos(\varphi_c) - \omega L \sin(\varphi_c) = \frac{U_0}{I_0}$$

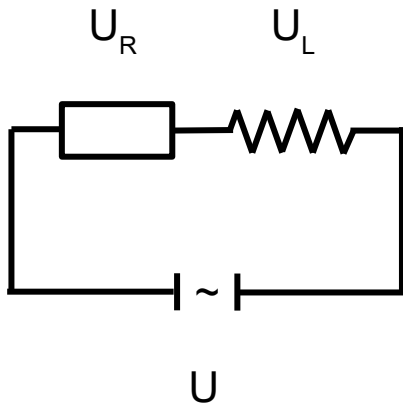
$$-R \sin(\varphi_c) - \omega L \cos(\varphi_c) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} (R \cos(\varphi_c) - \omega L \sin(\varphi_c))^2 &= \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \\ (-R \sin(\varphi_c) - \omega L \cos(\varphi_c))^2 &= 0 \end{aligned} \right] +$$

$$(R \cos(\varphi_c) - \omega L \sin(\varphi_c))^2 + (-R \sin(\varphi_c) - \omega L \cos(\varphi_c))^2 = \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2$$

$$R^2 + (\omega L)^2 = \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{U_0}{I_0}}$$

RL - Reihenschaltung (Ergebnis)



$$U = U_0 \cos(\omega t) \Rightarrow I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_L)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

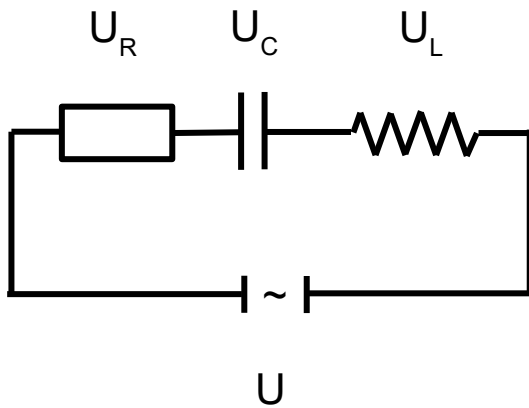
$$\varphi_C = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)$$

Bemerkung :

$$\text{Für } R = 0 \text{ ist } I_0 = \frac{U_0}{\omega L}, \quad \varphi_L = -\frac{\pi}{2}, \quad I = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Strom läuft der Spannung um 90° hinterher !

RCL - Reihenschaltung



$$U_R + U_C + U_L = U$$

$$RI + \frac{1}{C} Q + LI' = U$$

$$RI' + \frac{1}{C} I + LI'' = U'$$

$$RI' + \frac{1}{C} I + LI'' = U'$$

Ansatz : $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$I' = -\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I'' = -\omega^2 I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$U' = -\omega U_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$R(-\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi)) + \frac{1}{C} I_0 \cos(\omega t + \varphi) + L(-\omega^2 I_0 \cos(\omega t + \varphi)) = -\omega U_0 \sin(\omega t)$$

$$R \sin(\omega t + \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi) + \omega L \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$R \sin(\omega t + \varphi) - \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi) + \omega L \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$R \sin(\omega t + \varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$R \cos(\varphi) \sin(\omega t) + R \sin(\varphi) \cos(\omega t)$$

$$+ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) \cos(\omega t) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) \sin(\omega t)$$

$$= \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
& R \cos(\varphi) \sin(\omega t) + R \sin(\varphi) \cos(\omega t) \\
& + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) \cos(\omega t) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) \sin(\omega t) \\
& = \frac{U_0}{I_0} \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich :

$$\begin{aligned}
R \cos(\varphi) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) &= \frac{U_0}{I_0} \\
R \sin(\varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) &= 0
\end{aligned}$$

$$R \cos(\varphi) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) = \frac{U_0}{I_0}$$

$$R \sin(\varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) = 0$$

$$R \sin(\varphi) - \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right)$$

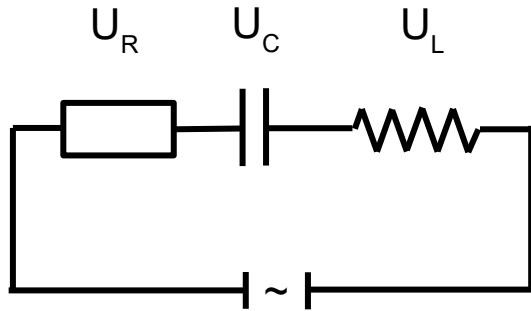
$$\left(R \cos(\varphi) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) \right) = \frac{U_0}{I_0}$$

$$R \sin(\varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} \left(R \cos(\varphi) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\varphi) \right)^2 &= \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \\ \left(R \sin(\varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\varphi) \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right] +$$

$$R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 = \left(\frac{U_0}{I_0} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2} = \frac{U_0}{I_0}}$$

RCL – Reihenschaltung (Ergebnis)



$$U = U_0 \cos(\omega t) \Rightarrow I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right)$$

Betrachtung der RCL- Reihenschaltung im Komplexen

Man stellt sich in der komplexen Zahlenebene einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren „Zeiger“ der Länge U_0 vor .

Dieser Zeiger wird beschrieben durch die komplexe Zahl

$$\underline{U_R = U_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}$$

Der Realteil sei die Spannung $U_0 \cos(\omega t)$ am Widerstand der RCL-Reihenschaltung .

Der „Zeiger“ des Stroms ist entsprechend

$$\underline{I = I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))} .$$

Der Strom eilt der Spannung am Kondensator U_C um 90° voraus, oder umgekehrt, die **Spannung am Kondensator U_C läuft dem Strom um 90° hinterher** .

Am Kondensator gilt :

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}}, \quad U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$$

Der entsprechende „Zeiger“ für U_C ist :

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_0 \left(-i(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right)$$

$$U_C = \frac{1}{i\omega C} I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

Der Strom läuft der Spannung an der Spule U_L um 90° hinterher, oder umgekehrt, die **Spannung an der Spule U_L eilt dem Strom um 90° voraus** .

An der Spule gilt :

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L} , \quad U_0 = \omega L I_0 .$$

Der entsprechende „Zeiger“ für U_L ist

$$U_L = \omega L I_0 i (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$\underline{U_L = i \omega L I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}$$

Die Teilspannungen an der RCL-Reihenschaltung addieren sich zur Gesamtspannung

$$U_R + U_C + U_L = U$$

$$I = I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$U_R = R I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = R I$$

$$U_C = \frac{1}{i\omega C} I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = \frac{1}{i\omega C} I$$

$$U_L = i\omega L I_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) = i\omega L I$$

$$R I + \frac{1}{i\omega C} I + i\omega L I = U$$

$$\left(R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right) I = U$$

$$\left(R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) I = U \quad \text{mit} \quad Z := R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad \text{als} \quad \textbf{Schein-}$$

widerstand .

Komplexe Schreibweise bei der RCL-Reihenschaltung

$$\left(R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) I = U \quad Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$|Z| = U$$

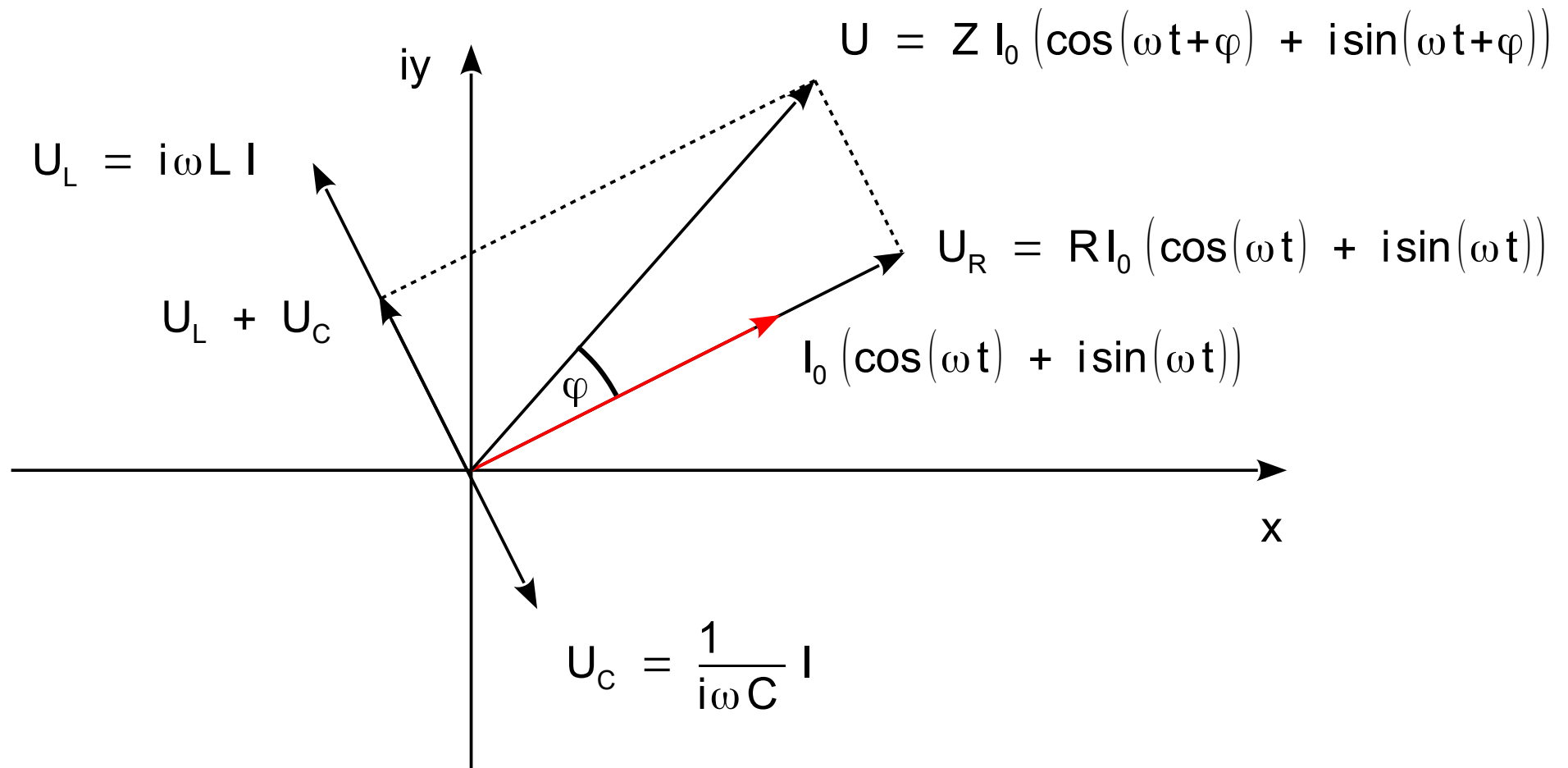
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$Z = \frac{U}{I}$$

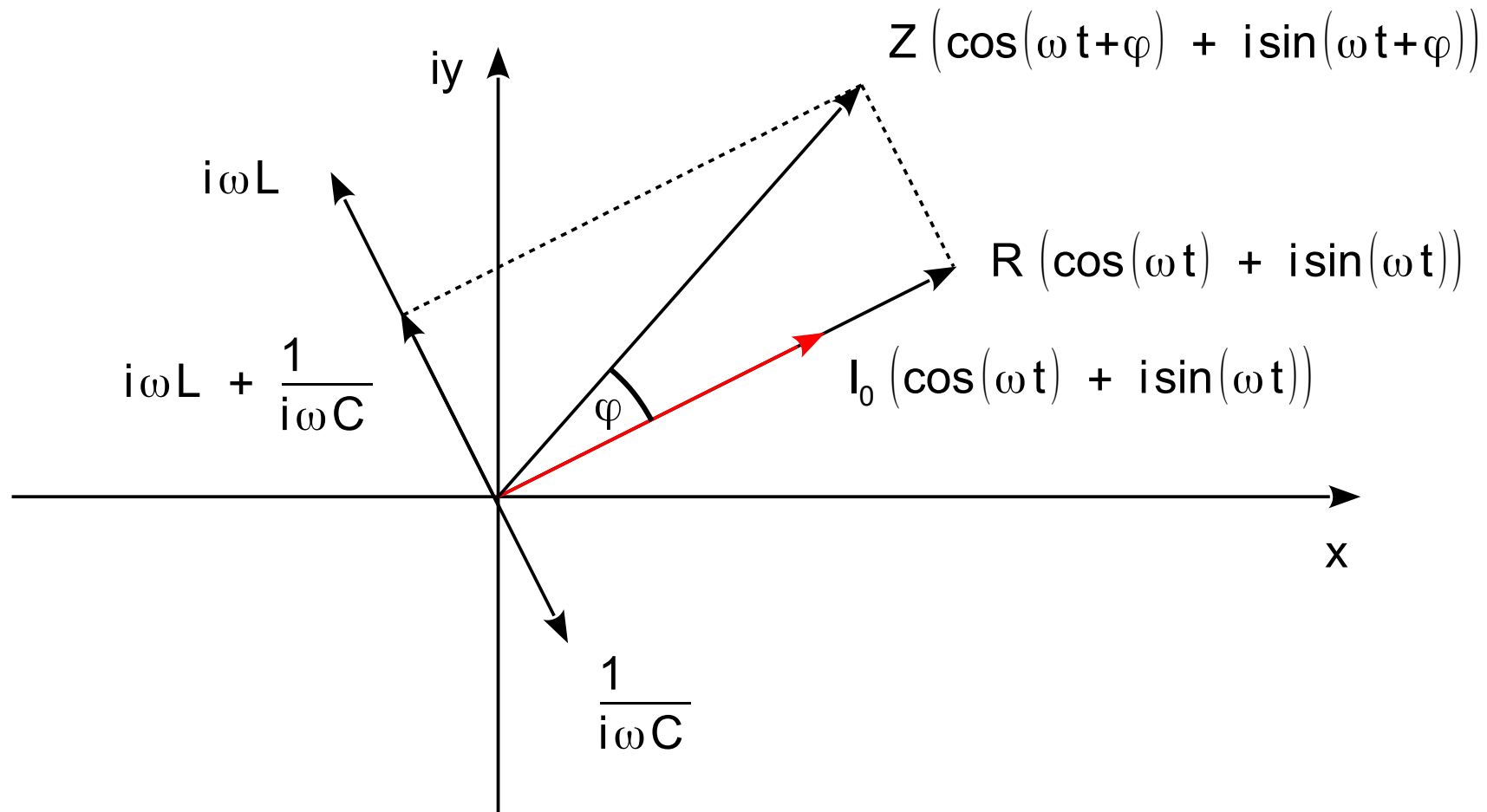
$$|Z| = \frac{|U|}{|I|}$$

$$|Z| = \frac{U_0}{I_0}$$

Zeigerdarstellung für die Spannungen der RCL-Reihenschaltung



Zeigerdarstellung für die Widerstände der RCL-Reihenschaltung



Die Leistung bei der RCL-Reihenschaltung

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t)$$

$$P = UI$$

$$P = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \quad \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\cos(\varphi)) + \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 (\cos(\varphi)) + \cos(2\omega t + \varphi)$$

Der Zeitabhängige Anteil über eine Periode hinweg gemittelt ist gleich Null, deshalb ist die Leistung gleich

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi)$$

Anhang: Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$