Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

Arno Fehringer

August 2022

Lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten

1 $2x + 3y = 4$

2 $3x + 6y = 6$

$x + 1{,}5y = 2$

$x = 2 - 1{,}5y$

2 $3x + 6y = 6$

$3(2 - 1{,}5y) + 6y = 6$ Einsetzungsverfahren

$6 - 4{,}5y + 6y = 6$

$2{,}5y = 0$

$\underline{y = 0} \quad \Rightarrow \quad x = 2 - 1{,}5 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 2}$

<u>Konstruktion einer Lösungsformel</u> für ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $\qquad$ Nicht alle a_{ij} mit $i,j \in \{1;2\}$ seien gleich 0 !

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ $\qquad$ Sei etwa $a_{11} \neq 0$.

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$$

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$$a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right) + a_{22}x_2 = b_2$$

Einsetzungsverfahren

$$a_{21}(b_1 - a_{12}x_2) + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

$$a_{21}\left(b_1 - a_{12}x_2\right) + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

$$b_1a_{21} - a_{12}a_{21}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \qquad \text{falls} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\,\frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_1 = \frac{b_1\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) - a_{12}\left(a_{11}b_2 - b_1a_{21}\right)}{a_{11}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{11} a_{22} - b_1 a_{12} a_{21} - a_{12} a_{11} b_2 + a_{12} b_1 a_{21}}{a_{11}\left(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\right)}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{11} a_{22} - a_{12} a_{11} b_2}{a_{11}\left(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\right)}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}}$$

Einprägsamere Form der Lösungsformeln für x_1 , x_2 unter Zuhilfenahme der Koeffizientenanordnung :

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Determinante der bezüglich der Koeffizienten von x_1 modifizierten Koeffizientenmatrix

Determinante der Koeffizientenmatrix

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Determinante der bezüglich der Koeffizienten von x_2 modifizierten Koeffizientenmatrix

Determinante der Koeffizientenmatrix

Ergebnis :

Das lineare Gleichungssystem

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

hat, falls $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \neq 0$ gilt, folgende Lösungen :

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Rechenbeispiel vom Anfang :

1 $\quad 2x_1 + 3x_2 = 4$

2 $\quad 3x_1 + 6x_2 = 6$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 6 - 3 \cdot 6}{2 \cdot 6 - 3 \cdot 3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 6 - 4 \cdot 3}{2 \cdot 6 - 3 \cdot 3} = 0$$

Retrospekt auf alle möglichen Lösungsmengen

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

(I) Falls $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \neq 0$ erhält man die Lösungen :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(II) Falls $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ oder $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ gibt es keine Lösungen , wegen des Widerspruchs

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

oder

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(III) Falls $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0$ gibt es unendlich viele Lösungen , denn :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$0\,x_2 = 0$ **, also** $x_2 \in \mathbb{R}$ **beliebig und** $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2$

Beispiel zu (II)

1 $\quad 1x_1 + 2x_2 = 3$

2 $\quad 3x_1 + 6x_2 = 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Beispiel zu (III)

1 $\quad 1x_1 + 2x_2 = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 3 - 2x_2$

2 $\quad 3x_1 + 6x_2 = 9$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \cdot x_1 = 0 \text{ , also } \; x_2 \in \mathbb{R}$$

<u>Konstruktion einer Lösungsformel</u> für ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

1 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

2 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

3 $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

1 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

2‘ $a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1$

3‘ $a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1$

$$\mathbf{1} \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$\mathbf{2'} \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1$$

$$\mathbf{3'} \qquad a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} (b_2 - a_{21}x_1) & a_{23} \\ (b_3 - a_{31}x_1) & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{(b_2 - a_{21}x_1)a_{33} - a_{23}(b_3 - a_{31}x_1)}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & (b_2 - a_{21}x_1) \\ a_{32} & (b_3 - a_{31}x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}(b_3 - a_{31}x_1) - (b_2 - a_{21}x_1)a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}$$

Vereinfachen der Lösungen x_2 , x_3 :

$$x_2 = \frac{\left(b_2 - a_{21} x_1\right) a_{33} - a_{23} \left(b_3 - a_{31} x_1\right)}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{33} - a_{23} b_3 - \left(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{22} \left(b_3 - a_{31} x_1\right) - \left(b_2 - a_{21} x_1\right) a_{32}}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{22} b_3 - b_2 a_{32} - \left(a_{22} a_{31} - a_{21} a_{32}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

Einsetzen der Lösungen x_2 , x_3 in Gleichung **1** :

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{33} - a_{23} b_3 - \left(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

$$x_3 = \frac{a_{22} b_3 - b_2 a_{32} - \left(a_{22} a_{31} - a_{21} a_{32}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}}$$

1‘

$$a_{11}x_1 + a_{12} \frac{b_2 a_{33} - a_{23} b_3 - \left(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}} + a_{13} \frac{a_{22} b_3 - b_2 a_{32} - \left(a_{22} a_{31} - a_{21} a_{32}\right) x_1}{a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}} = b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}\frac{b_2 a_{33} - a_{23}b_3 - \left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)x_1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} + a_{13}\frac{a_{22}b_3 - b_2 a_{32} - \left(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}\right)x_1}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} = b_1$$

$$\begin{aligned} & a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)x_1 \\ & \quad + a_{12}\left(b_2 a_{33} - a_{23}b_3 - \left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)x_1\right) \\ & \quad + a_{13}\left(a_{22}b_3 - b_2 a_{32} - \left(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}\right)x_1\right) = b_1\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)x_1 - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)x_1 - a_{13}\left(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}\right)x_1 \\ & \quad + a_{12}\left(b_2 a_{33} - a_{23}b_3\right) \\ & \quad + a_{13}\left(a_{22}b_3 - b_2 a_{32}\right) = b_1\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) \end{aligned}$$

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)x_1 \;-\; a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)x_1 \;-\; a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)x_1$$

$$+\; a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right)$$

$$+\; a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right) \qquad = \; b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)$$

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)x_1 \;-\; a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)x_1 \;-\; a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)x_1$$

$$= \; b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) \;-\; a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) \;-\; a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)$$

$$\Big(\; a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) \;-\; a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) \;-\; a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right) \;\Big)x_1$$

$$= \; b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) \;-\; a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) \;-\; a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)$$

$$\Big(\; a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right) \;\Big)x_1$$

$$= b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) - a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)$$

$$x_1 = \frac{b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) - a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)}$$

Eine Lösungsformel, die man sich nur schwerlich einprägen könnte !

Es sei denn, man nimmt bei den Termen Bezug auf die Anordnung der Koeffizienten im gegebenen Gleichungssystem !

$$x_1 = \frac{b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(b_2a_{33}-a_{23}b_3) - a_{13}(a_{22}b_3-b_2a_{32})}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32})}$$

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

3 $\quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Betrachtung des Nenners von x_1 :

$$\underline{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})} - \underline{a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})} - \underline{a_{13}(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32})}$$

Darstellung in der Koeffizientenmatrix :

$$\begin{matrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Modifizierung des Nenners von x_1 :

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)$$

$$= \underline{a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)} - \underline{a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)} + \underline{a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)}$$

Darstellung in der Koeffizientenmatrix :

$$\begin{array}{ccc} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Definition der entsprechenden Determinante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$x_1 = \frac{b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) - a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)}$$

1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

3 $\quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Modifizierung des Zählers von x_1 :

$$b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) - a_{13}\left(a_{22}b_3-b_2a_{32}\right)$$

$$= b_1\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(b_2a_{33}-a_{23}b_3\right) + a_{13}\left(b_2a_{32}-a_{22}b_3\right)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Darstellung der Lösung x_1 über Determinanten :

1 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

2 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

3 $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

$$x_1 = \frac{b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(b_2a_{33}-a_{23}b_3) + a_{13}(b_2a_{32}-a_{22}b_3)}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Die Lösungsformeln für x_2 erhält man aus dem Gleichungssystem durch folgende Umordnung :

$$\begin{array}{llcl}
\mathbf{1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & & \mathbf{1'} & a_{12}x_2 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = b_1 \\
\mathbf{2} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \longrightarrow & \mathbf{2'} & a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 = b_2 \\
\mathbf{3} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & & \mathbf{3'} & a_{32}x_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 = b_3
\end{array}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Die Rechtfertigung dafür, dass die Spaltenvertauschung zweier aufeinanderfolgender Spalten das Vorzeichen der Determinante ändert, folgt später !

Die Lösungsformeln für x_3 erhält man aus dem Gleichungssystem durch folgende Umordnung :

$$\begin{array}{llcl}
\mathbf{1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & & \mathbf{1'} & a_{13}x_3 + a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = b_1 \\
\mathbf{2} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \longrightarrow & \mathbf{2'} & a_{23}x_3 + a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = b_2 \\
\mathbf{3} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & & \mathbf{3'} & a_{33}x_3 + a_{32}x_2 + a_{31}x_1 = b_3
\end{array}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{11} \\ b_2 & a_{22} & a_{21} \\ b_3 & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Die Rechtfertigung dafür, dass die Spaltenvertauschung zweier aufeinanderfolgender Spalten das Vorzeichen der Determinante ändert, folgt später !

Ergebnis :

Das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
\mathbf{2} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
\mathbf{3} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{array}
$$

hat, falls $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ gilt, folgende Lösungen :

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad
x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}
$$

Spaltenvertauschung zweier aufeinanderfolgender Spalten und Vorzeichenänderung der Determinante

$$\begin{matrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

Da die Determinante einer 3x3-Matrix über Determinanten von 2x2-Matrizen definiert ist, und letztere bei Spaltenvertauschung ihr Vorzeichen verändern, überträgt sich diese Eigenschaft die 3x3-Matrix .

Beispiel bei Vertauschung der ersten und zweiten Spalte :

$$\begin{matrix} \underline{a_{12}} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{12} & \underline{a_{11}} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{12} & a_{11} & \underline{a_{13}} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) + a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\left(a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Rechenbeispiel

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1} & 1x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1 \\ \mathbf{2} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 4 \\ \mathbf{3} & 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -2 \end{array}$$

Man schreibt die Terme für die Lösungen nicht in der Quotientenform, sondern in Produktform . Im Beispiel erhält man für x_1 eine nicht erfüllbare Gleichung :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$0x_1 = 170$$

Das System hat also keine Lösung !