Zinsrechnung

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

Januar 2023

Sparkonto

Am 21.09.2022 wird ein Sparkonto in Höhe von 4000 € zu einem Zinssatz von 1,5% p. a. eröffnet. Wie hoch sind die gewonnenen Zinsen am Kalenderjahresende ?

Konditionen :

Jeder Monat wird mit 30 Tagen berechnet.
Der Einzahlungstag wird nicht berücksichtigt.

Zinszeitraum in Tagen :

$$t = 30 - 21 + 3 \cdot 30$$

$$\underline{t = 99}$$

1. Rechenmöglichkeit : Dreisatz

$$100\,\% \;\hat{=}\; 4000 \qquad\qquad 360 \;\hat{=}\; 60$$

$$1\,\% \;\hat{=}\; \frac{4000}{100} \qquad\qquad 1 \;\hat{=}\; \frac{60}{360}$$

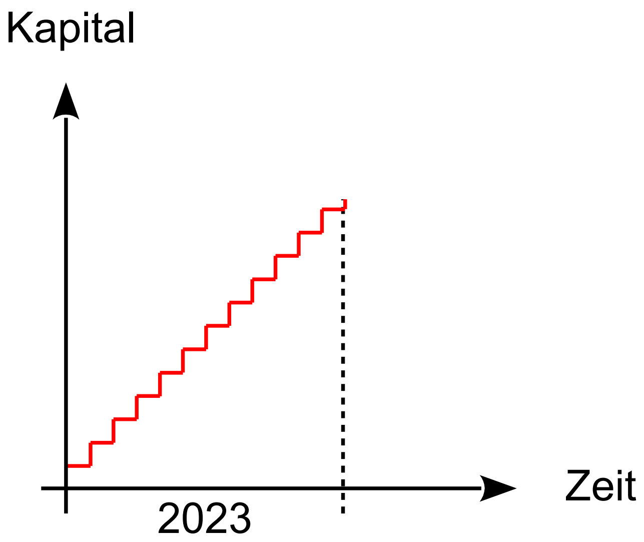
$$1{,}5\,\% \;\hat{=}\; \frac{4000}{100} \cdot 1{,}5 = 60 \qquad\qquad 99 \;\hat{=}\; \frac{60}{360} \cdot 99 = 16{,}50$$

2. Rechenmöglichkeit : Formel

$$Z = \frac{4000 \cdot 1{,}5 \cdot 99}{100 \cdot 360} = 16{,}50$$

1 Jahr Ratensparen

Welches Kapital hat jemand, der 1 Jahr lang **monatlich**, **vorschüssig** Raten von 200 € auf ein Sparkonto mit einem Zinssatz von 1,5% p. a. , beginnend am 01.01.2023 , einbezahlt ?



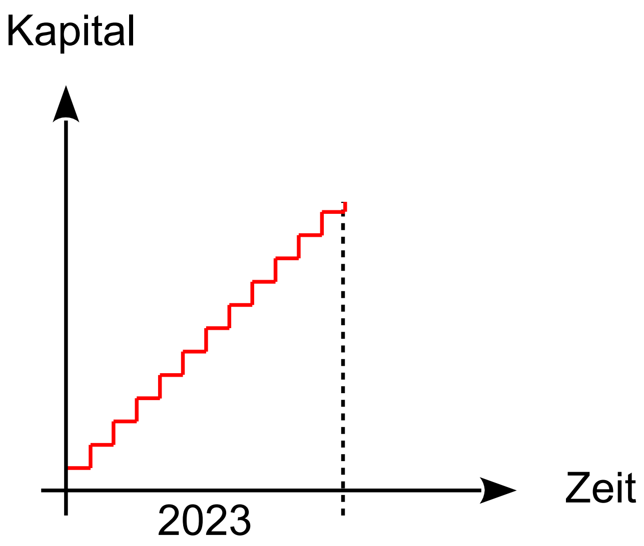
$$Z_1 = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 12}{100 \cdot 12}$$

$$Z_2 = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 11}{100 \cdot 12}$$

$$Z_3 = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 10}{100 \cdot 12}$$

$$\vdots$$

$$Z_{12} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 1}{100 \cdot 12}$$



$$Z_1 = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 12$$

$$Z_2 = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 11$$

$$Z_3 = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 10$$

$$\vdots$$

$$Z_{12} = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 1$$

$+$

$$Z = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot [\ 12 + 11 + 10 + \ldots + 1\ ]$$

$$Z = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 78$$

$$Z = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \cdot 78$$

$$\underline{Z = 19{,}50}$$

$$K = 12 \cdot 200 + 19{,}50$$

$$\underline{K = 2419{,}50}$$

Zinseszinsrechnung ; Kapitalanlage auf 4 Jahre

Ein Kapital K_0 = 10000 € wird auf 4 Jahre bei einem Zinssatz von p = 2% fest angelegt. Die jährlich anfallenden Zinsen werden dem Kapital dazugeschlagen und mit verzinst.
Berechne die jährliche Entwicklung des Kapitals !

$$K_1 = 10000 + 10000 \cdot \frac{2}{100}$$

$$K_1 = 10000 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{2}{100} \right)}_{\text{Zinsfaktor } q = 1 + \frac{2}{100}}$$

$$K_1 = K_0 \cdot q$$

$$\underline{K_1 = K_0 \cdot q}$$

$$K_2 = K_1 \cdot q$$

$$K_2 = K_0 \cdot q \cdot q$$

$$\underline{K_2 = K_0 \cdot q^2}$$

$$\underline{K_3 = K_0 \cdot q^3}$$

$$\underline{K_4 = K_0 \cdot q^4}$$

Allgemein :

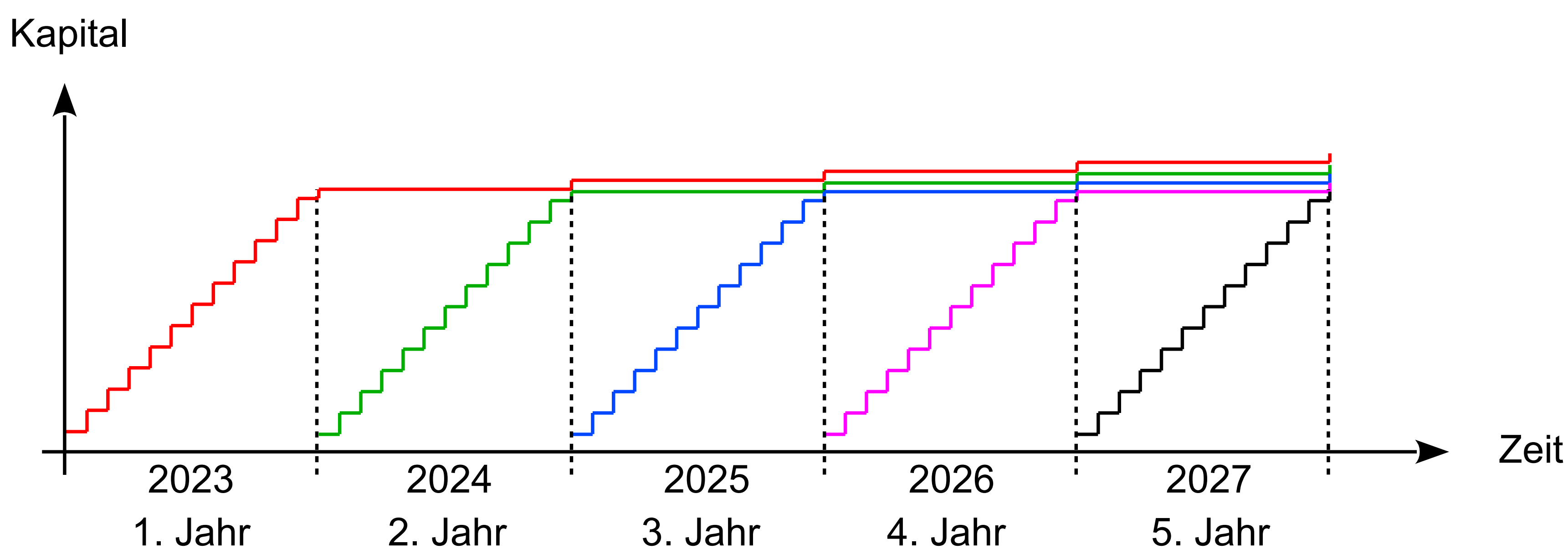
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Zinseszinsformel für n Jahre

Ratensparen über 5 Jahre

Welches Kapital hat jemand, der 5 Jahre lang **monatlich**, **vorschüssig** Raten von 200 € auf ein Sparkonto mit einem Zinssatz von 1,5% p. a. , beginnend am 01.01.2023 , einbezahlt ?



Zinsen und Kapital aus dem 1. Jahr der Ratenzahlung und weitere Entwicklung :

$$Z_{2024} = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \left[\ 12 + 11 + \ldots + 2 + 1\ \right]$$

$$Z_{2024} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

$$K_{2024} = 12 \cdot 200 + \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

$$K_{2024} = 2419{,}50$$

$$K_{1.} = 2419{,}50 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^4$$

$$K_{1.} = 2567{,}97$$

Zinsen und Kapital aus dem 2. Jahr der Ratenzahlung und weitere Entwicklung :

$$Z_{2025} = \frac{200 \cdot 1{,}5}{100 \cdot 12} \left[12 + 11 + \ldots + 2 + 1 \right]$$

$$Z_{2025} = \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

$$K_{2025} = 12 \cdot 200 + \frac{200 \cdot 1{,}5 \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

$$K_{2025} = 2419{,}50$$

$$\underline{K_{2.} = 2419{,}50 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^3}$$

$$\underline{K_{2.} = 2530{,}02}$$

Zinsen und Kapital aus dem 3. Jahr der Ratenzahlung und weitere Entwicklung :

$$K_{3.} = 2419{,}50 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^2$$

$$K_{2.} = 2492{,}63$$

Zinsen und Kapital aus dem 4. Jahr der Ratenzahlung und weitere Entwicklung :

$$K_{4.} = 2419{,}50 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^1$$

$$K_{4.} = 2455{,}79$$

Zinsen und Kapital aus dem 5. Jahr der Ratenzahlung und weitere Entwicklung :

$$\underline{K_{5.} = 2419{,}50 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^0}$$

$$\underline{K_{5.} = 2419{,}50}$$

Gesamtkapital nach 5 Jahren :

$$K = \underline{2567{,}97} + \underline{2530{,}02} + \underline{2492{,}63} + \underline{2455{,}79} + \underline{2419{,}50}$$

$$\boxed{K = 12\,465{,}91}$$

Tageszinsformel

Ein Kapital K wird für t Tage bei einem Zinssatz von p% p. a. angelegt. Die Zinsen für diesen Zeitraum sind :

$$\boxed{Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$$

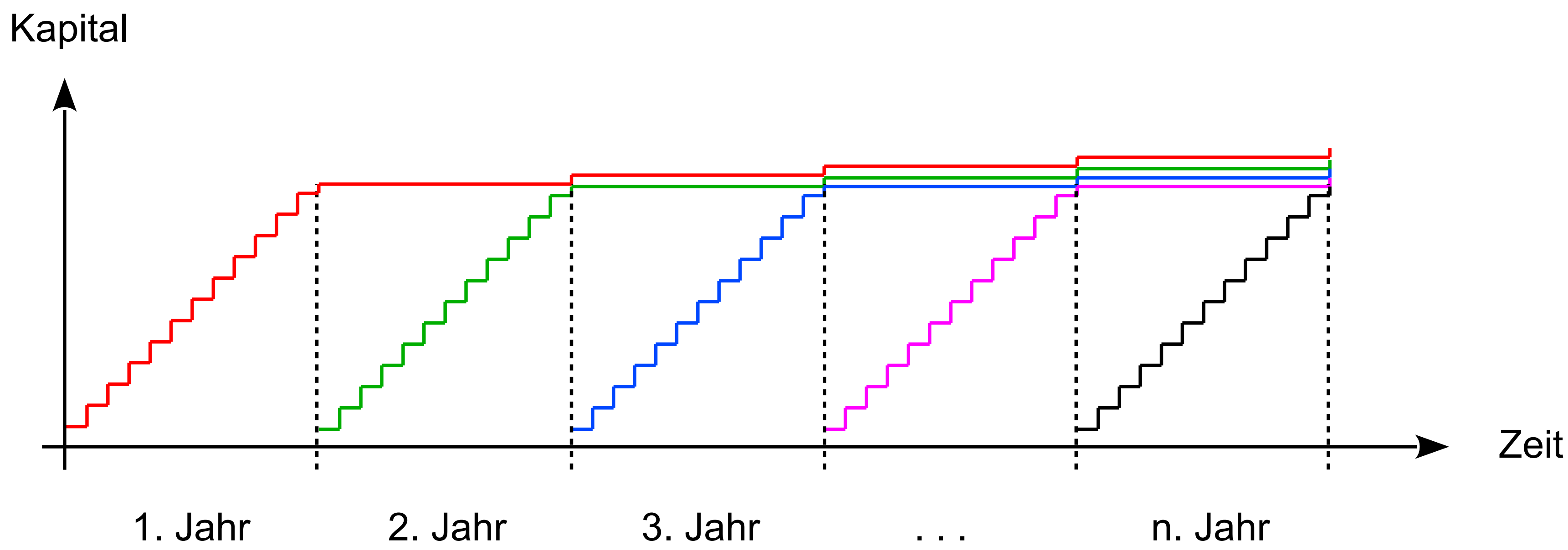
Zinseszinsformel

Ein Kapital K_0 wird auf n Jahre bei einem Zinssatz von p% p.a. fest angelegt. Die jährlich anfallenden Zinsen werden dem Kapital dazugeschlagen und mit verzinst.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Allgemeine Betrachtung des monatlichen vorschüssigen Ratensparens

Welches Kapital hat jemand, der n Jahre lang monatlich vorschüssig eine Rate R auf ein Sparkonto mit einem Zinssatz von p% p. a. einbezahlt ?



$$Z_1 = \frac{R \cdot p}{100 \cdot 12} \left[12 + 11 + \ldots + 2 + 1 \right]$$

$$Z_1 = \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

Zinsen aus 1 Jahr Ratensparen

$$K_1 = 12 \cdot R + \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12}$$

Kapital aus 1 Jahr Ratensparen

$$K_1 = 12 \cdot R + \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12} \Rightarrow \underline{K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}}$$

$$K_1 = 12 \cdot R + \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12} \Rightarrow \underline{K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}}$$

$$K_1 = 12 \cdot R + \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12} \Rightarrow \underline{K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-3}}$$

usw.

$$K_1 = 12 \cdot R + \frac{R \cdot p \cdot 78}{100 \cdot 12} \Rightarrow \underline{K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{0}}$$

$$K = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + K_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \ldots + K_1\left(1+\frac{p}{100}\right)^0$$

$$K = K_1\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+\frac{p}{100}\right)^0\right]$$

$q = 1+\frac{p}{100}$ Zinsfaktor

$$K = K_1\left[q^n + q^{n-1} + \ldots + 1\right]$$

$$\boxed{K = K_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}} \quad \text{mit} \quad K_1 = 12\cdot R + \frac{R\cdot p\cdot 78}{100\cdot 12}$$

Stetige Verzinsung

Von einer stetigen Verzinsung würde man sprechen, wenn die Zinsen kontinuierlich in jedem Moment dem Kapital hinzugerechnet werden .

Unterjährige Verzinsung mit m Zinsperioden

n : Anzahl der Zinsjahre
m : Anzahl der unterjährigen Zinsperioden
p : Zinssatz p. a.
K_0 : Startkapital

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100} \right)^{m\,n}$$

Um eine Formel für die **stetige Verzinsung** zu erhalten, muss man den Grenzwert betrachten :

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^{m\,n}$$

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{m \cdot 100}{p}}\right)^{m\,n}$$

Setze $i := \dfrac{m \cdot 100}{p}$, $m = \dfrac{i \cdot p}{100}$, $i \to \infty \Leftrightarrow m \to \infty$

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{i \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\frac{i \cdot p}{100}\,n}$$

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{i \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\frac{i \cdot p}{100} n}$$

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{i \to \infty} K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \right]^{\frac{p}{100} n}$$

Wie man in der **Analysis** zeigt, ist $\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} = e \approx 2{,}71828$

gleich der **Eulerschen Zahl** .

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} K_n = K_0 \, e^{\frac{p}{100} n}}$$ **stetige Verzinsung über n Jahre hinweg**

Leonard Euler (1707 – 1783)

https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Anhang

Die **Bernoullische Ungleichung** lautet :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle} \quad x \geq -1 \quad \text{und für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis (Vollständige Induktion) :

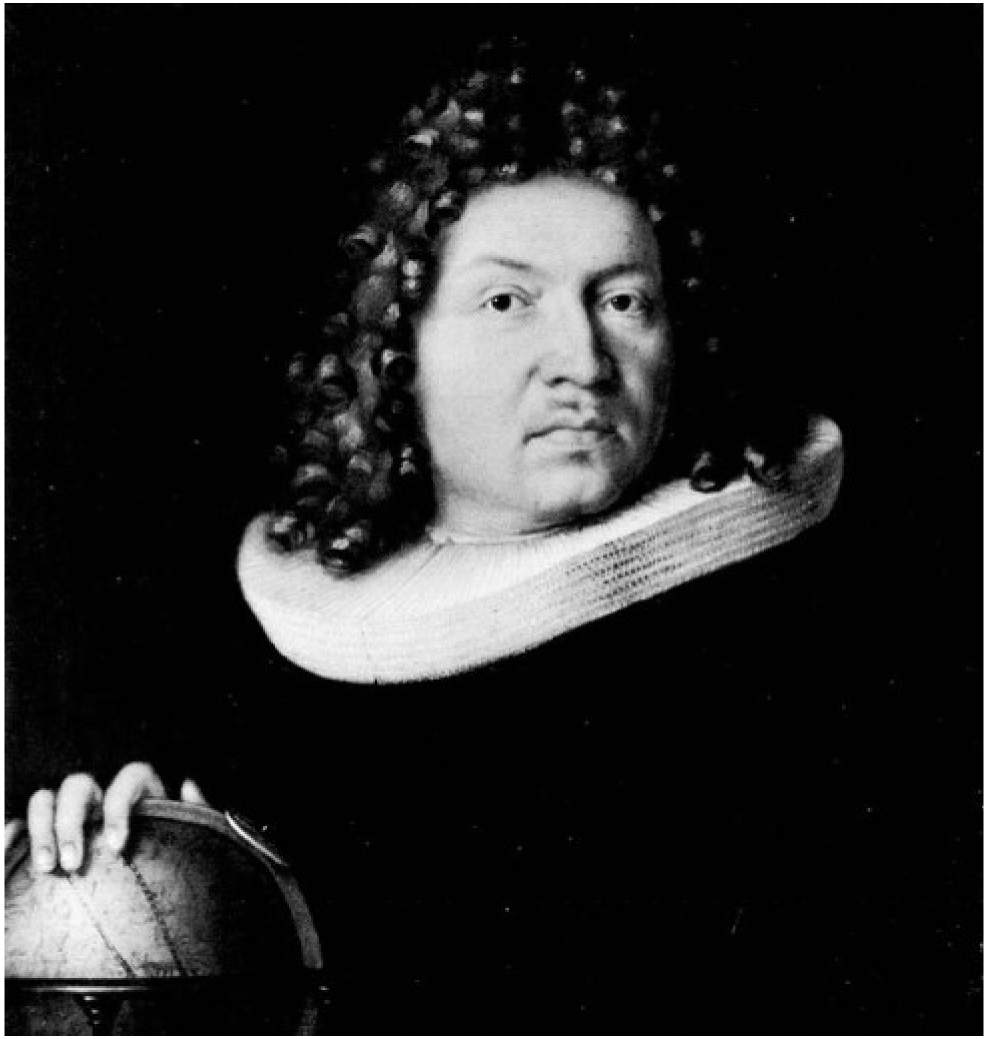
(1) Die Behauptung ist wahr für $n=1$, denn $(1 + x)^1 \geq 1 + 1x$.

(2) $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1+x+nx+nx^2 \geq$

$\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x$, also $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

Jakob Bernoulli (1655 - 1705)

Jakob Bernoulli (1654–1705) Mathematiker und Physiker - Jakob I Bernoulli – Wikipedia



Anhang

Die **Eulersche Zahl e** ergibt sich als Zentrum der Intervallschachtelung

$$\left[\ \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \ ; \ \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}\ \right]_{i \,\in\, \mathbb{N}} \quad .$$

Beweis :

(1) $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} < \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i}\left(1 + \frac{1}{i}\right)$, da $\left(1 + \frac{1}{i}\right) > 1$

(2) $\left(\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, denn :

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^{i+1}}{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i}} = \frac{\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{i+1}}{\left(\frac{i+1}{i}\right)^{i}} = \frac{\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{(i+1)i} \left(\frac{i+1}{i}\right)}{\left(\frac{i+1}{i}\right)^{i+1}} = \left(\frac{(i+2)i}{(i+1)^2}\right)^{i+1} \left(\frac{i+1}{i}\right) =$$

$$= \left(\frac{i^2+2i+1 - 1}{(i+1)^2}\right)^{i+1}\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(\frac{(i+1)^2 - 1}{(i+1)^2}\right)^{i+1}\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right)^{i+1}\left(\frac{i+1}{i}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - (i+1)\frac{1}{(i+1)^2}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{(i+1)}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(\frac{i}{(i+1)}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = 1 \quad , \text{ also}$$

$$\geq \left(1 - (i+1)\frac{1}{(i+1)^2}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{(i+1)}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = \left(\frac{i}{(i+1)}\right)\left(\frac{i+1}{i}\right) = 1 \quad , \text{ also}$$

$$\frac{\left(1 + \dfrac{1}{i+1}\right)^{i+1}}{\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)^{i}} \geq 1 \quad \text{und damit} \quad \left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^{i+1} \geq \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \quad .$$

(3) $\left(\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, denn :

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}}{\left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^{i+2}} = \frac{\left(\frac{i+1}{i}\right)^{i+1}}{\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{i+2}} = \frac{\left(\frac{i+1}{i}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right)}{\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{i+2}} = \left(\frac{(i+1)^2}{i(i+2)}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{(i+1)^2}{i^2+2i+1 - 1}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \left(\frac{(i+1)^2 - 1 + 1}{(i+1)^2 - 1}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{(i+1)^2 - 1}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{i(i+2)}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) \geq$$

$$= \left(1 + \frac{1}{(i+1)^2 - 1}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{i(i+2)}\right)^{i+2}\left(\frac{i}{i+1}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 + (i+2)\frac{1}{i(i+2)}\right)\left(\frac{i}{i+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{i}\right)\left(\frac{i}{i+1}\right) = \left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{i}{i+1}\right) = 1 \text{ , also}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}}{\left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^{i+2}} \geq 1 \text{ und damit } \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} \geq \left(1 + \frac{1}{i+1}\right)^{i+2}$$

(4) $$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} - \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} = 0 \quad \text{, denn :}$$

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} - \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i}\left(1+\frac{1}{i}-1\right) = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i}\frac{1}{i} < \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}\frac{1}{i} \leq$$

$$\leq 4 \, \frac{1}{i} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{für } i \quad \rightarrow \quad \infty$$

Was ist $\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\frac{i \cdot p}{100} n}$ **mit** $i := \frac{m \cdot 100}{p} \in \mathbb{R}$ **?**

Für alle $i \in \mathbb{R}$ gibt es ein $j_i \in \mathbb{N}$ mit $j_i \le i \le j_i + 1$.

Dann folgt mit $\frac{1}{j_i+1} \le \frac{1}{i} \le \frac{1}{j_i}$:

$$\left(1 + \frac{1}{j_i+1}\right)^{j_i} \le \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{j_i} \le \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \le \left(1 + \frac{1}{j_i}\right)^{i} \le \left(1 + \frac{1}{j_i}\right)^{j_i+1}$$, also

$$\left(1 + \frac{1}{j_i+1}\right)^{j_i} \le \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{j_i} \le \left(1 + \frac{1}{j_i}\right)^{j_i+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{j_i+1}\right)^{j_i} \leq \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{j_i} \leq \left(1 + \frac{1}{j_i}\right)^{j_i+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{j_i+1}\right)^{j_i+1}\left(1 + \frac{1}{j_i+1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{j_i} \leq \left(1 + \frac{1}{j_i}\right)^{j_i+1}$$

Die linke Seite der Ungleichungskette strebt gegen $e \cdot 1^{-1}$ und die rechte gegen e, also ist $\lim\limits_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} = e$ und

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\frac{i \cdot p}{100} n} = \lim_{i \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i} \right]^{\frac{p}{100} n} = e^{\frac{p}{100} n} .$$