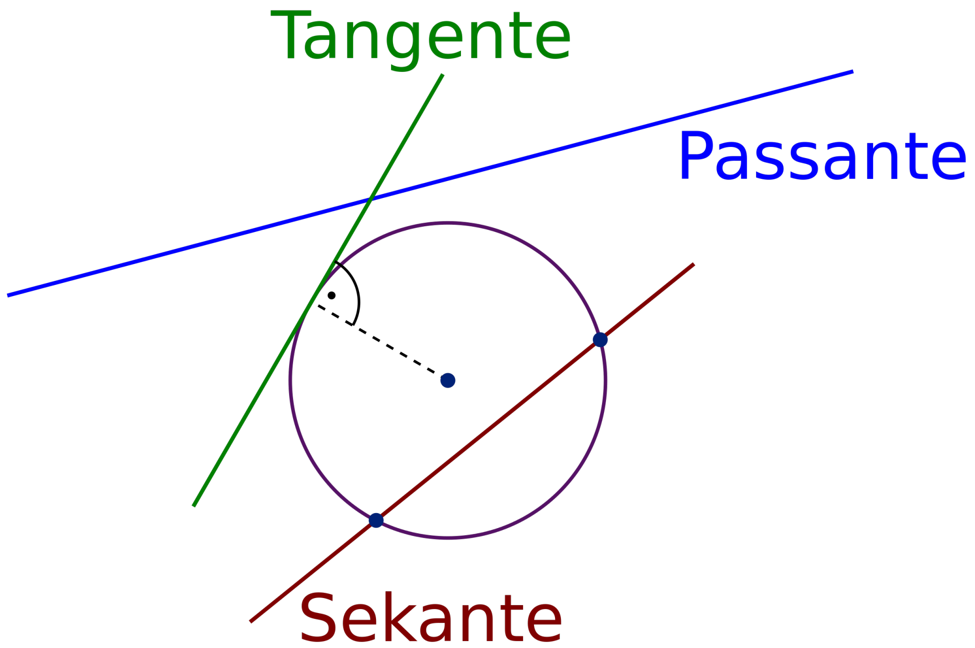
Differentialrechnung

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

Januar 2023

Einige Begriffe aus der Elementargeometrie



Eine Gerade, die an einem Kreis vorbeiläuft, heißt **Passante (frz. passer = vorbeigehen) .**

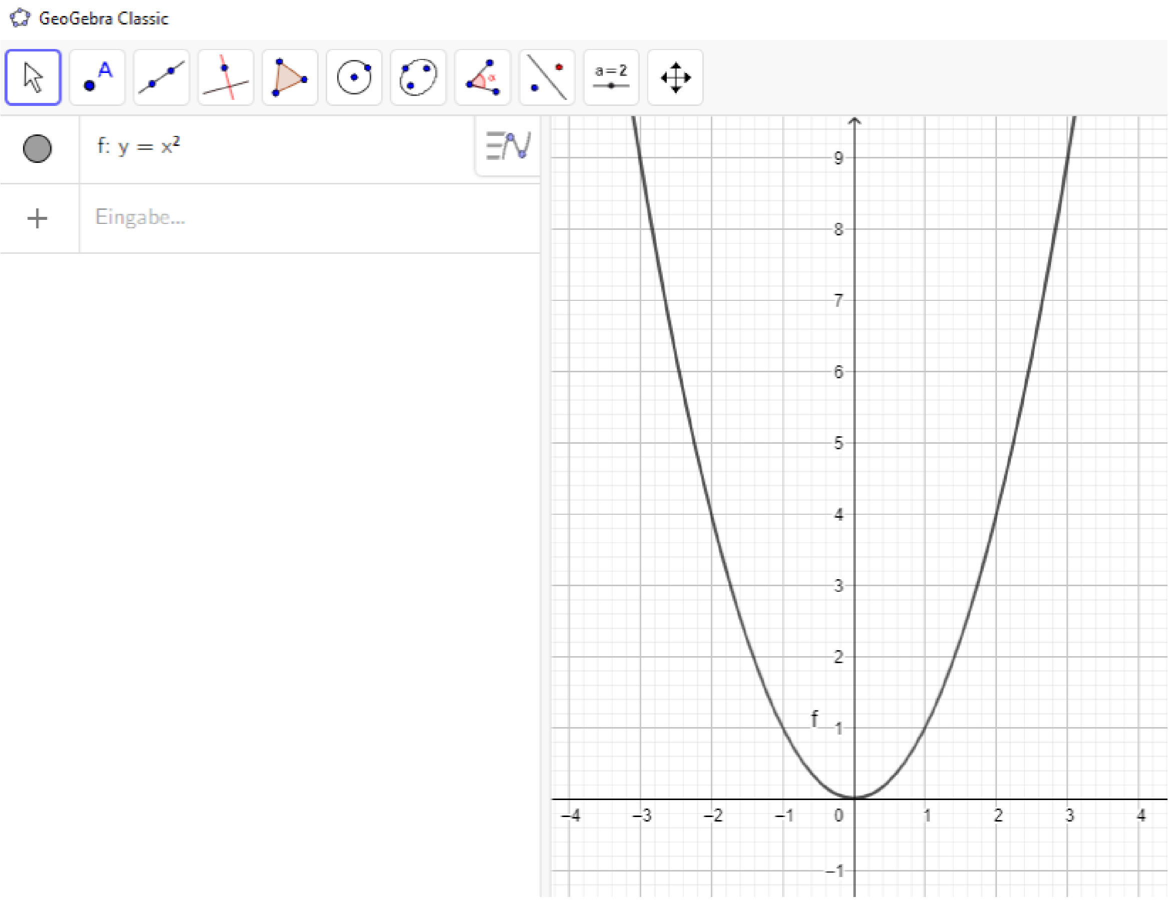
Eine Gerade, die einem Kreis berührt, heißt **Tangente (lat. tangere = berühren) .**

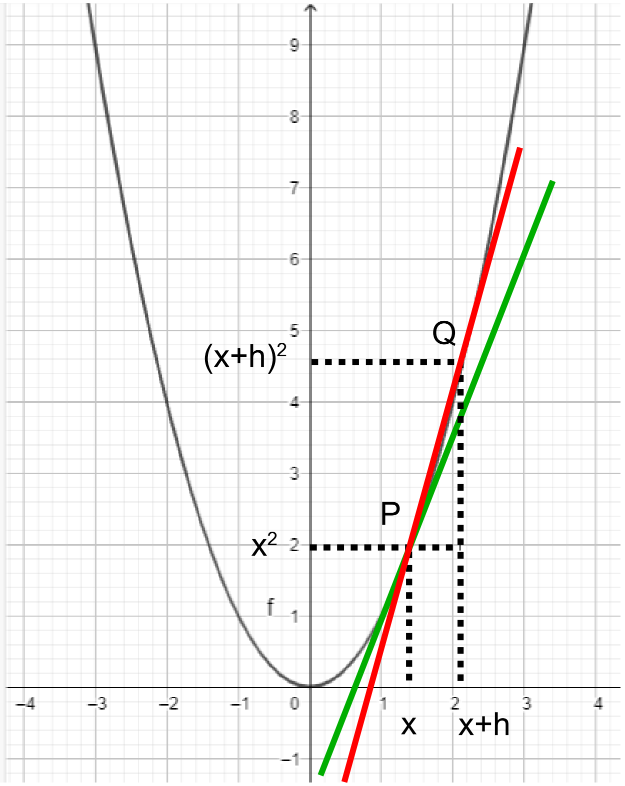
Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heißt **Sekante (lat. secare = schneiden) .**

Betrachtet man allgemein Kurven und Geraden, so gelten die Begriffe Passante, Tangente und Sekante entsprechend !

Bestimmung einer Tangente an einen Funktionsgraphen

Gegeben sei der Graph der Funktion $y = f(x) = x^2$.





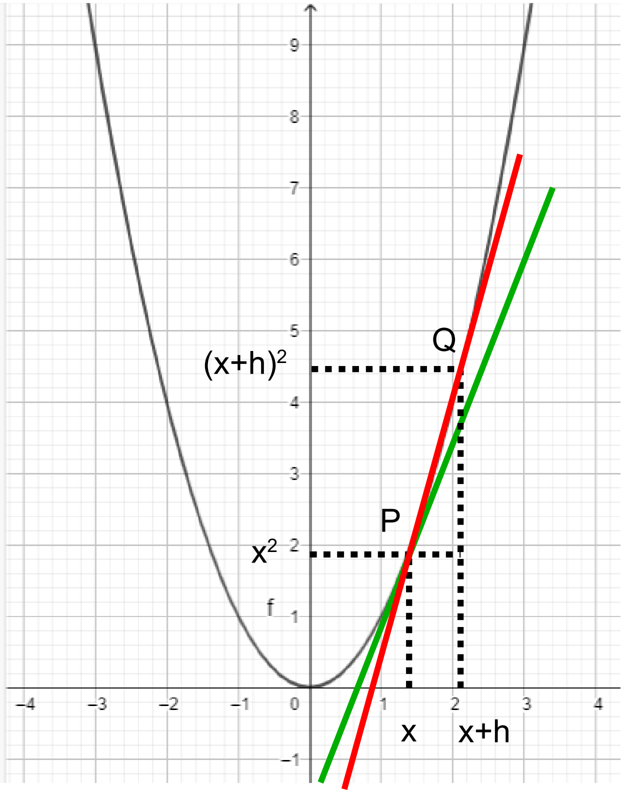
Im Punkt $P\left(x \mid x^2\right)$ soll die Tangente bestimmt werden .

Hierzu betrachtet man zunächst einen zweiten Punkt $Q\left(x+h \mid (x+h)^2\right)$ sowie die Sekante durch die Punkte P und Q .

Die Steigung der Sekante ist :

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_s = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$



Wenn man nun den Punkt Q auf der Kurve in Richtung P bewegt, kommt die Sekante PQ der gesuchten Tangente immer näher und geht schließlich in die Tangente über .

Anders gesagt, h wird immer kleiner, h strebt gegen 0 , mit dem Effekt, dass die Sekantensteigung m_s in die Tangentensteigung m_t übergeht .

Diesen **Grenzprozess (lat. Limes = Grenze)** beschreibt man formal so :

$$m_t = \lim_{h \to 0} m_s$$

„ m_t gleich Limes h gegen Null von m_s “

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Durchführung des Grenzprozesses und Bestimmung des Grenzwertes

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$m_t = \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$m_t = 2x$$

$m_t(x) = 2x$ Für jedes x ist $m_t(x) = 2x$ die Steigung der Tangente an der Stelle x bzw. im Punkt $P(x|x^2)$.

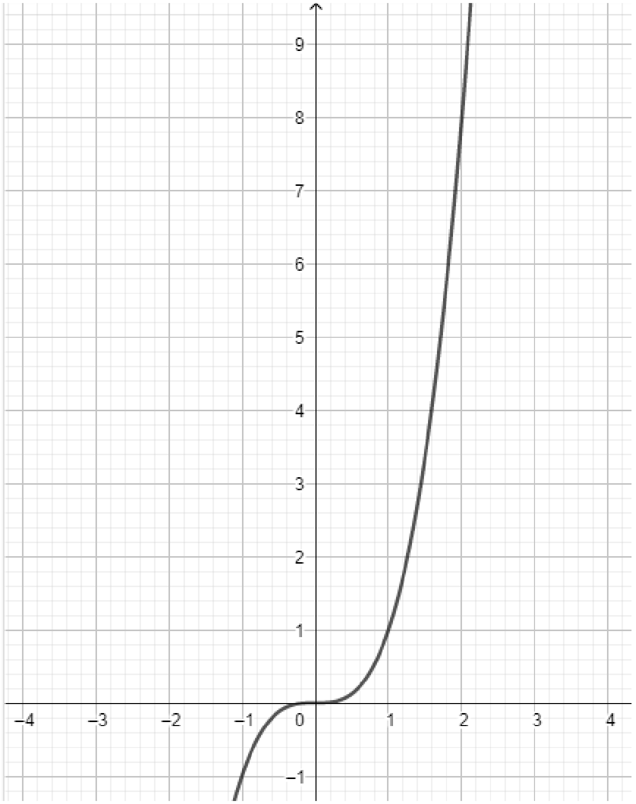
Die Ableitungsfunktion f‘ zur Funktion f(x) = x²

$$f' : \quad x \longrightarrow m_t(x) = 2x$$
$$x \longrightarrow f'(x) = 2x$$

Diejenige Funktion f‘, die jeder Stelle x die Steigung der Tangente an der Stelle x zuordnet, heißt Ableitungsfunktion der Funktion f .

Kürzer : f‘ ist die Ableitung von f !

Die Ableitung f‘ von y = f(x) = x³



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

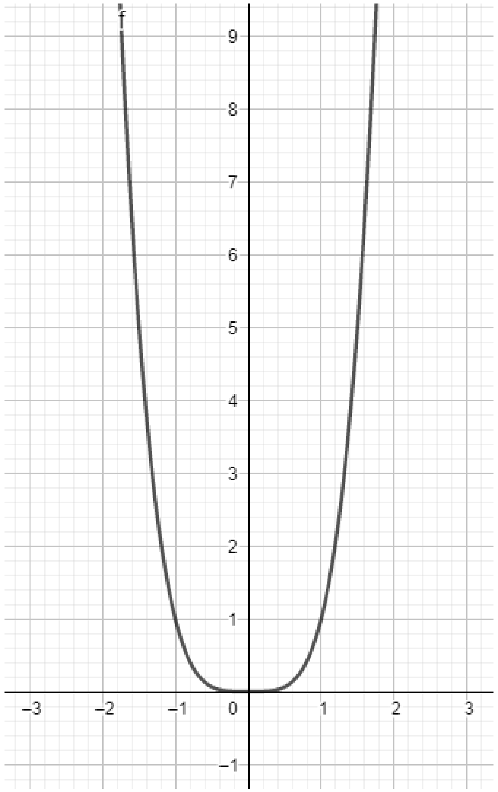
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Die Ableitung f‘ von y = f(x) = x^4



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$$

$$f'(x) = 4x^3$$

u.s.w.

Ergebnisse :

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x^1$$

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

Vermutung :

$$f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4$$

.
.
.

Man kann mittels der verallgemeinerten binomischen Formel zeigen, dass folgende Behauptung wahr ist :

$$\boxed{f(x) = x^n\,,\; n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n x^{n-1}}$$

Potenzregel

Beweis der Potenzregel

Bei der Herleitung der Potenzregel geht es entscheidend um die Entwicklung folgenden Ausdrucks $(x+h)^n$, $n \in \mathbb{N}$, wo es also gilt die Klammer aufzulösen :

Betrachten wir hierzu die ersten Entwicklungen :

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

Einheitlichere Schreibweise :

$$(x+h)^2 = 1x^2h^0 + 2x^1h^1 + 1x^0h^2$$

$$(x+h)^3 = 1x^3h^0 + 3x^2h^1 + 3x^1h^2 + 1x^0h^3$$

$$(x+h)^4 = 1x^4h^0 + 4x^3h^1 + 6x^2h^2 + 4x^1h^3 + 1x^0h^4$$

$$(x+h)^2 = 1x^2h^0 + 2x^1h^1 + 1x^0h^2$$
$$(x+h)^3 = 1x^3h^0 + 3x^2h^1 + 3x^1h^2 + 1x^0h^3$$
$$(x+h)^4 = 1x^4h^0 + 4x^3h^1 + 6x^2h^2 + 4x^1h^3 + 1x^0h^4$$

Die Summanden der rechten Seite sind Produkte aus einer Zahl und Potenzen von x und h . Die Exponenten der Potenzen von x sind in Leserichtung gesehen steigend, und die Exponenten der Potenzen von h sind entgegen der Leserichtung fallend, und zwar jeweils bis zum höchsten Exponenten bzw. bis zur Null .

Möchte man nun die Entwicklung von $(x+h)^5$ erhalten, kann man wie folgt vorgehen :

$$(x+h)^5 = (x+h)^4(x+h)$$
$$(x+h)^5 = \left(1x^4h^0 + 4x^3h^1 + 6x^2h^2 + 4x^1h^3 + 1x^0h^4\right)(x+h)$$
$$\begin{aligned}(x+h)^5 = {} & 1x^5h^0 + 4x^4h^1 + 6x^3h^2 + 4x^2h^3 + 1x^1h^4 \\ & + 1x^4h^1 + 4x^3h^2 + 6x^2h^3 + 4x^1h^4 + 1x^0h^5\end{aligned}$$

$$\left(x+h\right)^5 = 1x^5h^0 + 4x^4h^1 + 6x^3h^2 + 4x^2h^3 + 1x^1h^4$$
$$+ 1x^4h^1 + 4x^3h^2 + 6x^2h^3 + 4x^1h^4 + 1x^0h^5$$

$$\left(x+h\right)^5 = 1x^5h^0 + \left(1+4\right)x^4h^1 + \left(4+6\right)x^3h^2 + \left(6+4\right)x^2h^3 + \left(4+1\right)x^1h^4 + 1x^0h^5$$

$$\left(x+h\right)^5 = 1x^5h^0 + 5x^4h^1 + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5x^1h^4 + 1x^0h^5$$

Offenbar erhält man die Koeffizienten der Entwicklung von $\left(x+h\right)^5$ im Wesentlichen durch Addition zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten aus der Entwicklung von $\left(x+h\right)^4$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Das additive Muster Muster gilt für alle Koeffizienten der Entwicklungen von $\left(x+h\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$!

Das additive Muster Muster gilt für alle Koeffizienten der Entwicklungen von $(x+h)^n$, $n \in \mathbb{N}$!

$(x+h)^0$	:	1					
$(x+h)^1$	:	1	1				
$(x+h)^2$	:	1	2	1			
$(x+h)^3$	:	1	3 +	3	1		
				=			
$(x+h)^4$	:	1	4	6	4	1	
$(x+h)^5$	:	1	5	10	10	5	1

Bemerkung :

In der zweiten Spalte von links sind die größten Exponenten der Entwicklung !

Das additive Zahlenschema der Koeffizienten der Entwicklungen von $(x+h)^n$, $n \in \mathbb{N}$ heißt **Pascalsches Dreieck**.

(Blaise Pascal, frz. Mathematiker, 1623 – 1662)

Blaise Pascal, frz. Mathematiker, 1623 – 1662

Blaise_Pascal_2.jpg (965×1126) (wikimedia.org)

Gehen wir jetzt zurück zur Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und zur Grenzwertbildung .

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1x^n h^0} + n x^{n-1} h^1 + \ldots + 1 x^0 h^n \cancel{- x^n}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{n x^{n-1} \cancel{h^1} + \ldots + 1 x^0 \cancel{h^n}}{\cancel{h}}$$

Die Exponenten von h im Zähler sind alle größer oder gleich 1 , weshalb man durch h kürzen kann !

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} n x^{n-1} + \ldots + 1 x^0 h^{n-1}$$

Wenn h gegen Null strebt, bleibt nur noch der erste Term übrig !

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

q.e.d.

Weitere Ableitungsregeln

Seien $f(x)$, $g(x)$ ableitbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante .

Konstantenregeln für additive und multiplikative Konstanten

$$\boxed{\left(f(x) + c\right)' = f'(x)}$$

$$\boxed{\left(c f(x)\right)' = c f'(x)}$$

Summenregel

$$\boxed{\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)}$$

Produktregel

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Weitere Ableitungsregeln (Beweise)

$$\left(f(x) + c\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+c - \left(f(x)+c\right)}{h}$$

$$\left(f(x) + c\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+c - f(x)-c}{h}$$

$$\left(f(x) + c\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\boxed{\left(f(x) + c\right)' = f'(x)}$$

$$\left(c\,f(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{c\,f(x+h) - c\,f(x)}{h}$$

$$\left(c\,f(x)\right)' = \lim_{h \to 0} c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\boxed{\left(c\,f(x)\right)' = c\,f'(x)}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \underline{- f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h)} - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{\left(f(x+h) - f(x)\right) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \left(g(x+h) - g(x)\right)}{h}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Bemerkung : Bei stetigen Funktionen $g(x)$ gilt immer $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

q.e.d.

Wiederholung der Potenzgesetze

Für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m}} \qquad \boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}} \qquad \boxed{\left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}}$$

Speziell :

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}} \qquad \boxed{x^0 = 1}$$

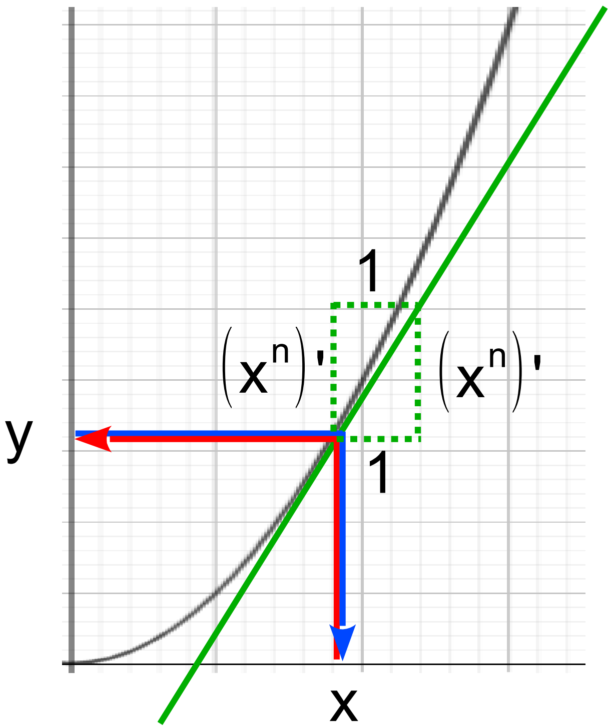
Potenzen mit rationalen Exponenten

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\boxed{x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}}$, denn $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$.

Für $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist $\boxed{x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x}^{\,m}}$, denn $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x}^{\,m}$.

Bemerkung : Alle Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit rationalen Exponenten .

Ableitung der Umkehrfunktion $x = y^{\frac{1}{n}}$ zur Funktion $y = x^n$



$$\left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$$

$$\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{\left(x^n\right)'}$$

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\,y^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\;y^{\frac{1}{n}-1}}$$

Funktion : $y = x^n$

Umkehrfunktion : $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$

Ableitung der Verkettung zweier Funktionen

$$x \xrightarrow{\ f\ } y = f(x) \xrightarrow{\ g\ } z = g(y) = g(f(x))$$

$$\big(g(f(x)) \big)' = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

$$\big(g(f(x)) \big)' = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\big(g(f(x)) \big)' = \lim_{h \to 0,\, i \to 0} \frac{g(y+i) - g(y)}{y+i - y} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\big(g(f(x)) \big)' = \lim_{h \to 0,\, i \to 0} \frac{g(y+i) - g(y)}{i} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\boxed{\big(g(f(x)) \big)' = g'(y) \cdot f'(x)}$$ **Kettenregel**

Ableitung der Funktion $x = y^{\frac{m}{n}}$

$$x = y^{\frac{m}{n}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m$$ **Verkettung**

$$\left(y^{\frac{m}{n}} \right)' = \left(\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m \right)' = m \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left(y^{\frac{m}{n}} \right)' = \frac{m}{n}\, y^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - 1}$$

$$\boxed{\left(y^{\frac{m}{n}} \right)' = \frac{m}{n}\, y^{\frac{m}{n} - 1}}$$

Quotientenregel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \left(-1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(-1 \cdot g(x)^{-2} \cdot g'(x)\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$