Einfache Zahlentheorie

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

Februar 2023

Die Summe ungerader Zahlen

$1 =$

$1 + 3 =$

$1 + 3 + 5 =$

$1 + 3 + 5 + 7 =$

$1 + \ldots + 9 =$

$1 + \ldots + 11 =$

$1 + \ldots + 13 =$

$1 + \ldots + 15 =$

$1 + \ldots + 17 =$

Die Summe ungerader Zahlen

$$
\begin{array}{lcl}
1 & = & 1 \\
1 + 3 & = & 4 \\
1 + 3 + 5 & = & 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 \\
1 + \quad . \; . \; . \quad + 9 & = & 25 \\
1 + \quad . \; . \; . \quad + 11 & = & 36 \\
1 + \quad . \; . \; . \quad + 13 & = & 49 \\
1 + \quad . \; . \; . \quad + 15 & = & 64 \\
1 + \quad . \; . \; . \quad + 17 & = & 81
\end{array}
$$

Die Summe ungerader Zahlen

$$
\begin{array}{lcccc}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1 + 3 & = & 4 & = & 2^2 \\
1 + 3 + 5 & = & 9 & = & 3^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 & = & 4^2 \\
1 + \; . \; . \; . \; + 9 & = & 25 & = & 5^2 \\
1 + \; . \; . \; . \; + 11 & = & 36 & = & 6^2 \\
1 + \; . \; . \; . \; + 13 & = & 49 & = & 7^2 \\
1 + \; . \; . \; . \; + 15 & = & 64 & = & 8^2 \\
1 + \; . \; . \; . \; + 17 & = & 81 & = & 9^2
\end{array}
$$

Gibt es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen dem letzten Summanden und der Basis der Quadratzahl ?

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + \;...\; + 9 = 25 = 5^2$$
$$1 + \;...\; + 11 = 36 = 6^2$$
$$1 + \;...\; + 13 = 49 = 7^2$$
$$1 + \;...\; + 15 = 64 = 8^2$$
$$1 + \;...\; + 17 = 81 = 9^2$$

Gibt es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen dem letzten Summanden und der Basis der Quadratzahl ?

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + \;...\; + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + \;...\; + 11 = 36 = 6^2$$

$$1 + \;...\; + 13 = 49 = 7^2$$

$$1 + \;...\; + 15 = 64 = 8^2$$

$$1 + \;...\; + 17 = 81 = 9^2$$

Gibt es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen dem letzten Summanden und der Basis der Quadratzahl ?

$$1 + \;.\;.\;.\; + 9 = 25 = 5^2$$

$+ \; 1 \; : \; 2$

$$1 + \;.\;.\;.\; + 11 = 36 = 6^2$$

$+ \; 1 \; : \; 2$

$$1 + \;.\;.\;.\; + 13 = 49 = 7^2$$

$+ \; 1 \; : \; 2$

$$1 + \;.\;.\;.\; + 15 = 64 = 8^2$$

$+ \; 1 \; : \; 2$

$$1 + \;.\;.\;.\; + 17 = 81 = 9^2$$

$+ \; 1 \; : \; 2$

Vermutung :

Für jeder ungerade Zahl u gilt die Formel

$$1 + \quad . \; . \; . \quad + u \qquad = \qquad\qquad = \qquad \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \quad .$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$+ \;\; 1 \;\; : \;\; 2$

Wie kann man eine Aussage oder Formel für unendlich viele ungerade Zahlen beweisen ?

Ist das überhaupt möglich ?

Vermutung :

Für jede ungerade Zahl u gilt die Formel

$$1 + \quad . \; . \; . \quad + u = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 .$$

Wie kann man eine Aussage oder Formel für unendlich viele ungerade Zahlen beweisen ?

Ist das überhaupt möglich ?

Ja, es ist möglich ! Und zwar folgt der Beweis dem **Dominoeffekt** !

Der **Domino Day** war eine jährliche Veranstaltung von 1998 bis 2009 (mit Ausnahme 2003), die unter Begleitung des Fernsehsenders RTL stattfand und bei der jedes Mal versucht wurde, einen neuen Weltrekord an gefallenen Steinen in einer Domino-Kettenreaktion, dem sogenannten **Dominoeffekt**, aufzustellen.

[Domino Day – Wikipedia]

Unter welchen Bedingungen fallen alle Dominosteine ?

(1) Der Stein mit Nummer 1 muss fallen !

(2) Wenn der Stein mit Nummer n fällt, muss auch der Stein mit der Nummer n+1 fallen !

Übersetzt auf den mathematischen Beweis der Formel

$$1 + \quad . \; . \; . \quad + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2} \right)^2 \qquad \text{für jede ungerade Zahl } u$$

heißt dies :

(1) Die Formel muss für **u = 1** richtig sein !

(2) Wenn die Formel für irgend eine ungerade Zahl **u** richtig ist, muss man zeigen, dass sie auch für die nächste ungerade Zahl, also für **u+2** , richtig ist !

Beweis der Formel

$$1 + \quad . \; . \; . \quad + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2$$ **für jede ungerade Zahl u**

nach dem Dominoeffekt :

(1) Die Formel ist richtig für **u = 1** , denn $1 \quad = \quad \left(\frac{1+1}{2}\right)^2$!

(2) Angenommen, die Formel ist richtig für irgend eine ungerade Zahl **u** , also $1 + \quad . \; . \; . \quad + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2$.

Dann zeigt man, dass die Formel auch richtig ist für **u+2** :

$$1 + \quad . \; . \; . \quad + u \; + \; u+2 \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \; + \; u+2$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + u{+}2$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{(u+1)^2}{4} + \frac{4(u+2)}{4}$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{(u+1)^2 + 4(u+2)}{4}$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{u^2 + 2u + 1 + 4u + 8}{4}$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{u^2 + 6u + 9}{4}$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{(u+3)^2}{2^2}$$

$$1 + \ldots + u + u{+}2 = \frac{(u{+}2 + 1)^2}{2^2}$$

$$1 + \ . \ . \ . \ + u + u{+}2 = \frac{(u{+}2 + 1)^2}{2^2}$$

$$1 + \ . \ . \ . \ + u + u{+}2 = \left(\frac{u{+}2 + 1}{2}\right)^2$$

Die Bedingungen des „Dominoeffekts“ sind demnach erfüllt, also ist die Formel $1 + \ . \ . \ . \ + u = \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2$ für alle ungeraden Zahlen u richtig !

q.e.d.

Die Summe gerader Zahlen

$$2 =$$

$$2 + 4 =$$

$$2 + 4 + 6 =$$

$$2 + 4 + 6 + 8 =$$

$$2 + \ldots + 10 =$$

$$2 + \ldots + 12 =$$

$$2 + \ldots + 14 =$$

$$2 + \ldots + 16 =$$

$$2 + \ldots + 18 =$$

Die Summe gerader Zahlen

2	$=$	2
$2 + 4$	$=$	6
$2 + 4 + 6$	$=$	12
$2 + 4 + 6 + 8$	$=$	20
$2 + \ldots + 10$	$=$	30
$2 + \ldots + 12$	$=$	42
$2 + \ldots + 14$	$=$	56
$2 + \ldots + 16$	$=$	72
$2 + \ldots + 18$	$=$	90

Die Summe gerader Zahlen

$$\begin{array}{lcrcl}
2 & = & 2 & = & 1 \cdot 2 \\
2 + 4 & = & 6 & = & 2 \cdot 3 \\
2 + 4 + 6 & = & 12 & = & 3 \cdot 4 \\
2 + 4 + 6 + 8 & = & 20 & = & 4 \cdot 5 \\
2 + \;\ldots\; + 10 & = & 30 & = & 5 \cdot 6 \\
2 + \;\ldots\; + 12 & = & 42 & = & 6 \cdot 7 \\
2 + \;\ldots\; + 14 & = & 56 & = & 7 \cdot 8 \\
2 + \;\ldots\; + 16 & = & 72 & = & 8 \cdot 9 \\
2 + \;\ldots\; + 18 & = & 90 & = & 9 \cdot 10
\end{array}$$

Gibt es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen dem letzten Summanden und den Fakroren des Produkts ?

$$2 + \;...\; + 10 = 30 = 5 \cdot 6$$

$$2 + \;...\; + 12 = 42 = 6 \cdot 7$$

$$2 + \;...\; + 14 = 56 = 7 \cdot 8$$

$$2 + \;...\; + 16 = 72 = 8 \cdot 9$$

$$2 + \;...\; + 18 = 90 = 9 \cdot 10$$

Gibt es einen rechnerischen Zusammenhang zwischen dem letzten Summanden und den Fakroren des Produkts ?

$$2 + \;...\; + 10 = 30 = 5 \cdot 6 \qquad (30 : 2)$$

$$2 + \;...\; + 12 = 42 = 6 \cdot 7 \qquad (42 : 2)$$

$$2 + \;...\; + 14 = 56 = 7 \cdot 8 \qquad (56 : 2)$$

$$2 + \;...\; + 16 = 72 = 8 \cdot 9 \qquad (72 : 2)$$

$$2 + \;...\; + 18 = 90 = 9 \cdot 10 \qquad (90 : 2)$$

Vermutung :

$$2 + \;...\; + g = \quad = \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right) \qquad (: 2)$$

Beweis der Formel

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g \quad = \quad \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right)$$ **für jede gerade Zahl g**

nach dem Dominoeffekt :

(1) Die Formel ist richtig für **g = 2** , denn $2 \quad = \quad \frac{2}{2}\left(\frac{2}{2}+1\right)$!

(2) Angenommen, die Formel ist richtig für irgend eine gerade Zahl **g** , also $2 + \quad . \; . \; . \quad + g \quad = \quad \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right)$.

Dann zeigt man, dass die Formel auch richtig ist für **g+2** :

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 \quad = \quad \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right) + g+2$$

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 \;=\; \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2}+1\right) + g+2$$

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 \;=\; \frac{g^2}{4} + \frac{g}{2} + g + 2$$

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 \;=\; \frac{g^2}{4} + \frac{2g}{4} + \frac{4g}{4} + \frac{8}{4}$$

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 \;=\; \frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$$

Wie soll jetzt auf der rechten Seite der Term $\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right)$ entstehen ?

Wie versuchen den umgekehrten Weg, wir versuchen aus dem Term $\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right)$ den Term $\frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$ entstehen zu lassen !

Wie versuchen den umgekehrten Weg, wir versuchen aus dem Term $\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right)$ den Term $\frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$ entstehen zu lassen !

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{(g+2)^2}{4} + \frac{g+2}{2}$$

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{(g+2)^2}{4} + \frac{2g+4}{4}$$

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{(g+2)^2 + 2g + 4}{4}$$

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{g^2 + 4g + 4 + 2g + 4}{4}$$

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$$

Hat funktioniert !

$$\frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right) = \frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$$ **Hat funktioniert !**

Aus der Zeile

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 = \frac{g^2 + 2g + 4g + 8}{4}$$

folgt also die Zeile

$$2 + \quad . \; . \; . \quad + g + g+2 = \frac{g+2}{2}\left(\frac{g+2}{2}+1\right)$$

Die Formel ist damit für alle geraden Zahlen **g** richtig !

q.e.d.

Die Summe natürlicher Zahlen

1. Fall : Der letzte Summand ist ungerade

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + g + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \quad + \quad \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2} + 1\right)$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + u - 1 + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \quad + \quad \frac{u - 1}{2}\left(\frac{u - 1}{2} + 1\right)$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + u - 1 + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \quad + \quad \frac{u - 1}{2}\left(\frac{u - 1}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + u - 1 + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \quad + \quad \frac{u - 1}{2}\left(\frac{u - 1 + 2}{2}\right)$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + u - 1 + u \quad = \quad \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2 \quad + \quad \frac{u - 1}{2}\left(\frac{u + 1}{2}\right)$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \frac{u-1}{2}\left(\frac{u+1}{2}\right)$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{(u+1)^2}{4} + \frac{(u-1)(u+1)}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{(u+1)^2 + (u-1)(u+1)}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{u^2 + 2u + 1 + u^2 - 1}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{2u^2 + 2u}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{u^2 + u}{2}$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 \; ... \; + u - 1 + u = \frac{u(u+1)}{2}}$$

Die Summe natürlicher Zahlen

2. Fall : Der letzte Summand ist gerade

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + u + g = \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2} + 1\right) + \left(\frac{u + 1}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + g - 1 + g = \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2} + 1\right) + \left(\frac{g - 1 + 1}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + g - 1 + g = \frac{g}{2}\left(\frac{g}{2} + 1\right) + \left(\frac{g}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + g - 1 + g = \frac{g^2}{4} + \frac{g}{2} + \frac{g^2}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \; ... \; + g - 1 + g = \frac{g^2}{4} + \frac{2g}{4} + \frac{g^2}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + g - 1 + g \quad = \quad \frac{g^2}{4} + \frac{2g}{4} + \frac{g^2}{4}$$

$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + g - 1 + g \quad = \quad \frac{2g^2 + 2g}{4}$$

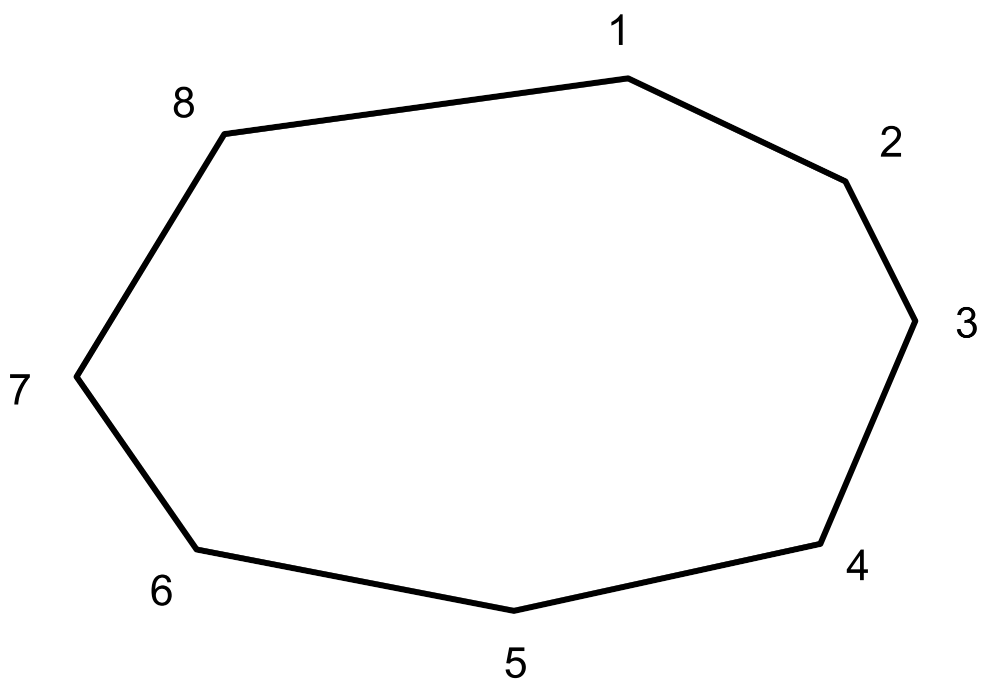
$$1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + g - 1 + g \quad = \quad \frac{g^2 + g}{2}$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + g - 1 + g \quad = \quad \frac{g(g+1)}{2}}$$

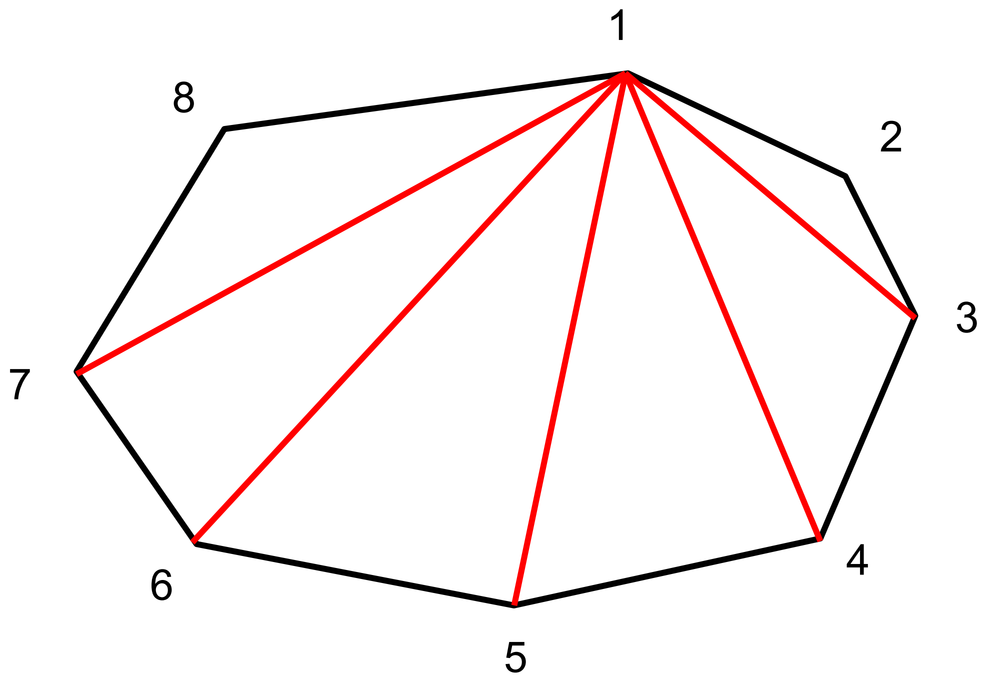
Allgemein :

$$\boxed{1 + 2 + 3 \quad . \; . \; . \quad + n - 1 + n \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{für jede natürliche Zahl } n$$

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)

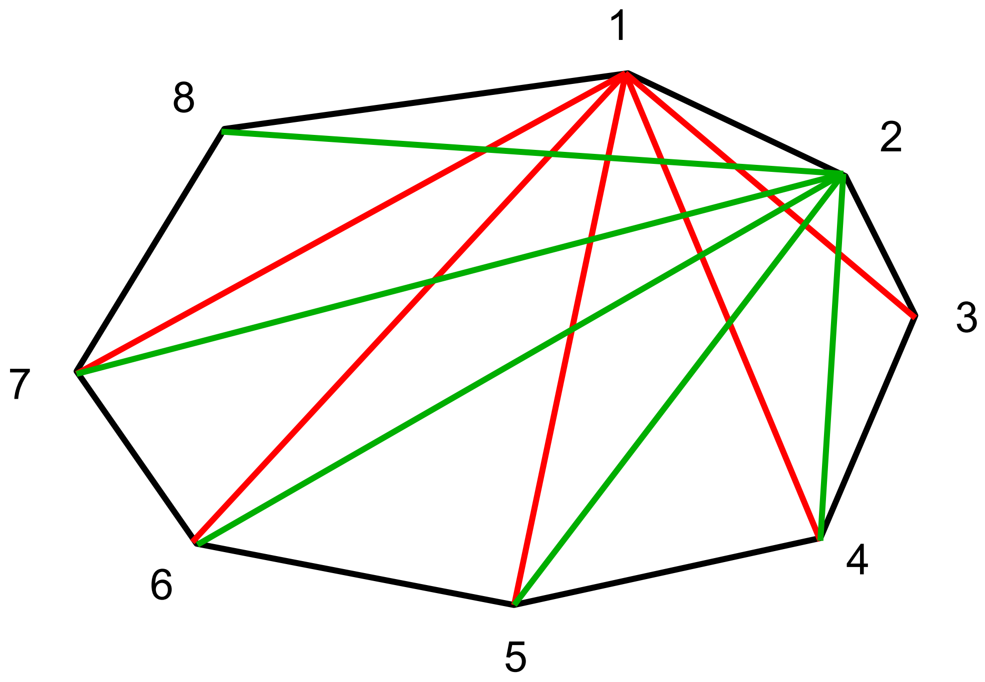


Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



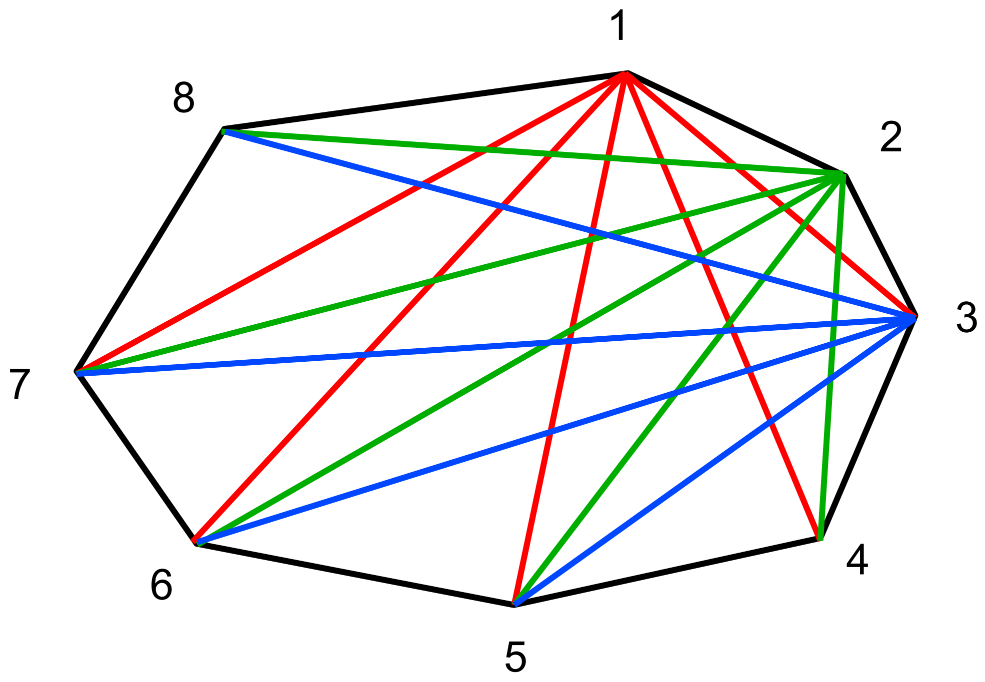
5

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



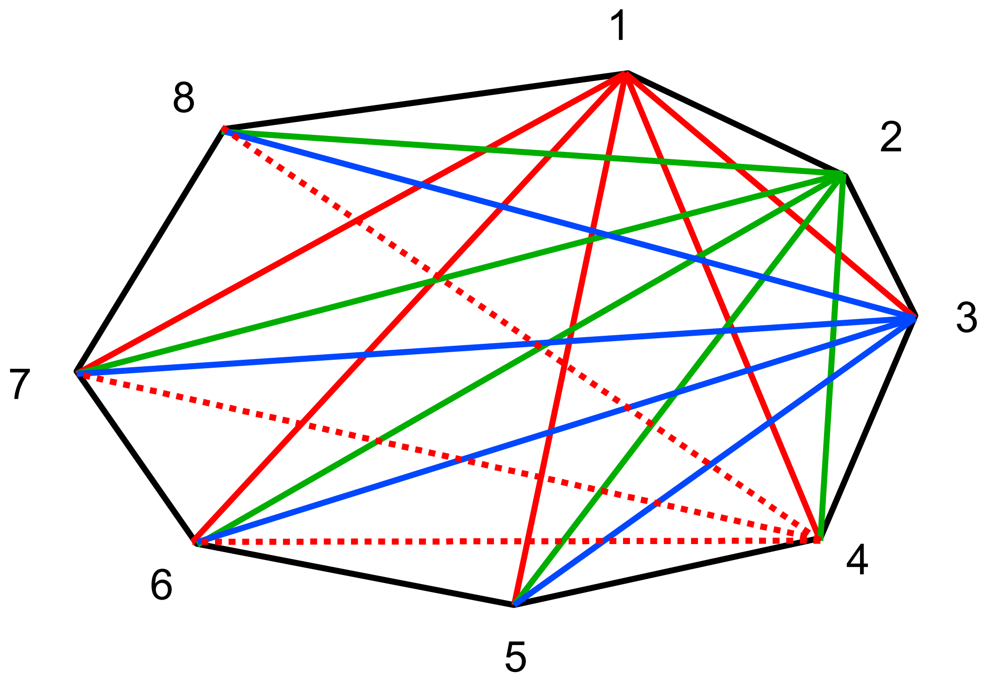
5 + 5

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



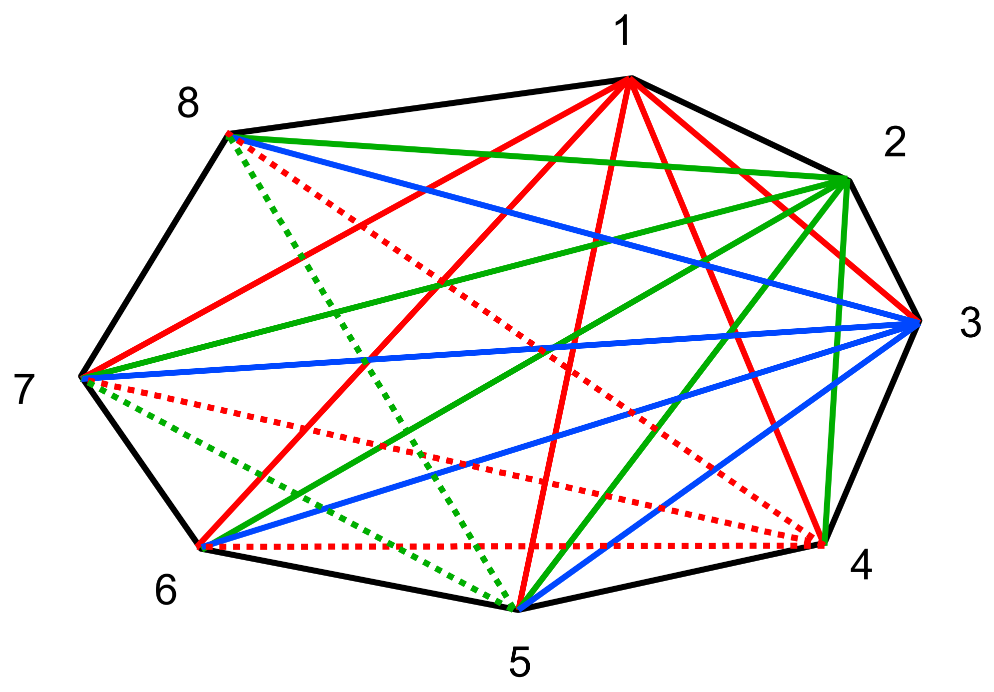
$\underline{5} + \underline{5} + \underline{4}$

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



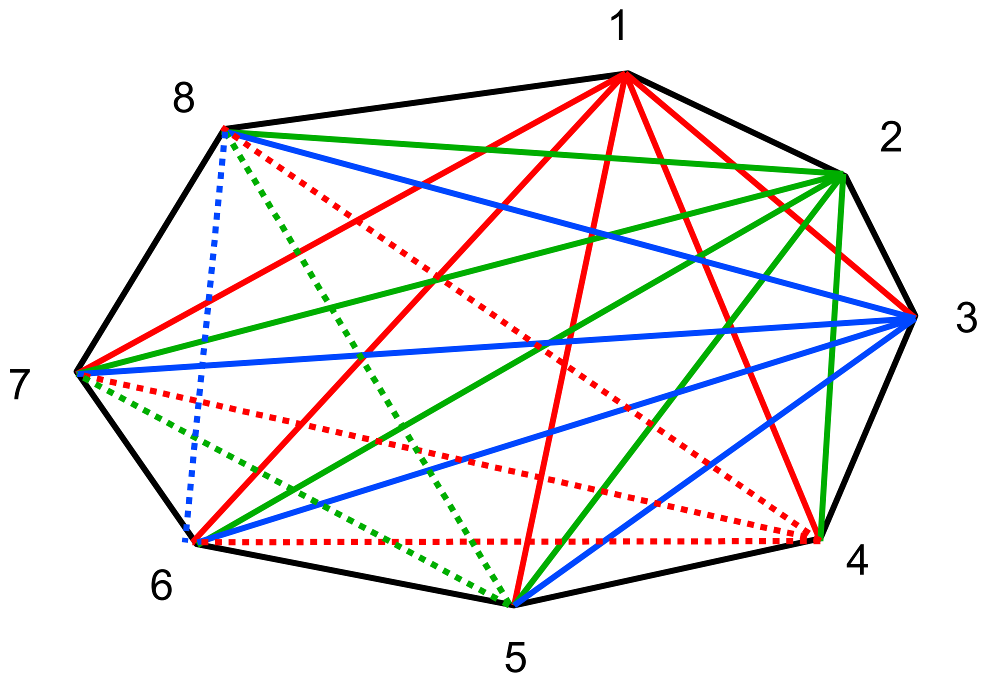
$5 + 5 + 4 + 3$

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



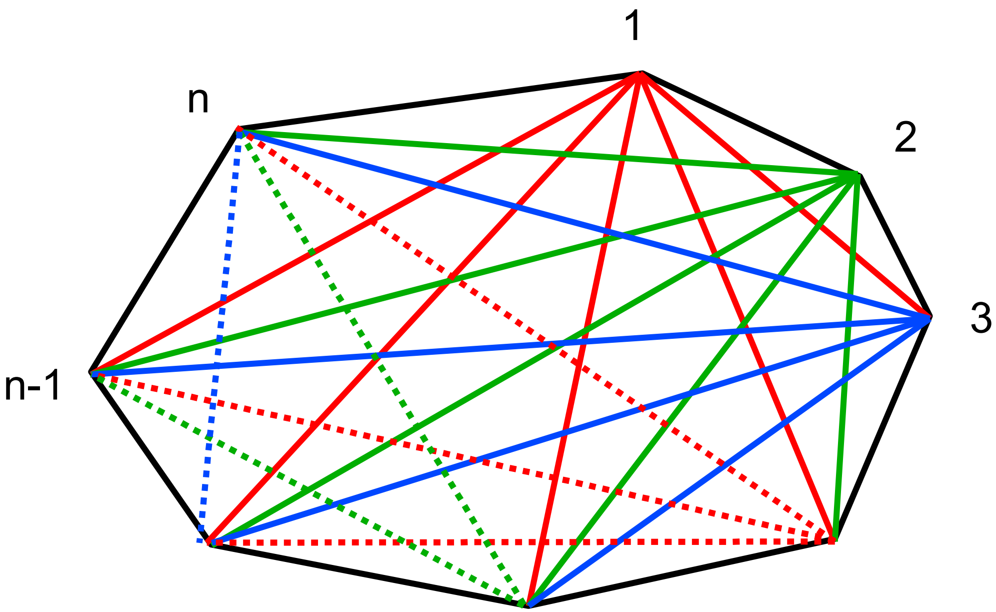
5 + 5 + 4 + 3 + 2

Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck (n = 8)



$$5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5 + \frac{5 \cdot (5+1)}{2} = 20$$

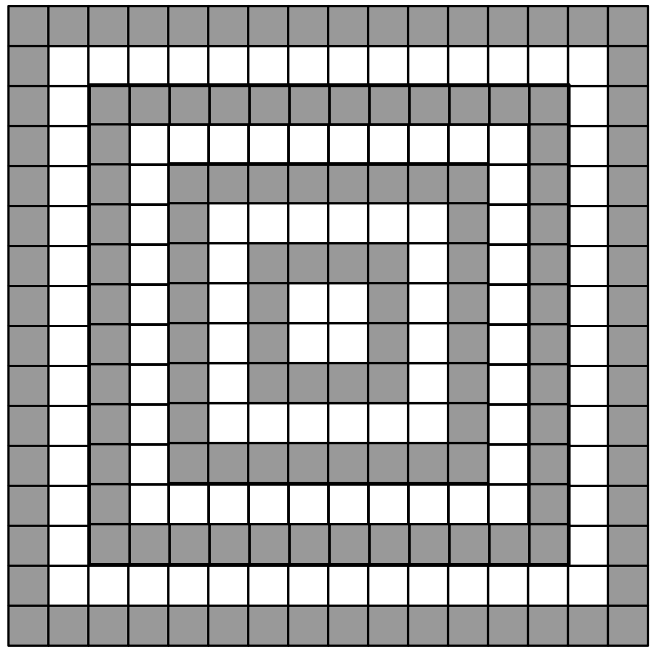
Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck



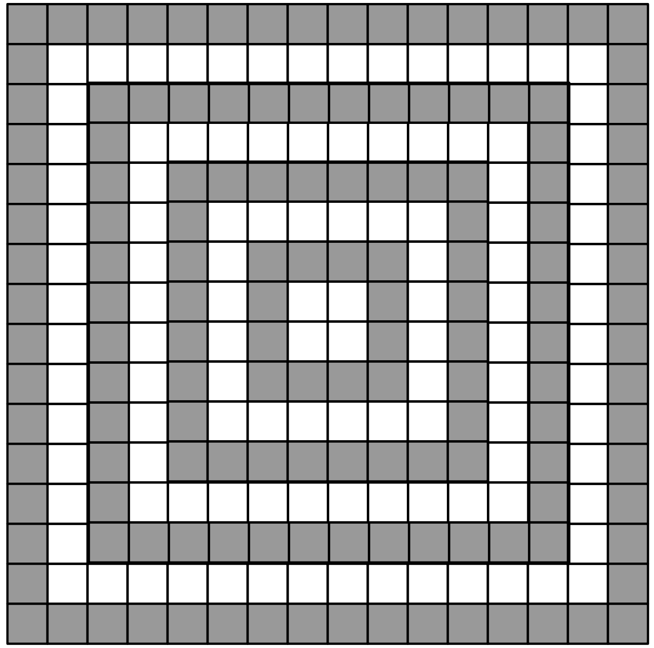
$$n-3 \;+\; n-3 \;+\; (n-4) \;+\; \ldots \;+\; 1 \;=\; n-3 \;+\; \frac{(n-3)\cdot(n-2)}{2} \;=\; \frac{n(n-3)}{2}$$

Anwendungsaufgabe

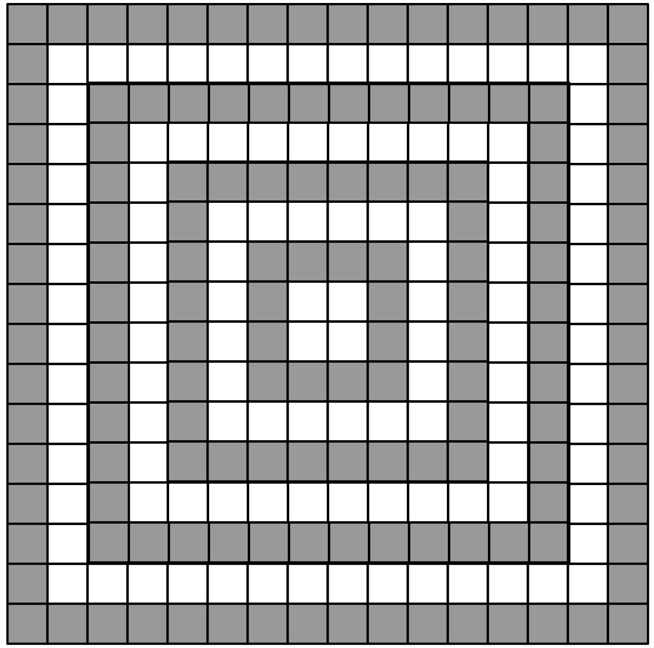
Ein quadratischer Platz soll durch weiße und graue quadratische Platten belegt werden, so dass ein „Ringmuster“ aus jeweils 5 Ringen entsteht .
Wie viele weiße, wie viele graue und wie viele Platten benötigt man insgesamt ?



Ring		Platten
1	w	4
2	g	
3	w	
4	g	
5	w	
6	g	
7	w	
8	g	
9	w	
10	g	

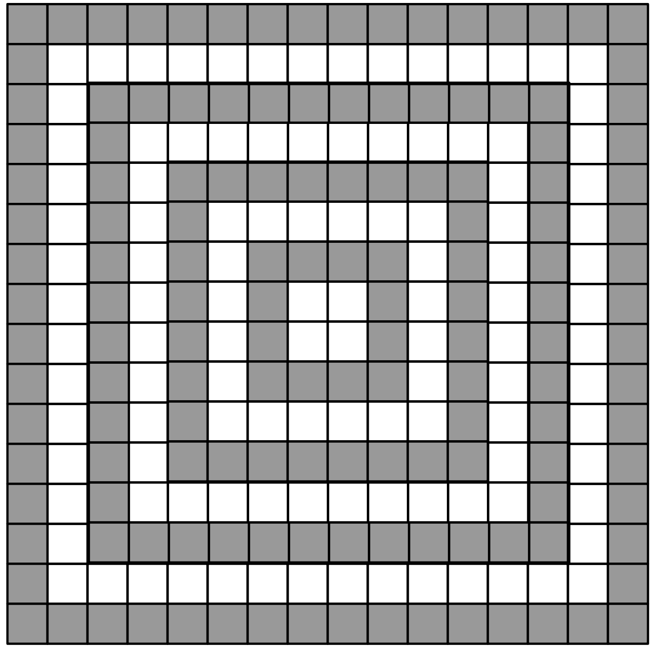


Ring		**Platten**
1	w	4
2	g	12
3	w	20
4	g	28
5	w	36
6	g	44
7	w	52
8	g	60
9	w	68
10	g	76

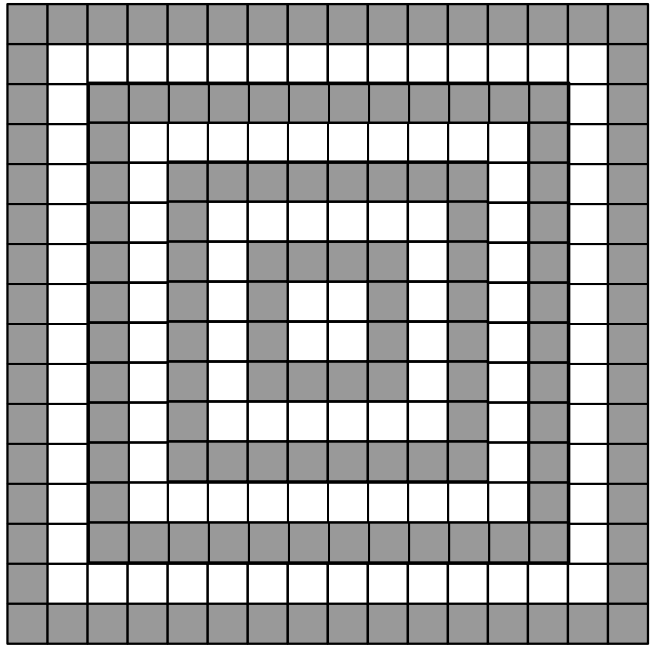


Die Anzahl der Platten wächst mit jedem Ring immer um 8 !

Ring		Platten		
1	w	4	=	4
2	g	12	=	$4 + 1 \cdot 8$
3	w	20	=	$4 + 2 \cdot 8$
4	g	28	=	$4 + 3 \cdot 8$
5	w	36	=	
6	g	44	=	
7	w	52	=	
8	g	60	=	
9	w	68	=	
10	g	76	=	



Ring		Platten		
1	w	4	=	4
2	g	12	=	$4 + 1 \cdot 8$
3	w	20	=	$4 + 2 \cdot 8$
4	g	28	=	$4 + 3 \cdot 8$
5	w	36	=	$4 + 4 \cdot 8$
6	g	44	=	$4 + 5 \cdot 8$
7	w	52	=	$4 + 6 \cdot 8$
8	g	60	=	$4 + 7 \cdot 8$
9	w	68	=	$4 + 8 \cdot 8$
10	g	76	=	$4 + 9 \cdot 8$ +
			=	

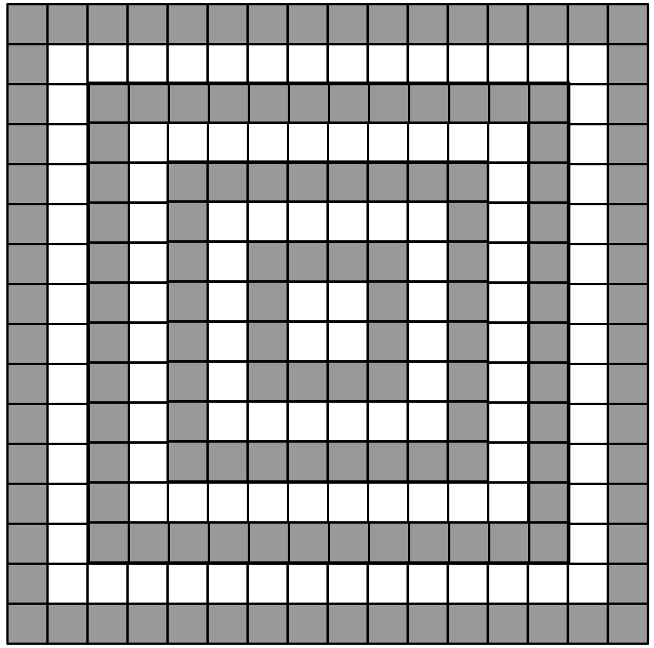


Gesamtzahl der Platten

Ring		**Platten**
1	w	$4 = 4$
2	g	$12 = 4 + 1 \cdot 8$
3	w	$20 = 4 + 2 \cdot 8$
4	g	$28 = 4 + 3 \cdot 8$
5	w	$36 = 4 + 4 \cdot 8$
6	g	$44 = 4 + 5 \cdot 8$
7	w	$52 = 4 + 6 \cdot 8$
8	g	$60 = 4 + 7 \cdot 8$
9	w	$68 = 4 + 8 \cdot 8$
10	g	$76 = 4 + 9 \cdot 8 \quad +$

$$= 10 \cdot 4 + (1+2+3+ \ldots +9) \cdot 8$$

Gesamtzahl der Platten



Gesamtzahl der Platten bei mehr als 10 Ringen

Ringe	**Platten**	
10	$= 10 \cdot 4 + (1+2+3+ \ldots +9) \cdot 8$	Gesamtzahl der Platten
11	$= 11 \cdot 4 + (1+2+3+ \ldots +10) \cdot 8$	
12	$= 12 \cdot 4 + (1+2+3+ \ldots +11) \cdot 8$	
.		
.		
.		
20	$= 20 \cdot 4 + (1+2+3+ \ldots +19) \cdot 8$	

Gesamtzahl der Platten bei n Ringen

Ringe	**Platten**
10	$= 10 \cdot 4 + (1+2+3+ \; ... \; +9) \cdot 8$
11	$= 11 \cdot 4 + (1+2+3+ \; ... \; +10) \cdot 8$
12	$= 12 \cdot 4 + (1+2+3+ \; ... \; +11) \cdot 8$
.	
.	
.	
20	$= 20 \cdot 4 + (1+2+3+ \; ... \; +19) \cdot 8$
n	$= n \cdot 4 + (1+2+3+ \; ... \; +(n-1)) \cdot 8$

Gesamtzahl der Platten bei n Ringen

Ringe	Platten
n	$n \cdot 4 + \left(1+2+3+ \ \ldots \ +(n-1)\right) \cdot 8$
n	$n \cdot 4 + \dfrac{(n-1)n}{2} \cdot 8$
n	$n \cdot 4 + (n-1)n \cdot 4$
n	$n \cdot 4 \cdot (1 + n-1)$
n	$n \cdot 4 \cdot n$
n	$\boxed{4n^2}$

Anzahl der grauen Platten bei n Ringen

Ringe	graue Platten
n	$\frac{n}{2}\cdot 4 + \left(1+3+\ \ldots\ +(n-1)\right)\cdot 8$
n	$\frac{n}{2}\cdot 4 + \left(\frac{n-1\ +\ 1}{2}\right)^2\cdot 8$
n	$\frac{n}{2}\cdot 4 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\cdot 8$
n	$\frac{n}{2}\cdot 4 + \frac{n^2}{4}\cdot 8$
n	$2n + 2n^2$
n	$\boxed{2n(n+1)}$

Anzahl der weißen Platten bei n Ringen

Ringe	**weiße Platten**
n	$4n^2 - 2n(n+1)$
n	$4n^2 - 2n^2 - 2n$
n	$2n^2 - 2n$
n	$\boxed{2n(n-1)}$

Arithmetische Folgen und Reihen

Die Zahlenfolge, welche bei der vorigen Anwendungsaufgabe die Anzahl der Platten in jedem Ring angibt, ist gegeben durch :

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 4 + 1 \cdot 8$$

$$a_3 = 4 + 2 \cdot 8$$

$$a_3 = 4 + 3 \cdot 8$$

.

.

.

$$\boxed{a_n = 4 + (n-1)8} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$a_1 = 4$ **Startzahl**

$d = 8$ **Zuwachs**

Arithmetische Folgen und Reihen

Die Zahlenfolge $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$, $n \in \mathbb{N}$

heißt **Arithmetische Folge** mit **Startzahl** a_1 und **Zuwachs** d .

Addiert man eine Arithmetische Folge, so erhält man die entsprechende **Arithmetische Reihe** s_n , $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_1+1d + a_1+2d + a_1+3d + . . . + a_1+(n-1)d$$

$$s_n = na_1 + \left(1+2+...+(n-1)\right)d$$

$$\boxed{s_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{s_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = \frac{2na_1 + (n-1)nd}{2}$$

$$s_n = \frac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2}$$

$$s_n = \frac{n\left(a_1 + a_1 + (n-1)d\right)}{2}$$

$$s_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2}$$

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Multiplikative Zahlzerlegungen

1	=	1	11	=	11
2	=	2	12	=	$2 \cdot 2 \cdot 3$
3	=	3	13	=	13
4	=	$2 \cdot 2$	14	=	$2 \cdot 7$
5	=	5	15	=	$3 \cdot 5$
6	=	$2 \cdot 3$	16	=	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
7	=	7	17	=	17
8	=	$2 \cdot 2 \cdot 2$	18	=	$2 \cdot 3 \cdot 3$
9	=	$3 \cdot 3$	19	=	19
10	=	$2 \cdot 5$	20	=	$2 \cdot 2 \cdot 5$

Multiplikative Zahlzerlegungen

1	=	1	11	=	11
2	=	2	12	=	$2 \cdot 2 \cdot 3$
3	=	3	13	=	13
4	=	$2 \cdot 2$	14	=	$2 \cdot 7$
5	=	5	15	=	$3 \cdot 5$
6	=	$2 \cdot 3$	16	=	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
7	=	7	17	=	17
8	=	$2 \cdot 2 \cdot 2$	18	=	$2 \cdot 3 \cdot 3$
9	=	$3 \cdot 3$	19	=	19
10	=	$2 \cdot 5$	20	=	$2 \cdot 2 \cdot 5$

Zahlen, die keine multiplikative Zerlegung haben, heißen **Primzahlen** !
Die Zahl 1 wird nicht zu den Primzahlen gezählt !

Primzahlen waren bereits den griechischen Mathematikern vor etwa 2500 Jahren bekannt .

Die Primzahlen im Bereich von 1 bis 20 sind :

2 3 5 7 11 13 17 19

Mir dem sogenannten **Sieb des Eratosthenes** lassen sich alle Primzahlen in einem vorgegebenen Zahlenbereich auffinden .

Eratosthenes (273 – 194 v. Chr.)

Sieb des Eratosthenes
(273 – 194 v. Chr.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Sieb des Eratosthenes
(273 – 194 v. Chr.)

(1) Streiche die 1 .

(2) Streiche alle Vielfachen von 2, außer der 2 !

(3) Streiche alle Vielfachen der 3, außer der 3 !

usw.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Sieb des Eratosthenes
(273 – 194 v. Chr.)

(1) Streiche die 1 .

(2) Streiche alle Vielfachen von 2, außer der 2 !

(3) Streiche alle Vielfachen der 3, außer der 3 !

usw.

Die übrig gebliebenen Zahlen sind Primzahlen !

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Der Mathematiker **Eratosthenes (273 – 194 v. Chr.)** ist vor allem wegen seiner Bestimmung des **Erdumfang** bekannt .

Er wusste, dass die Entfernung der Orte **Alexandria** und **Syene** b = 5000 Stadien betrug (1Stadion = 157,5m). Zur Sommersonnenwende stand die Sonne in Assuan mittags im Zenit, in Alexandria und $\alpha = 7{,}2°$ weniger.

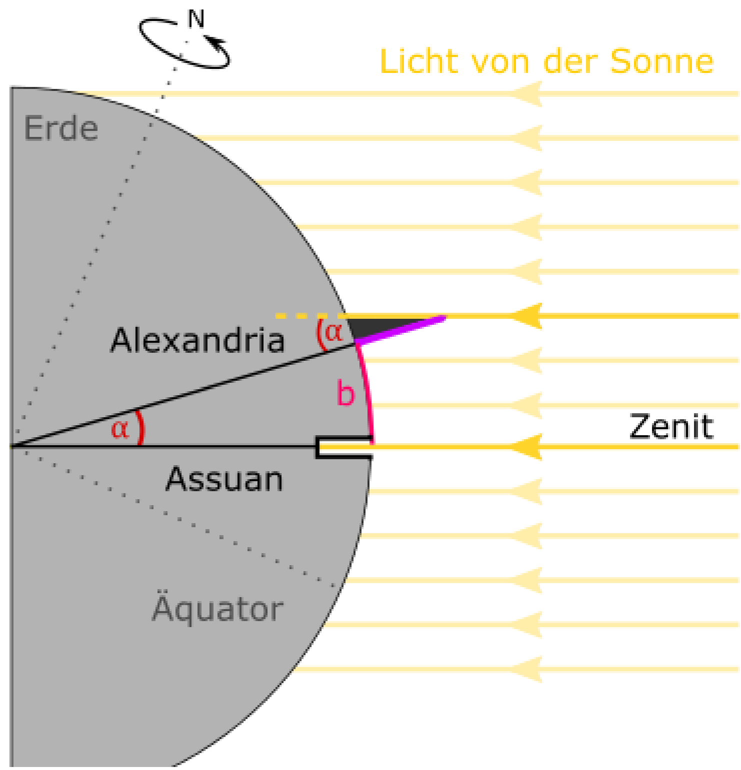
Daraus ergibt sich der **Erdumfang** zu :

$$7{,}2° \mathrel{\hat{=}} 5000$$

$$1° \mathrel{\hat{=}} \frac{5000}{7{,}2}$$

$$360° \mathrel{\hat{=}} \frac{5000}{7{,}2} \cdot 360 = 250000$$

$$250000 \cdot 0{,}1575 \text{ km} = 39375 \text{ km}$$



nach: Erdradius nach ERATOSTHENES | LEIFIphysik

Euklid von Alexandria (3. Jhrt. v. Chr.)

Oxford University Museum of Natural History

Satz des Euklid – Wikipedia

In seinem „Elemente“ genannten Werk, bestehend aus 13 Büchern über Arithmetik und Geometrie, steht der

Satz (von Euklid) :
Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Satz (von Euklid) :
Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Beweis :

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1 \ , \ p_2 \ , \ ... \ , \ p_n$.

Betrachte die Zahl $p := p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$.

1. Fall : p ist eine Primzahl

Dann ist $p > p_1 \ , \ ... \ , \ p_n$ eine neue Primzahl, die nicht in der Liste ist.

2. Fall : p ist eine zusammengesetzte Zahl

Dann ist p ein Produkt mit einem Teiler t_1 . Ist t_1 eine Primzahl, könnte sie nicht in der vorgegebenen Liste stehen, da sie mit dem Produkt $p_1 \cdot ... \cdot p_n$ auch die Zahl $1 = p - p_1 \cdot ... \cdot p_n$ teilen müsste, was ein Widerspruch ist .
Wäre t_1 ein Produkt mit einem Teiler t_2 der eine Primzahl ist , würde sich das Argument wiederholen.
Setzte man diesen Denkprozess fort, erhielte man eine Folge von Teilern t_1 , t_2 , t_3 , … von p . Wenn keiner dieser Teiler eine Primzahl wäre, hätte die Zahl p unendlich viele Teiler, was ebenfalls nicht sein kann !

In beiden Fällen würde die vorgegebene Liste der Primzahlen nicht ausreichen !
Also muss es unendlich viele Primzahlen geben !

q.e.d.