Komplexe Zahlen

Arno Fehringer

September 2022

Nicht jede quadratische Gleichung hat reelle Lösungen !

$$x^2 + px + q = 0$$ **quadratische Gleichung in Normalform**

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + q = 0$$

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$ quadratische Ergänzung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$ binomische Formel

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$ **Lösungsformel**

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$ **Lösungsformel**

Die Wurzel kann im Reellen nur gezogen werden, falls der Radikant $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist !

Im Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ gibt es eine Lösung : $x = -\frac{p}{2}$

Im Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ gibt es zwei Lösungen : $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Lösungen x_1, x_2 hängen von den Koeffizienten p, q der quadratischen Gleichung ab :

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Man kann fragen, ob und wie die Koeffizienten p, q von den Lösungen x_1, x_2 abhängen ?

Hierzu versucht man, die Gleichungen für die Lösungen x_1, x_2 nach p, q umzuformen :

Hierzu versucht man, die Gleichungen für die Lösungen x_1, x_2 nach p, q umzuformen :

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$\boxed{p = -\left(x_1 + x_2\right)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

Nach der 3. binomischen Formel folgt :

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}^{\;2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\boxed{q = x_1 \cdot x_2}$$

Man kann also die Koeffizienten p, q aus den Lösungen x_1, x_2 zurückgewinnen !

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{p = -(x_1 + x_2)}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\boxed{q = x_1 \cdot x_2}$$

Die Gleichungen für die Koeffizienten p, q in Abhängigkeit von den Lösungen x_1 , x_2 gehen auf den französischen Mathematiker **François Viète** oder **Franciscus Viëta (1540 – 1603)** zurück .

Die Gleichungen heißen die **Gleichungen von Viëta !**

[François Viète - Wikipedia](https//de.wikipedia.org/wiki/François_Viète)

https//de.wikipedia.org/wiki/François_Viète

Was kann man nun mit den Gleichungen von Viëta anfangen ?

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{p = -\left(x_1 + x_2\right)}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\boxed{q = x_1 \cdot x_2}$$

Man kann die linke Seite der quadratischen Gleichung anders darstellen :

$$x^2 + px + q = x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 x_2$$

Man kann die linke Seite der quadratischen Gleichung anders darstellen :

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

$$x^2 + px + q = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2$$

$$x^2 + px + q = x(x - x_1) - x_2(x - x_1)$$

$$\boxed{x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)}$$

Die linke Seite der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann mit Hilfe der Lösungen x_1 , x_2 faktorisiert werden, genauer gesagt, sie kann mit Hilfe der Lösungen in Linearfaktoren zerlegt werden .

Dieser Prozess heißt auch **Linearfaktorisierung** !

Was würde geschehen, wenn man nun auch die nicht reellen „Lösungen“ einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als Lösungen zuließe ?

Dann würden die Terme

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

für den Fall, dass der Radikant $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ ist, eine neue Art von Zahlen darstellen !

Wie sehen diese neuen Zahlen konkret aus ?

Dies könnte man anhand von konkreten Beispielen für quadratische Gleichungen herausbekommen !

Konkrete Beispiele zu quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

(1) $p = 0 \ , \ q = 1$

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + 0x + 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - 1} \qquad x_2 = -\frac{0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - 1}$$

$$\underline{x_1 = -\sqrt{-1}} \qquad \underline{x_2 = \sqrt{-1}}$$

(2) $p = -2 \ , \ q = 3$

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 - 2x + 13 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 3} \qquad x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 3}$$

$$\underline{x_1 = 1 - \sqrt{-1}} \qquad \underline{x_2 = 1 + \sqrt{-1}}$$

Konkrete Beispiele zu quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

(3) $p = -4 \;,\; q = 5$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x_2 = -\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5} \qquad x_2 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5}$$

$$\underline{x_1 = 2 - \sqrt{-1}} \qquad \underline{x_2 = 2 + \sqrt{-1}}$$

(4) $p = -6 \;,\; q = 10$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 10} \qquad x_2 = -\frac{-6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 10}$$

$$\underline{x_1 = 3 - \sqrt{-1}} \qquad \underline{x_2 = 3 + \sqrt{-1}}$$

Konkrete Beispiele zu quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$

(5) $p = -6 \;,\; q = 7$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 7} \qquad x_2 = -\frac{-6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 7}$$

$$\underline{x_1 = 3 - \sqrt{-2}} \qquad \underline{x_2 = 3 + \sqrt{-2}}$$

(6) $p = -6 \;,\; q = 6$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x_1 = -\frac{-6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 6} \qquad x_2 = -\frac{-6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 6}$$

$$\underline{x_1 = 3 - \sqrt{-3}} \qquad \underline{x_2 = 3 + \sqrt{-3}}$$

Veränderte Schreibweise des Radikanden

(5) $x_1 = 3 - \sqrt{-2}$ $\qquad$ $x_2 = 3 + \sqrt{-2}$

$x_1 = 3 - \sqrt{2 \cdot (-1)}$ $\qquad$ $x_2 = 3 + \sqrt{2 \cdot (-1)}$

Würde man nach dem **Hankelschen Permanenzprinzip** fordern, dass für die neuen Zahlen die bekannten Wurzelgesetze gälten, würde folgen :

$x_1 = 3 - \sqrt{2}\sqrt{-1}$ $\qquad$ $x_2 = 3 + \sqrt{2}\sqrt{-1}$

[Hermann Hankel, deutscher Mathematiker, 1839 – 1873]

Man kann vermuten, dass die nicht reellen „Lösungen“ von quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ immer die Form

$x_1 = a - b\sqrt{-1}$ $\qquad$ $x_2 = a + b\sqrt{-1}$

haben, wobei a , b bestimmte reelle Zahlen sind !

[Hermann Hankel – Wikipedia](https//de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel)
https//de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel

Definition der komplexen Zahlen

Der Ausdruck $i := \sqrt{-1}$ heißt **imaginäre Einheit** .

Damit gilt : $i^2 = \sqrt{-1}^{\,2}$

$i^2 = -1$

Der Ausdruck $a + bi := a + b\sqrt{-1}$ mit $a , b \in \mathbb{R}$ heißt **komplexe Zahl** .

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet .

$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + bi \text{ mit } a , b \in \mathbb{R} \}$

Wegen $\mathbb{R} = \{ z \mid z = a + 0i \text{ mit } a \in \mathbb{R} \}$ ist $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ enthalten, also Teilmenge von $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Offenbar treten komplexe Lösungen von quadratischen Gleichungen in **konjugiert komplexer Form** auf, also in der Form

$x_1 = a - bi \quad , \quad x_2 = a + bi$.

Zwischenfrage : Gibt es zu je zwei konjugiert komplexen Zahlen auch eine quadratische Gleichung, deren Lösung diese Zahlen sind ?

Hierzu greifen wir die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen wieder auf :

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Seien also die Zahlen $x_1 = a - bi$, $x_2 = a + bi$ gegeben .

Wenn diese Zahlen Lösung einer quadratischen Gleichung sind, müssten sie folgende Form haben :

$$x_1 = a - bi \qquad\qquad x_2 = a + bi$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad\qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wegen $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)(-1)$ und $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\ i$,

so dass

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\ i \qquad\qquad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\ i$$ folgt .

Der Koeffizientenvergleich ergibt :

$$-\frac{p}{2} = a \qquad\qquad \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = b$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt :

$$-\frac{p}{2} = a \qquad \sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2} = b$$

$$p = -2a \qquad q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = b^2$$

$$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2$$

$$q = \left(\frac{-2a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$q = a^2 + b^2$$

Die entsprechende quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = a - bi$, $x_2 = a + bi$ ist die Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2+b^2 = 0 \quad .$$

Das Rechnen in der Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{ \, z \;\mid\; z = a + bi \quad \text{mit} \quad a \, , \, b \in \mathbb{R} \, \}$$

Das Rechen im Komplexen erschließt man aufgrund des **Hankelschen Permanenzprinzips**, also der Forderung, dass für die neuen Zahlen die bekannten Gesetze gelten sollen .

Sind $z_1 = a_1 + b_1 i \;,\; z_2 = a_2 + b_2 i$ komplexe Zahlen, so gilt :

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) i}$$ **Addition**

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i)$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2) i}$$ **Subtraktion**

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 \qquad i^2 = -1$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i}$$

Multiplikation

$$z_1 : z_2 = ?$$

$$z_1 : z_2 = a + bi$$

$$(a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = a + bi$$

$$a_1 + b_1 i = (a + bi) \cdot (a_2 + b_2 i)$$

$$a_1 + b_1 i = (a a_2 - b b_2) + (a b_2 + b a_2) i$$

$$a_1 + b_1 i = (aa_2 - bb_2) + (ab_2 + ba_2)i$$

Koeffizientenvergleich

$$a_1 = aa_2 - bb_2$$
$$b_1 = ab_2 + ba_2$$

$$bb_2 = aa_2 - a_1$$
$$b_1 = ab_2 + ba_2$$

$$bb_2 = aa_2 - a_1$$
$$b_1 b_2 = ab_2^2 + a_2 bb_2$$

$$b_1 b_2 = ab_2^2 + a_2(aa_2 - a_1)$$
$$b_1 b_2 = ab_2^2 + aa_2^2 - a_1 a_2$$

$$b_1 b_2 = a b_2^2 + a a_2^2 - a_1 a_2$$

$$b_1 b_2 = a\left(a_2^2 + b_2^2\right) - a_1 a_2$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = a\left(a_2^2 + b_2^2\right)$$

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$b b_2 = a a_2 - a_1$$

$$b = a\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_2}$$

$$b = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \; \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_2}$$

$$b = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_2}$$

$$b = \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) a_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2} - \frac{a_1}{b_2}$$

$$b = \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) a_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2} - \frac{a_1\left(a_2^2 + b_2^2\right)}{b_2\left(a_2^2 + b_2^2\right)}$$

$$b = \frac{\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) a_2 - a_1\left(a_2^2 + b_2^2\right)}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2}$$

$$b = \frac{a_1 a_2^2 + b_1 b_2 a_2 - a_1 a_2^2 - a_1 b_2^2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2}$$

$$b = \frac{b_1 b_2 a_2 - a_1 b_2^2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2}$$

$$b = \frac{\left(b_1 a_2 - a_1 b_2\right) b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right) b_2}$$

$$b = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = a + bi$$

$$z_1 : z_2 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\ i$$

$$z_1 : z_2 = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\left(a_1 a_2 + b_1 b_2 + \left(b_1 a_2 - a_1 b_2\right) i\right)$$

$$\boxed{z_1 : z_2 = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\left(a_1 a_2 - b_1\left(-b_2\right) + \left(a_1\left(-b_2\right) + b_1 a_2\right) i\right)}$$ **Division**

Kürzere Version für die Definition der Division

$$z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 : z_2 = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners

$$z_1 : z_2 = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)$$

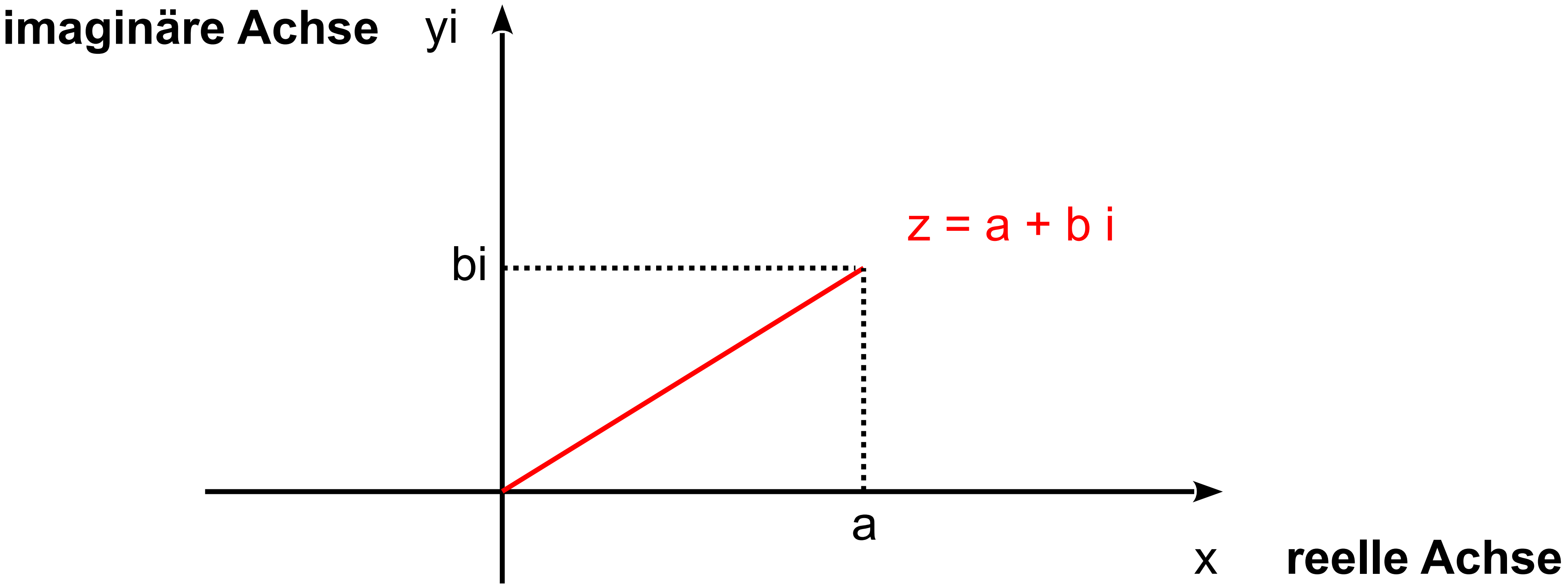
Die Division ist im Wesentlichen eine Multiplikation

$$\boxed{z_1 : z_2 = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \left(a_1 a_2 - b_1 (-b_2) \ + \ (a_1 (-b_2) + b_1 a_2) i \right)}$$

Division

Wie man sieht, sind die Rechenvorschriften für die Multiplikation und Division komplexer Zahlen sehr sperrig im Gegensatz zu den Rechenvorschriften für die Addition und Subtraktion .

Dies ändert sich, wenn man wie der berühmte deutsche Mathematiker **C. F. Gauß (1777 – 1855)** für die komplexen Zahlen eine geometrische Darstellung in der sogenannten **Gaußschen Zahlenebene** wählt :

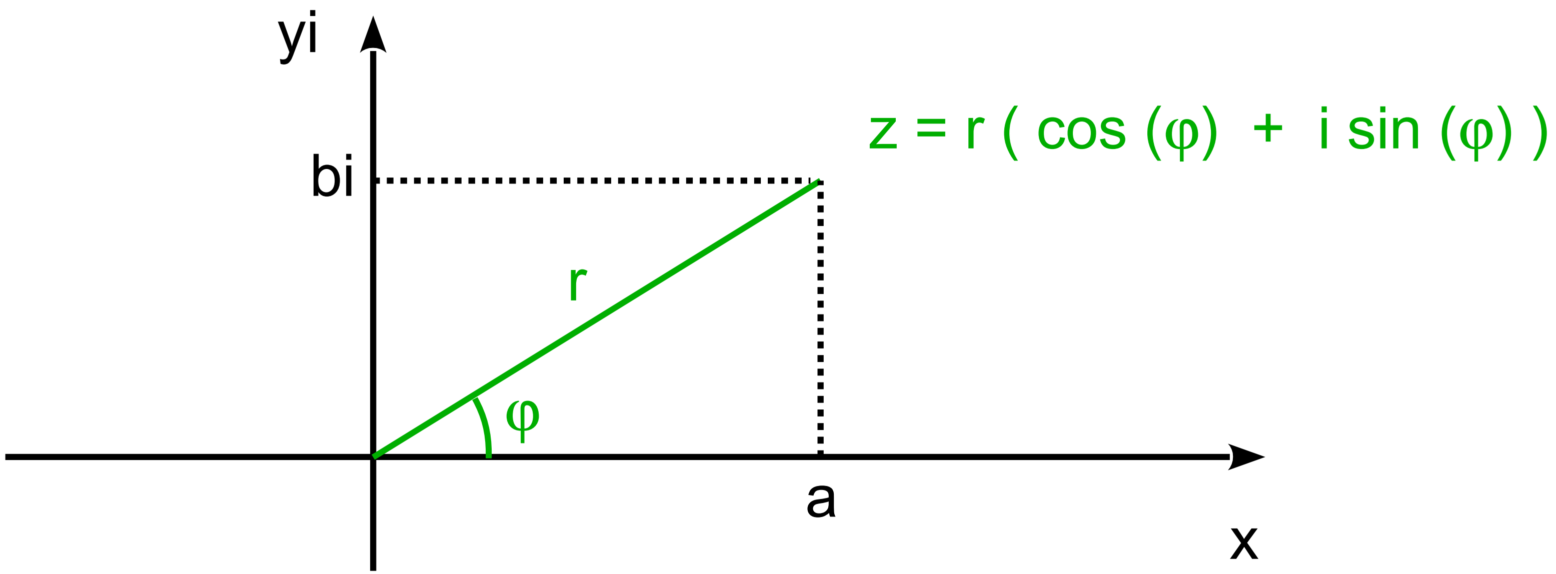


[Carl Friedrich Gauß – Wikipedia](https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauß)

https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauß

Die **Gaußsche Zahlenebene** hat als wesentliche Elemente zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen, die reelle Achse und die imaginäre Achse , ähnlich wie beim **Kartesischen Koordinatensystem** , benannt nach **Cartesius** oder **René Descartes (1596 – 1650)**, einem französischen Mathematiker und Philosophen .
Die Darstellung einer komplexen Zahl in der Form $z = a + bi$ heißt deshalb auch **Kartesische Darstellung** .

Es gibt auch noch die sogenannte **Polardarstellung** in der Form $z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 360°$:



Rene Descartes (1596 – 1650),
frz. Philosoph, Mathematiker, Naturwissenschaftler

https://de.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

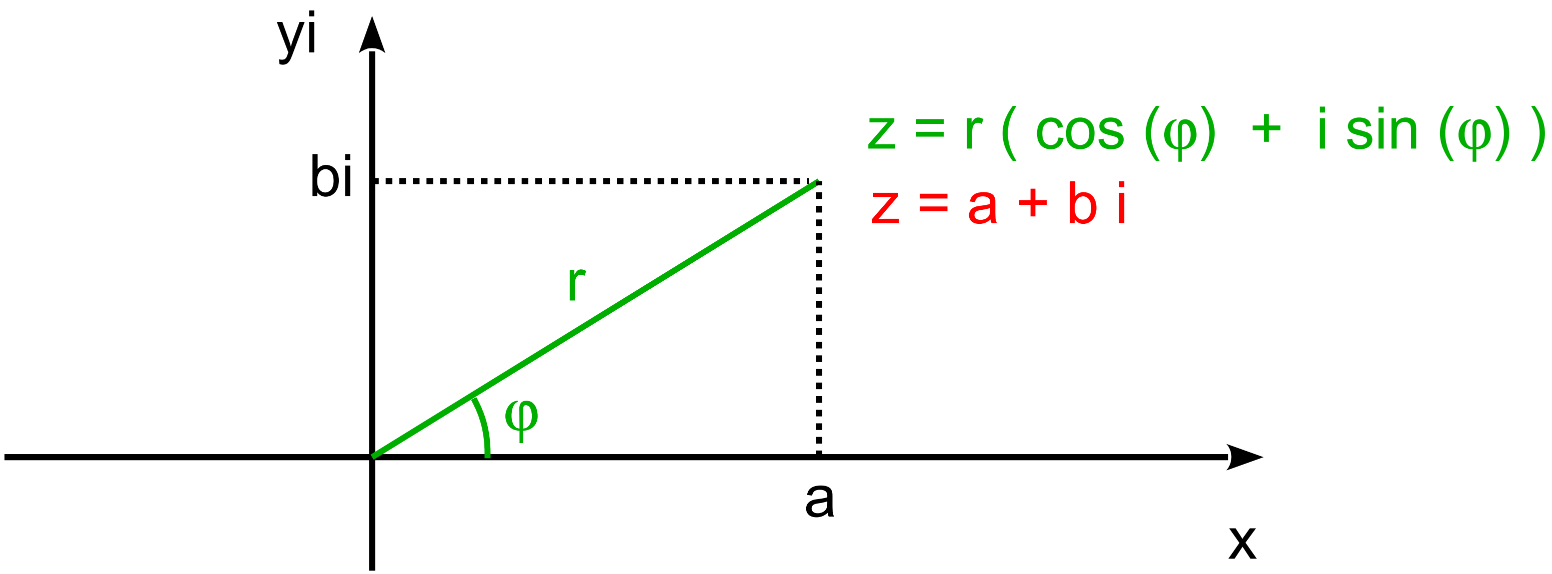
Zusammenhang zwischen kartesischer und Polardarstellung

$$z = a + bi \qquad\qquad z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{b}{a} \qquad\qquad z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad\qquad a = r\cos(\varphi) \qquad b = r\sin(\varphi)$$

Die Zahl r heißt Länge oder Radius von z, die Zahl φ ist der Winkel !



In der Polardarstellung ist die Multiplikation „einfacher" !

$$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad\qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\underline{z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)} \qquad\qquad \underline{z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)}$$

$$z_1 z_2 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right) r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \left(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\right) i\right)$$

Nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen folgt :

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Der Radius des Produkts zweier komplexer Zahlen ist das Produkt der Radien, der Winkel des Produkts ist die Summe der Winkel !

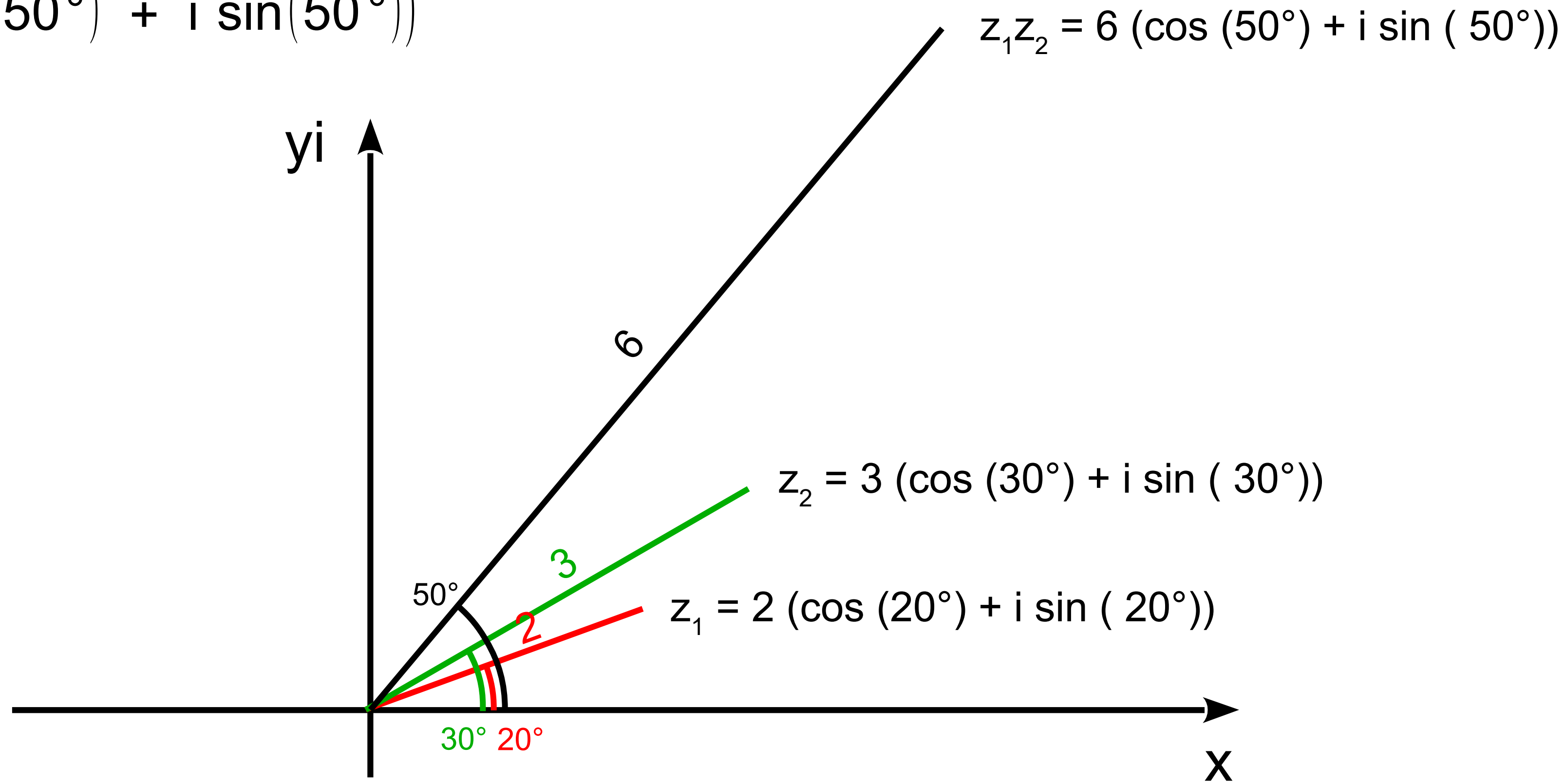
Beispiel zur Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polardarstellung

$$z_1 = 2\left(\cos\left(20°\right) + i\sin\left(20°\right)\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\left(30°\right) + i\sin\left(30°\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 2\left(\cos\left(20°\right) + i\sin\left(20°\right)\right) \cdot 3\left(\cos\left(30°\right) + i\sin\left(30°\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 3\left(\cos\left(20°+30°\right) + i\sin\left(20°+30°\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 6\left(\cos\left(50°\right) + i\sin\left(50°\right)\right)$$



Was bedeuten, geometrisch gesprochen, die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit den Zahlen i und $-i$?

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \qquad i = 1(\cos(90°) + i\sin(90°))$$

$$-i = 1(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$$

$$z \cdot i = r \cdot 1(\cos(\varphi + 90°) + i\sin(\varphi + 90°))$$

Die Zahl $z \cdot i$ erhält man aus der Zahl z durch Drehung um 90° !

$$z \cdot (-i) = r \cdot 1(\cos(\varphi - 90°) + i\sin(\varphi - 90°))$$

Die Zahl $z \cdot (-i)$ erhält man aus der Zahl z durch Drehung um -90° !

Die (reguläre) Kreisteilung

Gegeben sei der Einheitskreis $K_{O;1} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1^2 \}$ in der komplexen Zahlenebene .
Gesucht sind alle Zahlen auf dem Einheitskreis mit $z^3 = 1$!

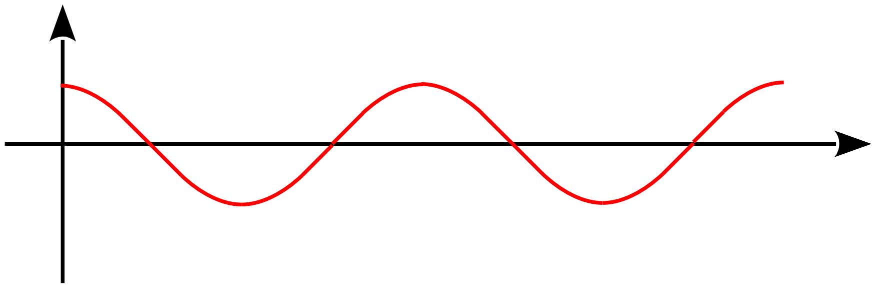
$$z^3 = 1$$

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^3 = 1$$

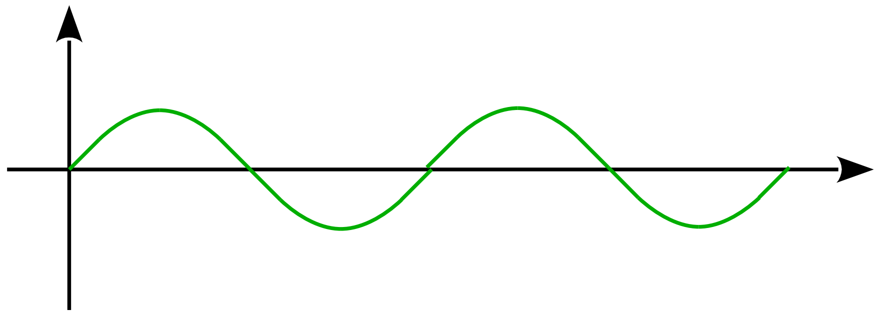
$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = 1$$

$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = 1 + i \cdot 0$$

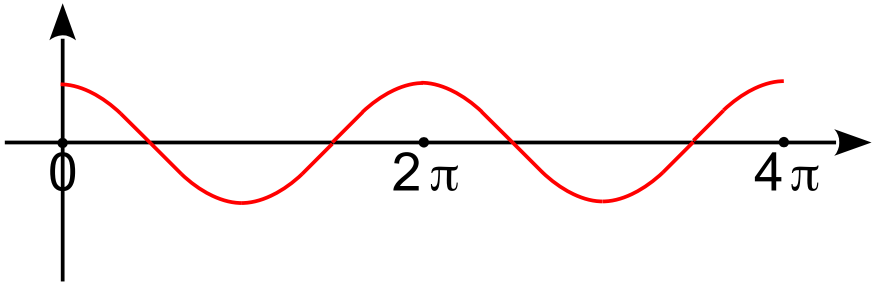
$$\cos(3\varphi) = 1$$



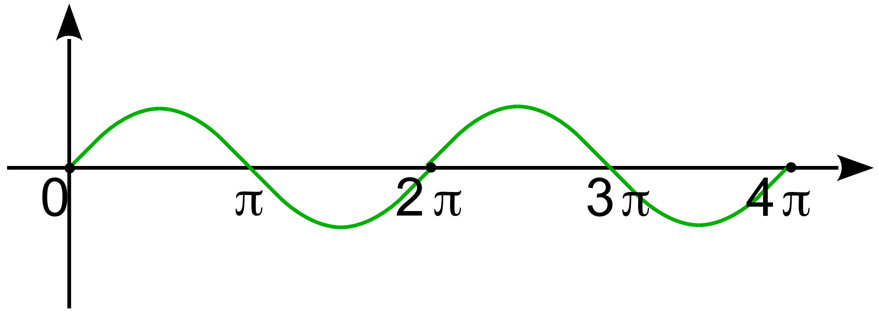
$$\sin(3\varphi) = 0$$



$$\cos(3\varphi) = 1$$



$$\sin(3\varphi) = 0$$



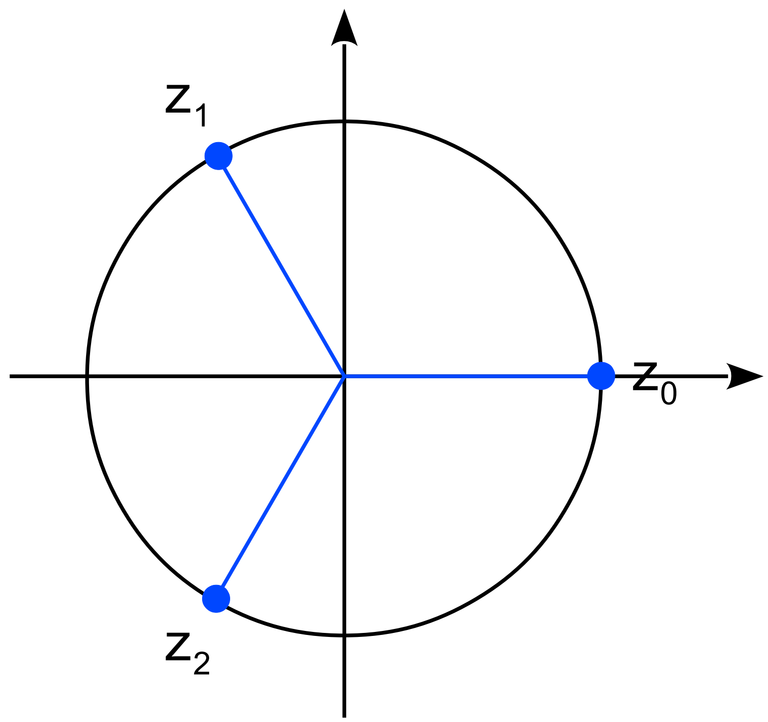
$$3\varphi = 0 \qquad 3\varphi = 2\pi \qquad 3\varphi = 4\pi$$

$$\varphi_0 = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi \qquad \varphi_2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\varphi_0 = 0° \qquad \varphi_1 = 120° \qquad \varphi_2 = 240°$$

$$z_0 = \cos(0°) + i\sin(0°) \qquad z_1 = \cos(120°) + i\sin(120°) \qquad z_1 = \cos(240°) + i\sin(240°)$$

$z_0 = \cos(0°) + i\sin(0°)$ $z_1 = \cos(120°) + i\sin(120°)$ $z_1 = \cos(240°) + i\sin(240°)$



Die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ auf dem Kreis $K_{O;1}$ stellen die reguläre Dreiteilung des Kreises dar !

Die Lösung der Gleichung $z^3 = A\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$

$$z^3 = A\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$$

$$\left(r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)\right)^3 = A\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$$

$$r^3\left(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)\right) = A\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$$

$$r^3 = A \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{A}$$

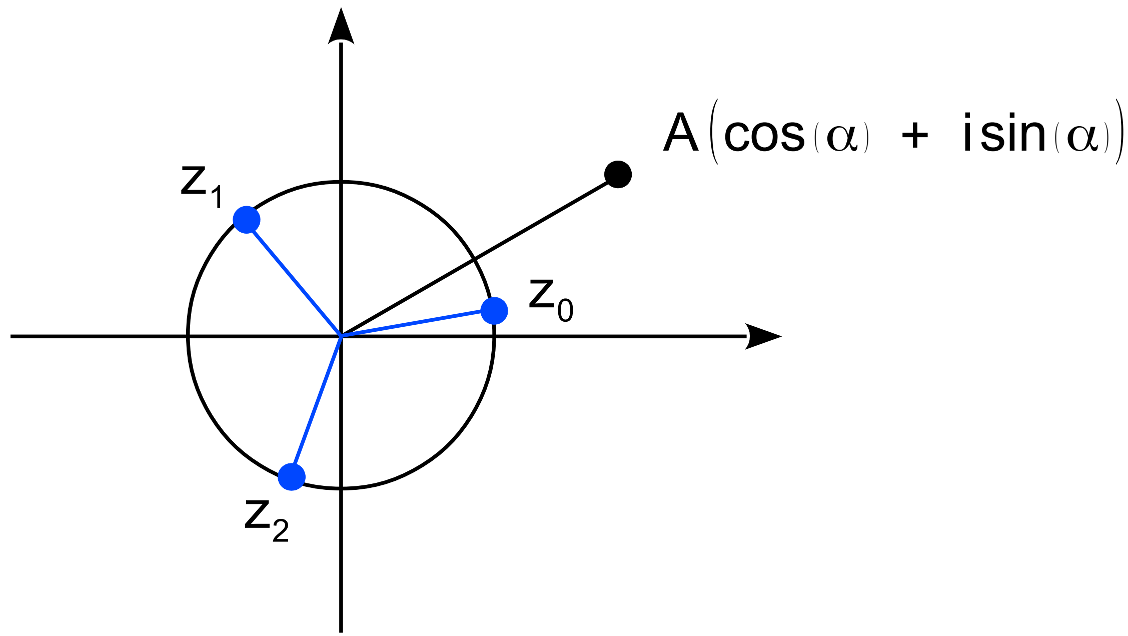
$$3\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \qquad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_0 = \frac{\alpha}{3} \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{3}\pi \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$z_0 = \sqrt[3]{A}\left(\cos(\varphi_0) + i\sin(\varphi_0)\right) \qquad z_1 = \sqrt[3]{A}\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right) \qquad z_2 = \sqrt[3]{A}\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$$



Anhang: Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

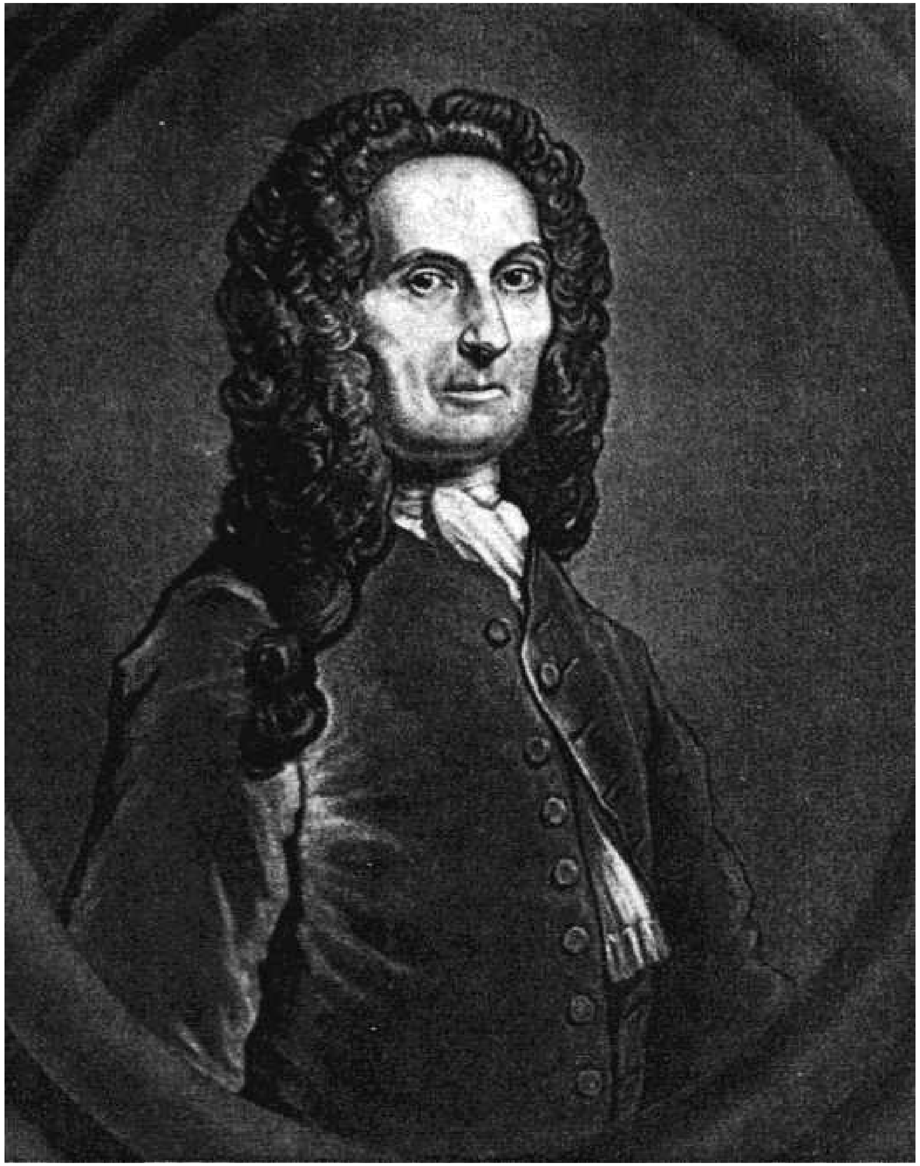
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Anhang: Der Satz von Moivre

Mit Hilfe der Vollständigen Induktion kann man zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\boxed{\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$



ABRAHAM DE MOIVRE (1667 bis 1754)
frz. Mathematiker

File:Abraham de moivre.jpg - Wikimedia Commons