Neue Einführung in die Vektorrechnung und Analytische Geometrie

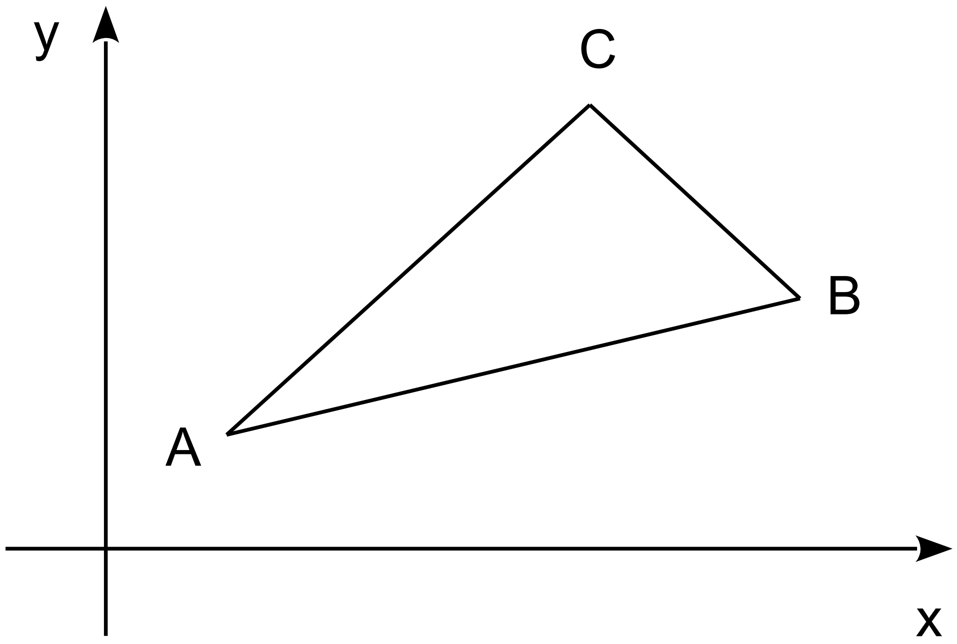
Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

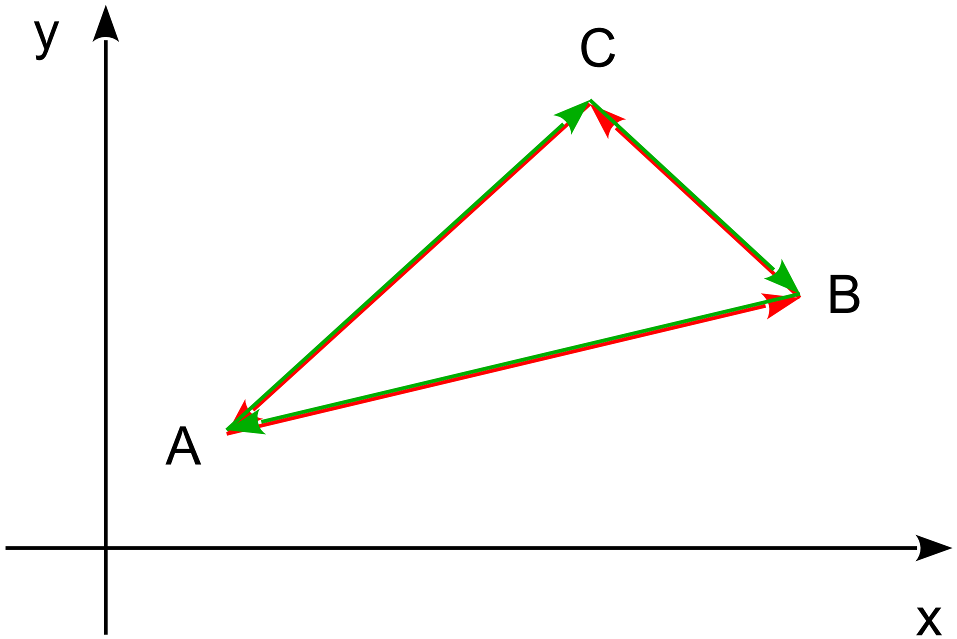
März 2023

Orientierte Dreiecke

In der Euklidischen Ebene mit x-y-Koordinatensystem seien zunächst die Punkte $A\left(A_x \middle| A_y\right)$, $B\left(B_x \middle| B_y\right)$, $C\left(C_x \middle| C_y\right)$ und das Dreieck $\Delta\,ABC$ gegeben .



In der Euklidischen Ebene mit x-y-Koordinatensystem seien zunächst die Punkte $A\left(A_x \middle| A_y\right)$, $B\left(B_x \middle| B_y\right)$, $C\left(C_x \middle| C_y\right)$ und das Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben .

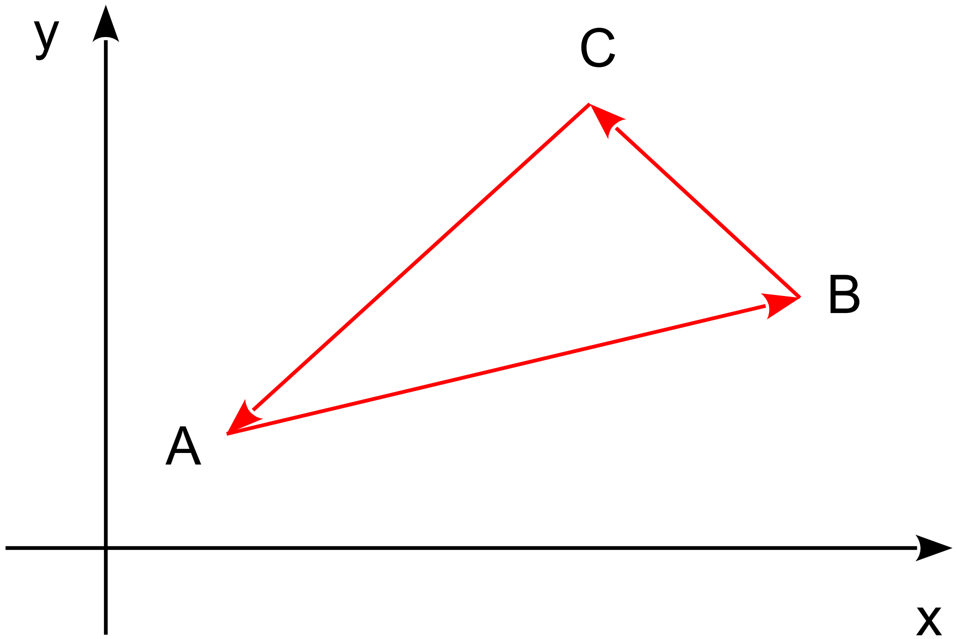


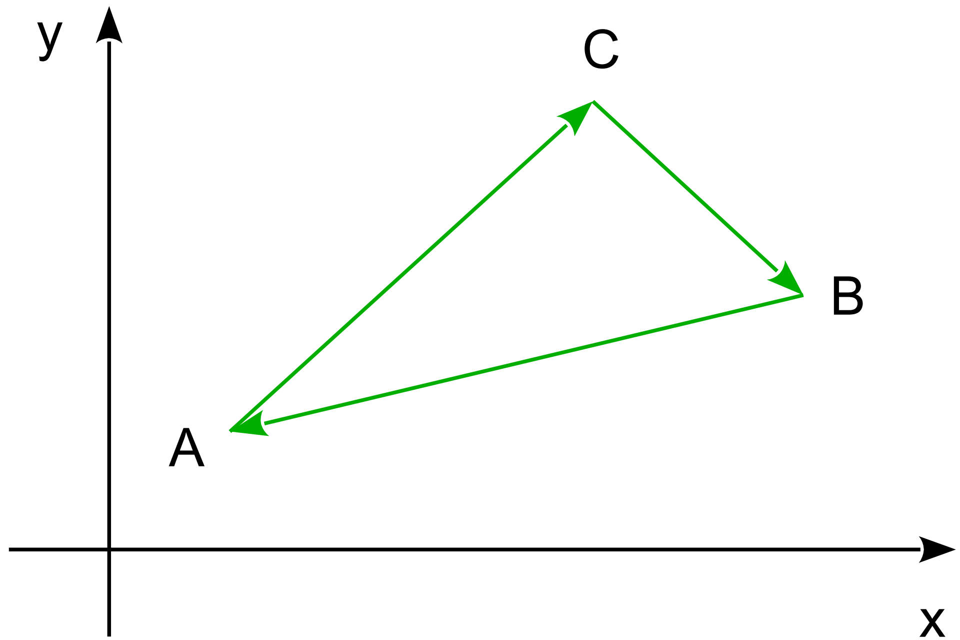
Man kann dem Dreieck zwei unterschiedliche Orientierungen geben :

$\Delta\, \overrightarrow{ABC}$: **Orientierung mit dem Uhrzeiger**

$\Delta\, \overleftarrow{ABC}$: **Orientierung entgegen dem Uhrzeiger**

In der Euklidischen Ebene mit x-y-Koordinatensystem seien zunächst die Punkte $A\left(A_x \middle| A_y\right)$, $B\left(B_x \middle| B_y\right)$, $C\left(C_x \middle| C_y\right)$ und das Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben .





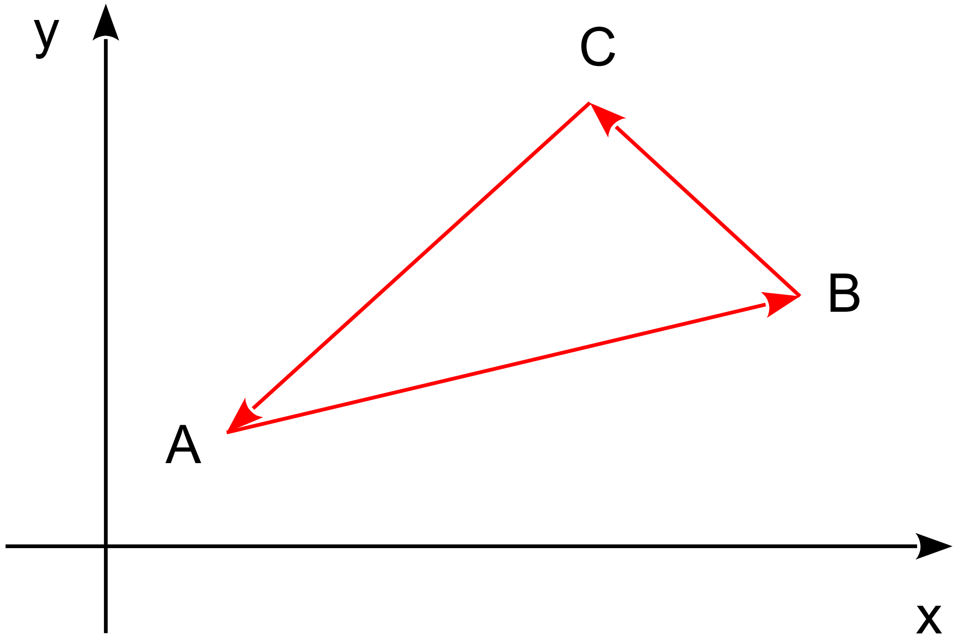
Man kann dem Dreieck zwei unterschiedliche Orientierungen geben :

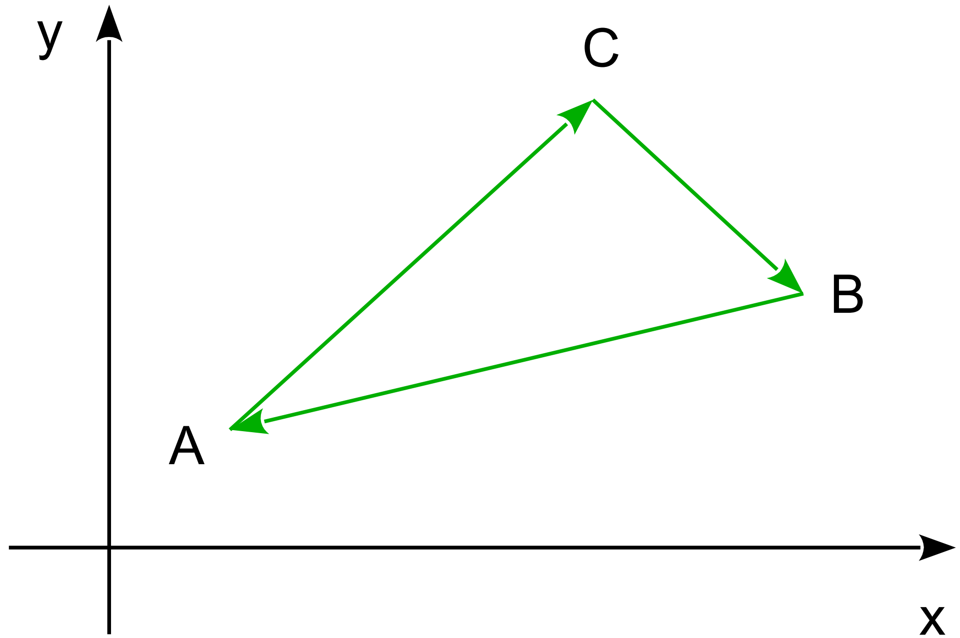
$\Delta\, \overrightarrow{ABC}$: **Orientierung mit dem Uhrzeiger**

$\Delta\, \overleftarrow{ABC}$: **Orientierung entgegen dem Uhrzeiger**

Orientierte Strecken

Mit der Orientierung des Dreiecks bekommen auch die Dreieckseiten eine Orientierung :





orientierte Strecken :

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

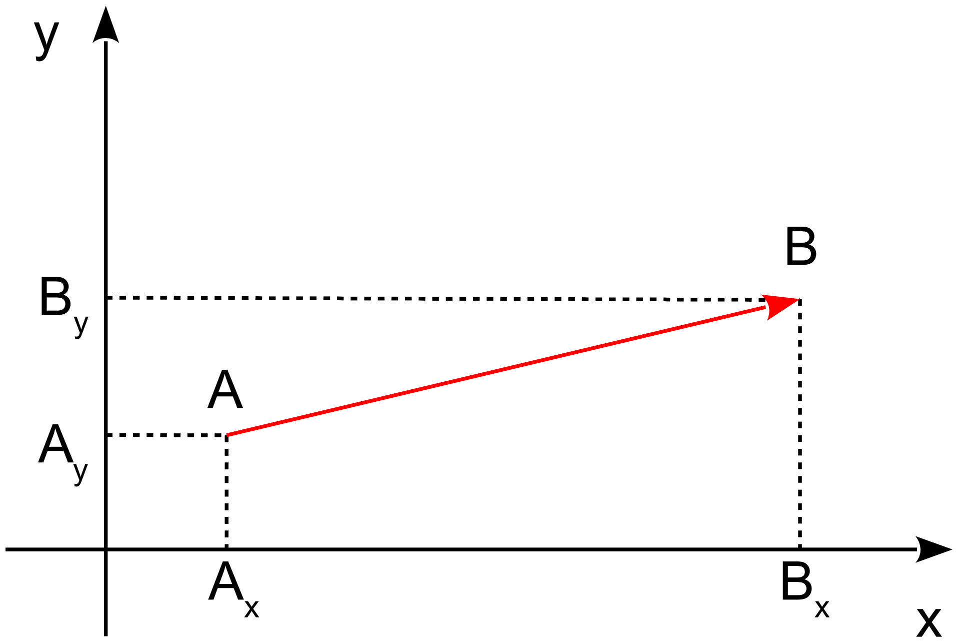
orientierte Strecken :

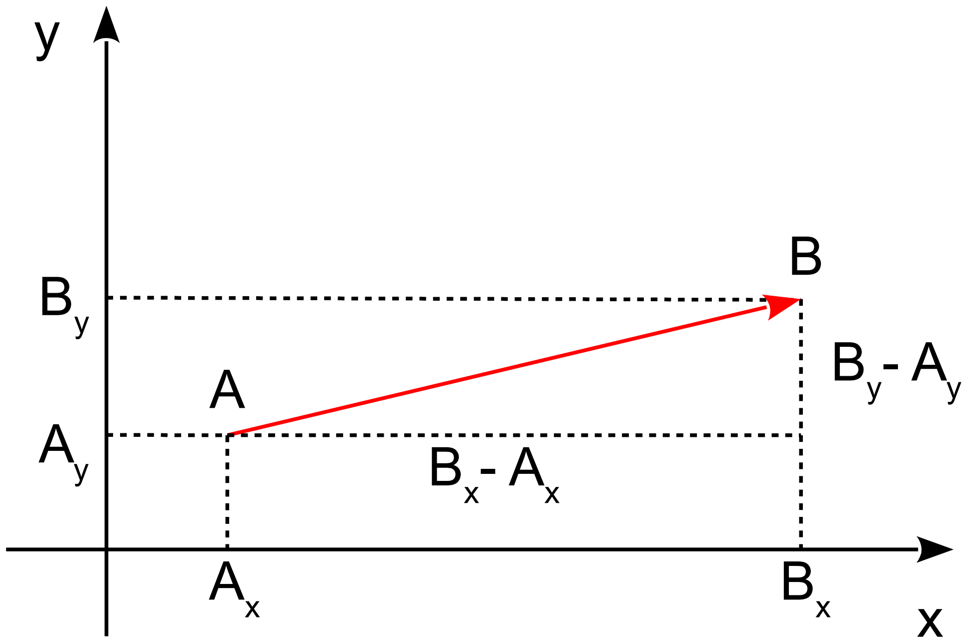
$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$

Bezeichnungen und Zusammenhänge :

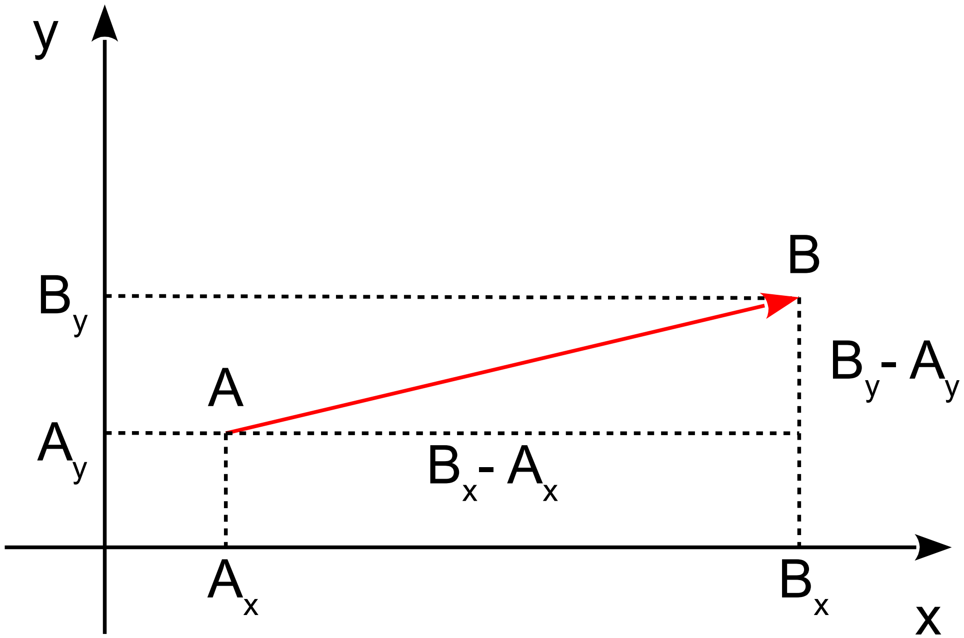
Bei der **orientierten Strecke** $\overrightarrow{AB}$ heißt der Punkt A **Anfangspunkt** und der Punkt B **Endpunkt** .
Entsprechend umgekehrt ist die Situation bei der orientierten Strecke $\overrightarrow{BA}$

Die orientierte Strecke $\overrightarrow{AB}$ ist bestimmt durch die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt oder genauer gesagt durch die Differenz der Koordinaten von Endpunkt und Anfangspunkt :





Die orientierte Strecke $\overrightarrow{AB}$ ist bestimmt durch die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt oder genauer gesagt durch die **Differenz der Koordinaten von Endpunkt und Anfangspunkt** :

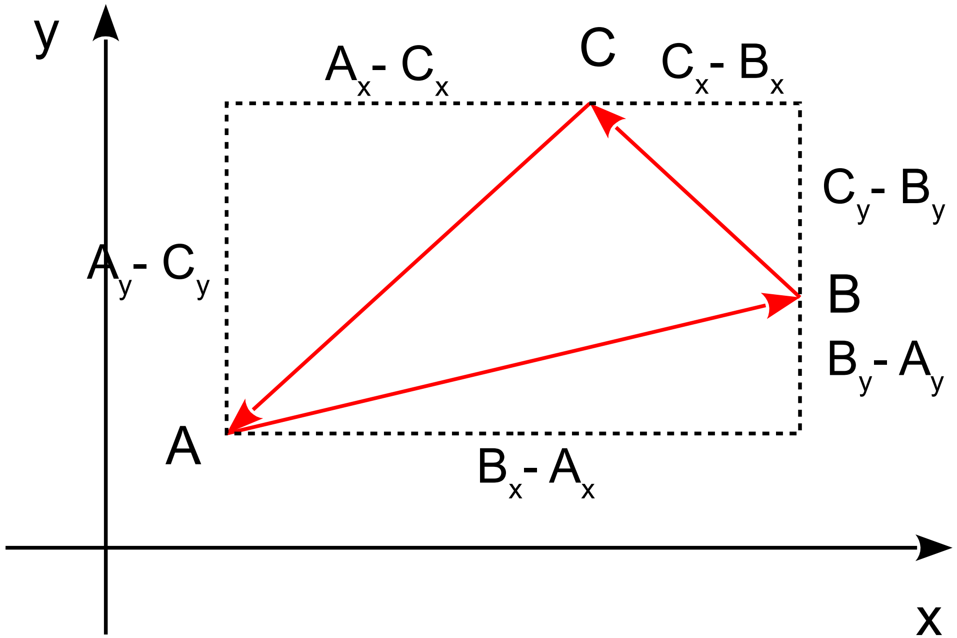


Man schreibt :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(B_x - A_x) \\ -(B_y - A_y) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + -\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Zurück zum orientierten Dreieck :



$$B_x - A_x \quad + \quad C_x - B_x \quad + \quad A_x - C_x \quad = \quad 0$$

$$B_y - A_y \quad + \quad C_y - B_y \quad + \quad A_y - C_y \quad = \quad 0$$

$$B_x - A_x \quad + \quad C_x - B_x \quad + \quad A_x - C_x \quad = \quad 0$$

$$B_y - A_y \quad + \quad C_y - B_y \quad + \quad A_y - C_y \quad = \quad 0$$

Schreibweise und Definition :

$$\begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x - B_x \\ C_y - B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x - C_x \\ A_y - C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

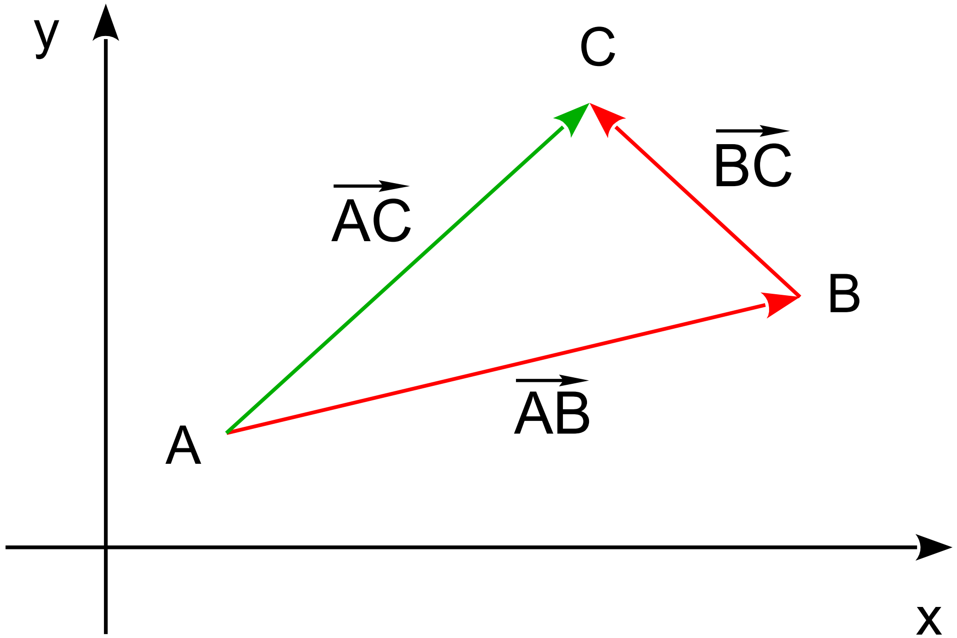
$$\overrightarrow{AB} \quad + \quad \overrightarrow{BC} \quad + \quad \overrightarrow{CA} \quad = \quad \vec{0}$$

Addition zweier orientierter Strecken

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$$

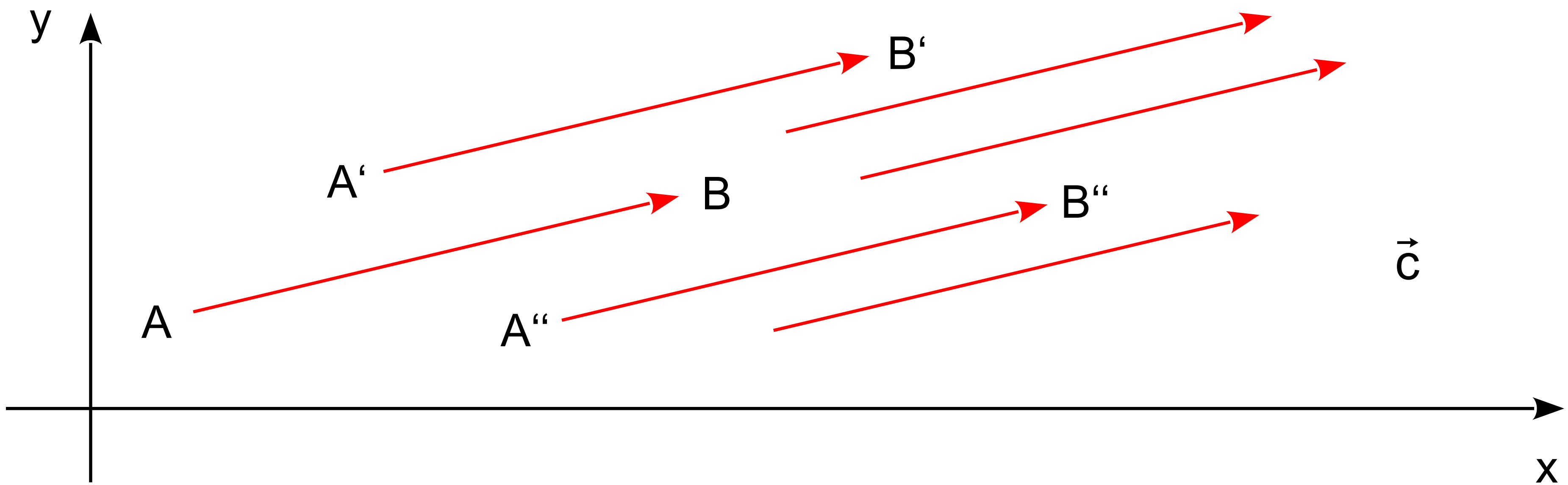
$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$



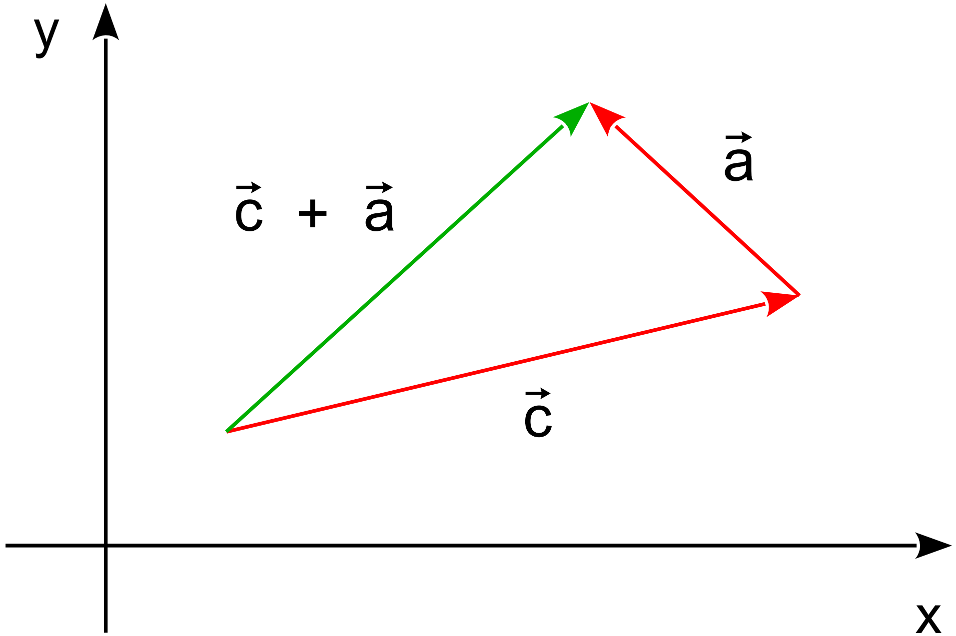
Vektoren und Addition von Vektoren

Alle orientierten Strecken $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$, ... gleicher Länge und Richtung fasst man zu einer Menge zusammen und nennt diese Menge den **Vektor** $\vec{c}$ **zur gerichteten Strecke** $\overrightarrow{AB}$.

Die gerichteten Strecken $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$, ... heißen und sind alle **Repräsentanten des Vektors** $\vec{c}$.



Addition von Vektoren

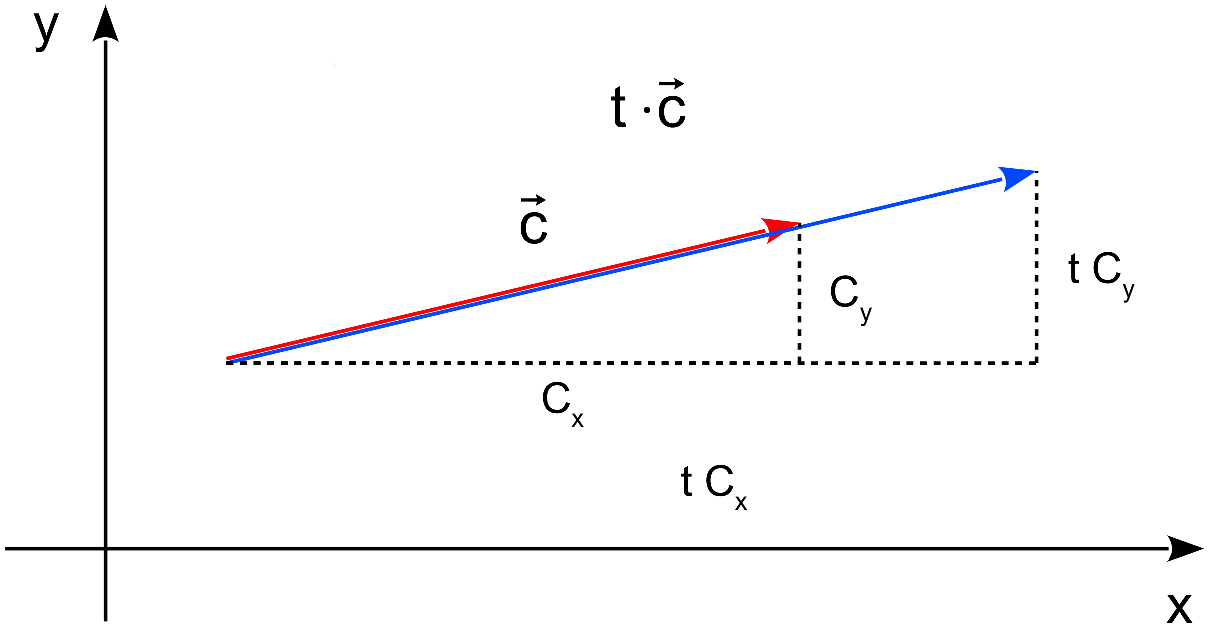


Die Addition der Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{a}$ ergibt den Vektor $\vec{c} + \vec{a}$!

$$\vec{c} + \vec{a} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x + a_x \\ c_y + a_y \end{pmatrix}$$

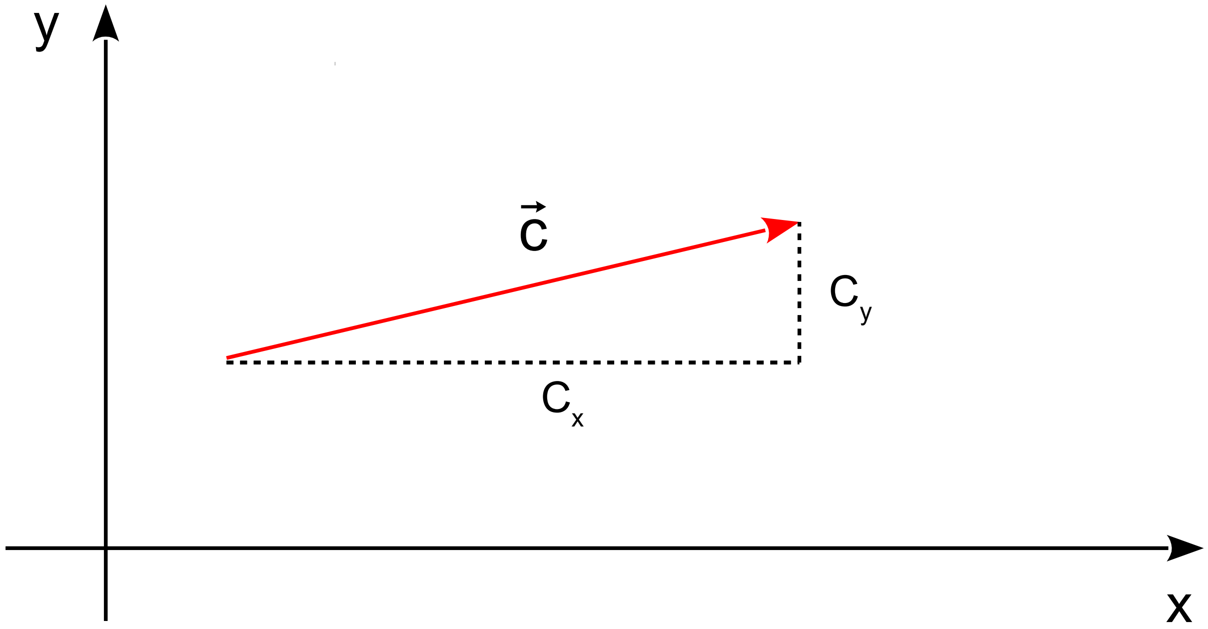
Man wählt irgend einen Repräsentanden des Vektors $\vec{c}$, denjenigen Repräsentanden von $\vec{a}$, dessen Anfangspunkt der Endpunkt von $\vec{c}$ ist . Die orientierte Strecke vom Anfangspunkt von $\vec{c}$ bis zum Endpunkt des Repräsentanden von $\vec{a}$ ist ein Repräsentand des Vektors $\vec{c} + \vec{a}$!

Skalare Multipikation eines Vektors



Multipliziert man die Koordinaten des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ mit dem Skalar $t \in \mathbb{R}$, so erhält man einen Vektor $t\vec{c} = \begin{pmatrix} t\,c_x \\ t\,c_y \end{pmatrix}$ gleicher Richtung wie $\vec{c}$ jedoch t-mal so lang .

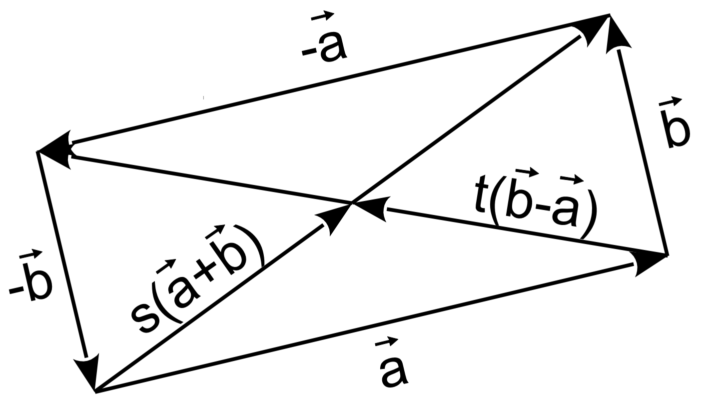
Länge oder Betrag eines Vektors



Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ hat die **Länge** oder den **Betrag** $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$!

Beweise mit Vektoren

(1) Zeige, dass sich die Diagonalen in einem Rechteck halbieren !



Beweis :

$$s\left(\vec{a}+\vec{b}\right) - t\left(\vec{b}-\vec{a}\right) = \vec{a}$$

$$s\left(a_x+b_x\right) - t\left(b_x-a_x\right) = a_x$$

$$s\left(a_y+b_y\right) - t\left(b_y-a_y\right) = a_y$$

$$s\left(a_x+b_x\right) - t\left(b_x-a_x\right) = a_x$$
$$s\left(a_y+b_y\right) - t\left(b_y-a_y\right) = a_y$$

$$s = \frac{-a_x\left(b_y-a_y\right)+ \qquad a_y\left(b_x-a_x\right)}{-\left(a_x+b_x\right)\left(b_y-a_y\right)+\left(a_y+b_y\right)\left(b_x-a_x\right)}$$

Determinantenformel

$$s = \frac{-a_x b_y+a_x a_y+a_y b_x-a_x a_y}{-a_x b_y+a_x a_y-b_x b_y+a_y b_x + a_y b_x-a_x a_y+b_x b_y-a_x b_y}$$

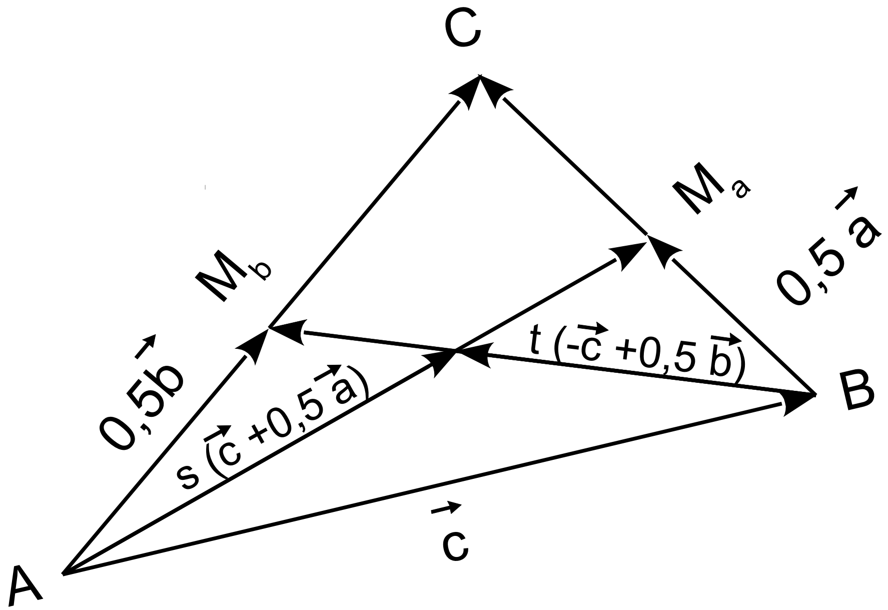
$$s = \frac{-a_x b_y+a_y b_x}{-a_x b_y+a_y b_x + a_y b_x-a_x b_y}$$

$$s = \frac{-a_x b_y+a_y b_x}{2\left(-a_x b_y+a_y b_x\right)} \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{1}{2}$$

Analog : $t = \frac{1}{2}$

Beweise mit Vektoren

(2) Gegeben sei das Dreieck ΔABC und seien M_a , M_c die Seitenmitten der Seiten a , b .
Zeige, dass sich die Seitenmittenlinien $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ im Verhältnis 2 : 1 teilen !



Beweis :

$$s\left(\vec{c}+0{,}5\vec{a}\right) - t\left(-\vec{c}+0{,}5\vec{b}\right) = \vec{c} \qquad \vec{c} = \vec{b}-\vec{a}$$

$$s\left(\vec{b}-\vec{a}+0{,}5\vec{a}\right) - t\left(\vec{a}-\vec{b}+0{,}5\vec{b}\right) = \vec{b}-\vec{a}$$

$$s\left(\vec{b}-0{,}5\vec{a}\right) - t\left(\vec{a}-0{,}5\vec{b}\right) = \vec{b}-\vec{a}$$

$$s\left(\vec{b}-0{,}5\vec{a}\right) + t\left(0{,}5\vec{b}-\vec{a}\right) = \vec{b}-\vec{a}$$

$$\left(\vec{b}-0{,}5\vec{a}\right)s + \left(0{,}5\vec{b}-\vec{a}\right)t = \vec{b}-\vec{a}$$

$$\left(b_x-0{,}5a_x\right)s + \left(0{,}5b_x-a_x\right)t = b_x-a_x$$
$$\left(b_y-0{,}5a_y\right)s + \left(0{,}5b_y-a_y\right)t = b_y-a_y$$

$$\left(b_x-0{,}5\,a_x\right)s + \left(0{,}5\,b_x-a_x\right)t = b_x-a_x$$
$$\left(b_y-0{,}5\,a_y\right)s + \left(0{,}5\,b_y-a_y\right)t = b_y-a_y$$

$$s = \frac{\left(b_x-a_x\right)\left(0{,}5\,b_y-a_y\right)-\left(b_y-a_y\right)\left(0{,}5\,b_x-a_x\right)}{\left(b_x-0{,}5\,a_x\right)\left(0{,}5\,b_y-a_y\right)-\left(b_y-0{,}5\,a_y\right)\left(0{,}5\,b_x-a_x\right)}$$ **Determinantenformel**

$$s = \frac{0{,}5\,b_x b_y-a_y b_x-0{,}5\,a_x b_y+a_x a_y-0{,}5\,b_x b_y+a_x b_y+0{,}5\,a_y b_x-a_x a_y}{0{,}5\,b_x b_y-a_y b_x-0{,}25\,a_x b_y+0{,}5\,a_x a_y-0{,}5\,b_x b_y+a_x b_y+0{,}25\,a_y b_x-0{,}5\,a_x a_y}$$

$$s = \frac{-0{,}5\,a_y b_x+0{,}5\,a_x b_y}{-0{,}75\,a_y b_x+0{,}75\,a_x b_y}$$

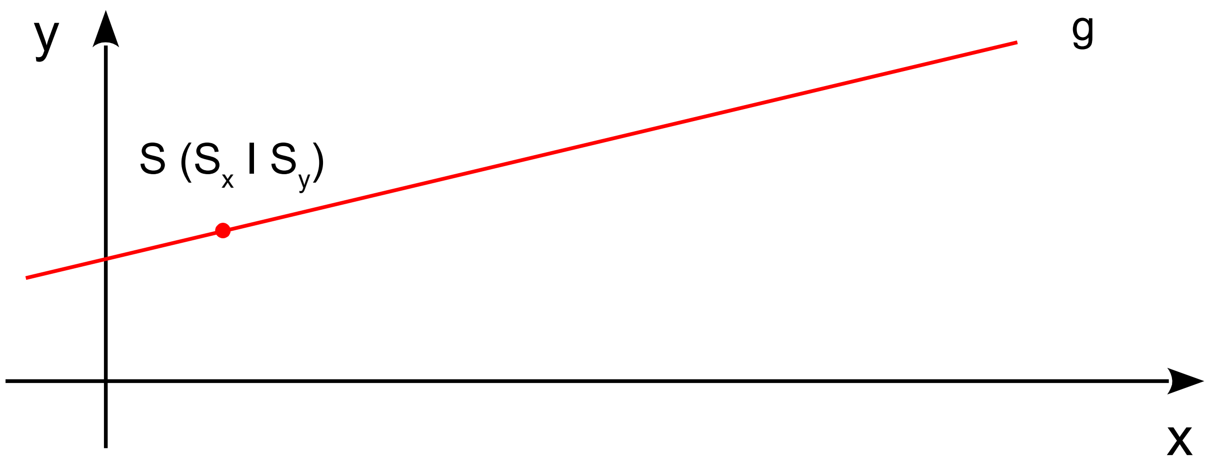
$$s = \frac{0.5\left(-a_y b_x+a_x b_y\right)}{0{,}75\left(-a_y b_x+a_x b_y\right)}$$

$s = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad$ Das Teilverhältnis von $\overline{AM_a}$ ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

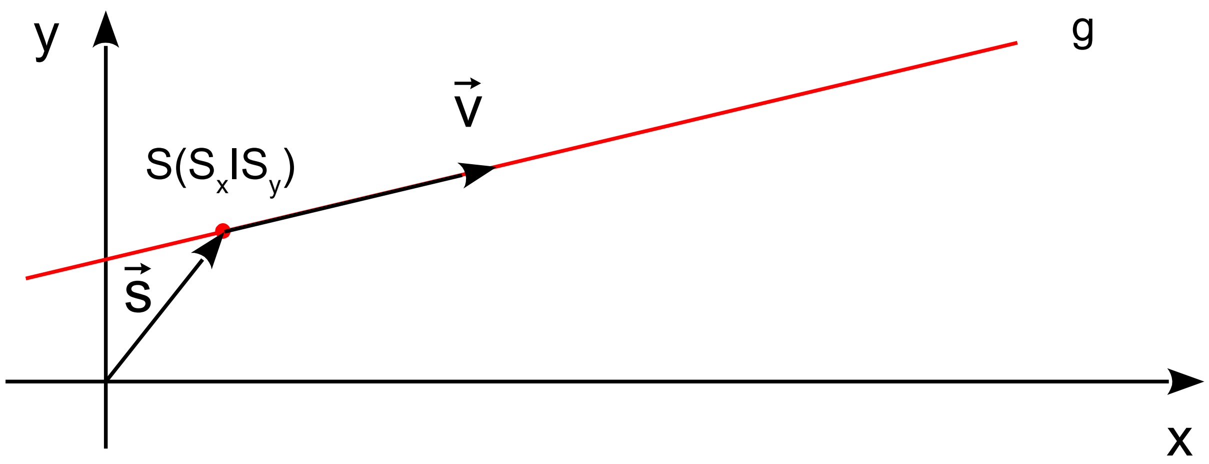
Analog : Das Teilverhältnis von $\overline{BM_b}$ ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

Vektorielle Darstellung einer Geraden

Gegeben sei in der Euklidische Ebene mit einem x-y-Koordinatensystem ein Punkt $S\left(S_x \middle| S_y\right)$ und eine Gerade g durch den Punkt S.

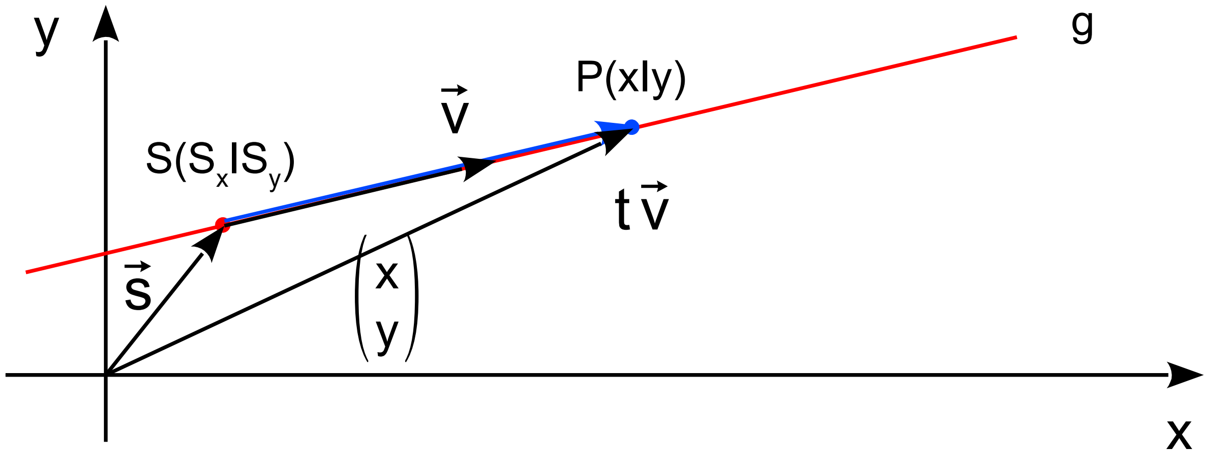


Die vektorielle Beschreibung der Geraden ist wie folgt :



Man definiert den sogenannten **Stützvektor** $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} := \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix}$ und einen **Richtungsvektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ mit Anfangspunkt S parallel zur Geraden.

Jeden Punkt $P \in g$ kann man nun durch folgende **Vektorgleichung** beschreiben :



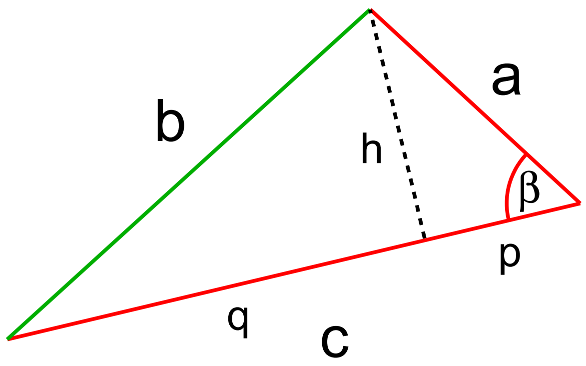
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{s} + t\vec{v} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Vektorgleichung oder **Parametergleichung** mit Parameter t zur Geraden g

Herkömmliche Bestimmung einer Dreieckseite

Gegeben sei das Dreieck mit mit den Seiten c , a und dem Winkel β .
Berechne trigonometrisch die Länge der Seite b !



(1) $$h = a\sin(\beta)$$

(2) $$p = a\cos(\beta)$$

(3) $$q = c - p$$

(4) $$b^2 = h^2 + q^2$$

$$b^2 = (a\sin(\beta))^2 + (c - a\cos(\beta))^2$$

$$b^2 = \left(a\sin(\beta)\right)^2 + \left(c - a\cos(\beta)\right)^2$$

$$b^2 = a^2\sin^2(\beta) + c^2 - 2ca\cos(\beta) + a^2\cos^2(\beta)$$

$$b^2 = c^2 + a^2\left(\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)\right) - 2ca\cos(\beta)$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$$

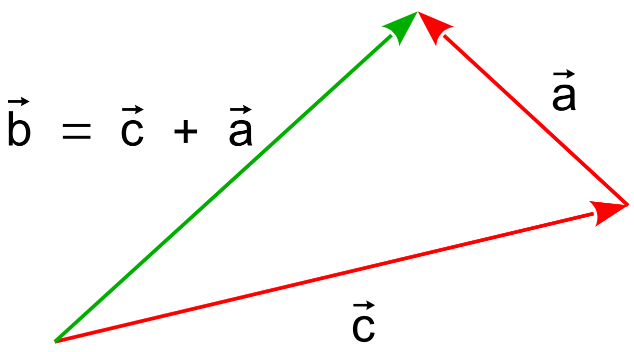
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$

$$\boxed{b^2 = c^2 + a^2 + 2ca\cos(180° - \beta)}$$

Vektorielle Bestimmung einer Dreieckseite

Gegeben seien die Seitenvektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ eines Dreiecks .

Berechne vektoriell die Länge des Seitenvektors $\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$!



$$\vec{b} = \vec{c} + \vec{a} = \begin{pmatrix} c_x + a_x \\ c_y + a_y \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(c_x + a_x\right)^2 + \left(c_y + a_y\right)^2}$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \left(c_x + a_x\right)^2 + \left(c_y + a_y\right)^2$$

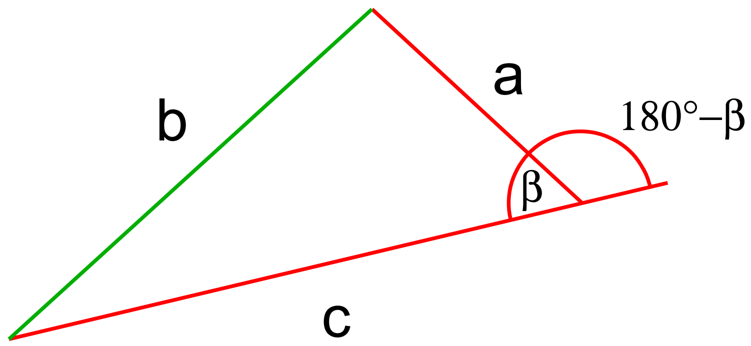
$$\left|\vec{b}\right|^2 = \left(c_x+a_x\right)^2 + \left(c_y+a_y\right)^2$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = c_x^2+2c_x a_x+a_x^2 + c_y^2+2c_y a_y+a_y^2$$

$$\boxed{\left|\vec{b}\right|^2 = c_x^2+c_y^2 + a_x^2+a_y^2 + 2\left(c_x a_x+c_y a_y\right)}$$

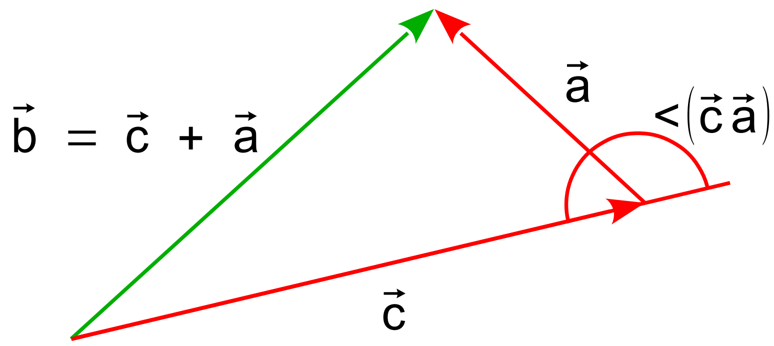
Vergleich der beiden Rechnungen für die Dreieckseite

Herkömmlich



$$\boxed{b^2 = c^2 + a^2 + 2ca\cos(180°-\beta)}$$

Vektoriell



$$\boxed{|\vec{b}|^2 = c_x^2+c_y^2 + a_x^2+a_y^2 + 2(c_x a_x+c_y a_y)}$$

$$ca\cos(180°-\beta) = c_x a_x + c_y a_y$$

$$c\,a\cos(180°-\beta) \quad = \quad c_x a_x + c_y a_y$$

$$c_x a_x + c_y a_y \quad = \quad c\,a\cos(180°-\beta)$$

$$c_x a_x + c_y a_y \quad = \quad |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \cos(\sphericalangle(\vec{c}\,\vec{a}))$$

Definition :

Für die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

heißt der Ausdruck

$$\boxed{\vec{c} \cdot \vec{a} \quad = \quad \vec{c}\ \vec{a} \quad := \quad c_x a_x + c_y a_y \quad = \quad |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \cos(\sphericalangle(\vec{c}\,\vec{a}))}$$

das **Skalarprodukt** der der Vektoren .

Bedeutung des Skalarprodukts zweier Vektoren

(1) Winkelberechnung

$$\vec{c}\ \vec{a} = c_x a_x + c_y a_y = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right)$$

$$\vec{c}\ \vec{a} = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right)$$

$$\frac{\vec{c}\ \vec{a}}{|\vec{c}|\ |\vec{a}|} = \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right)$$

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right) = \frac{\vec{c}\ \vec{a}}{|\vec{c}|\ |\vec{a}|}$$

$$\boxed{\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{c}\ \vec{a}}{|\vec{c}|\ |\vec{a}|}\right)}$$

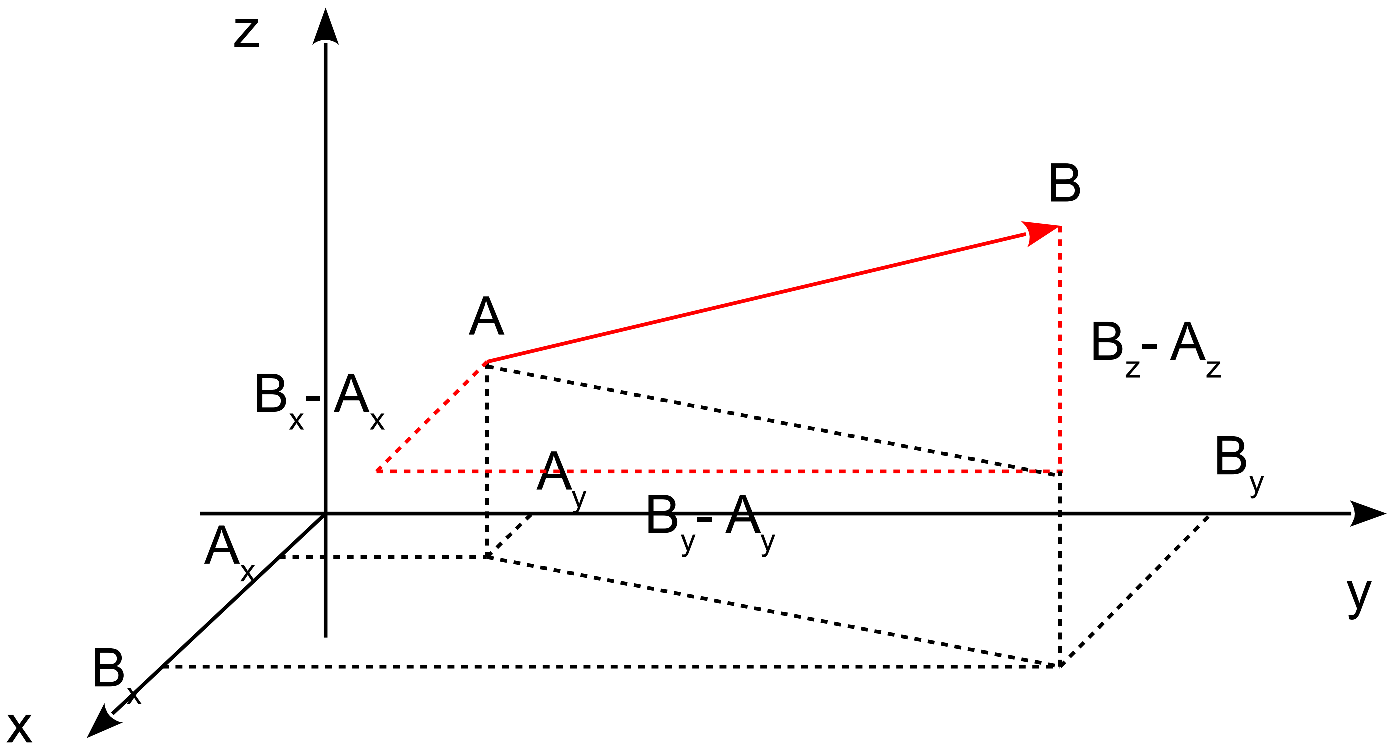
Bedeutung des Skalarprodukts zweier Vektoren

(2) Orthogonalitäts - Kriterium

$$\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right) = \frac{\vec{c}\ \vec{a}}{\left|\vec{c}\right|\ \left|\vec{a}\right|}$$

$$\boxed{\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right) = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c}\ \vec{a} = 0}$$

Vektoren im Raum



Vektoren im Raum

Für räumliche Vektoren gelten entsprechende Darstellungen und Formeln :

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} := \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix} \qquad |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

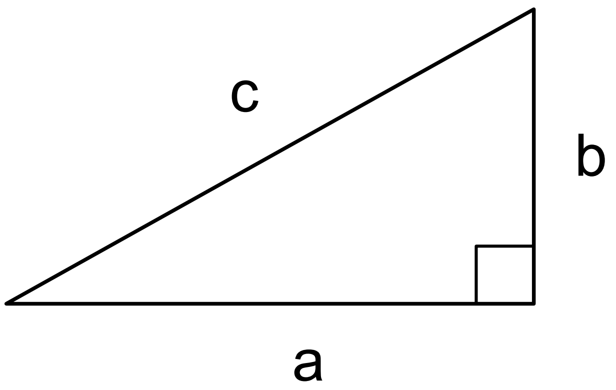
$$t\vec{c} = \begin{pmatrix} t\,c_x \\ t\,c_y \\ t\,c_z \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c}\ \vec{a} := c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{c}\,\vec{a}\right)\right)}$$

Anhang :

Satz des Pythagoras (~ 500 v. Chr.)

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat .



a, b sind die **Katheten**
c ist die **Hypotenuse**

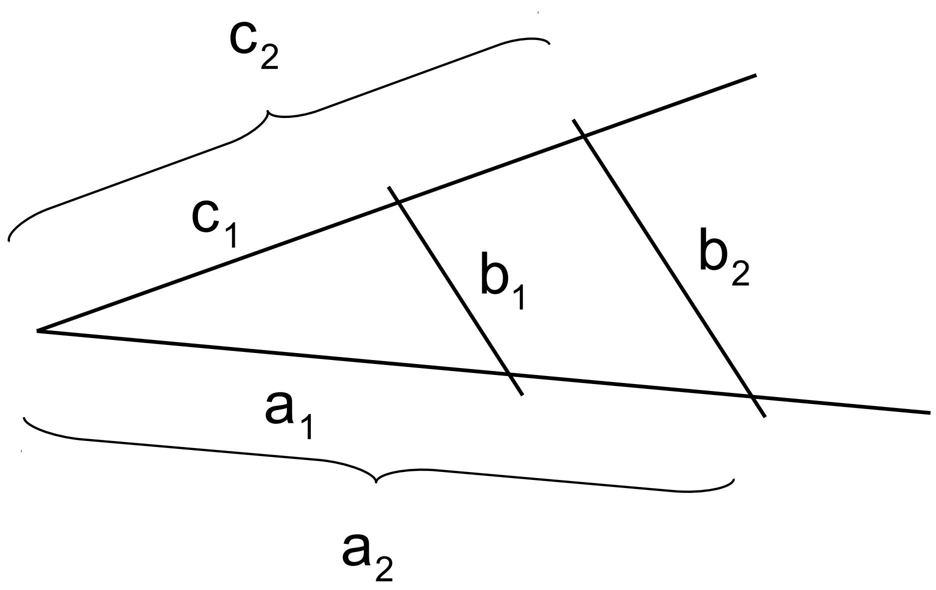
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt, kann man die dritte Seite berechnen !

https://scienceblogs.de/planeten/2013/02/17/buchbesprechung-kitty-ferguson-pythagoras-his-lives-and-the-legacy-of-a-rational-universe/
Fotograf : Lakey, Die Pythagoras-Statue auf der griechischen Insel Samos.

Strahlensätze

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so gelten für die Strahl- und die Parallelabschnitte :



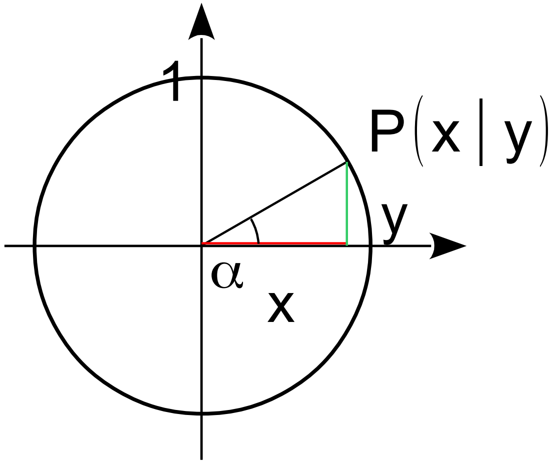
1. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

2. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}} \qquad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis



Ein Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Einheitskreis und die Koordinaten x , y werden durch den Winkel α eindeutig festgelegt.

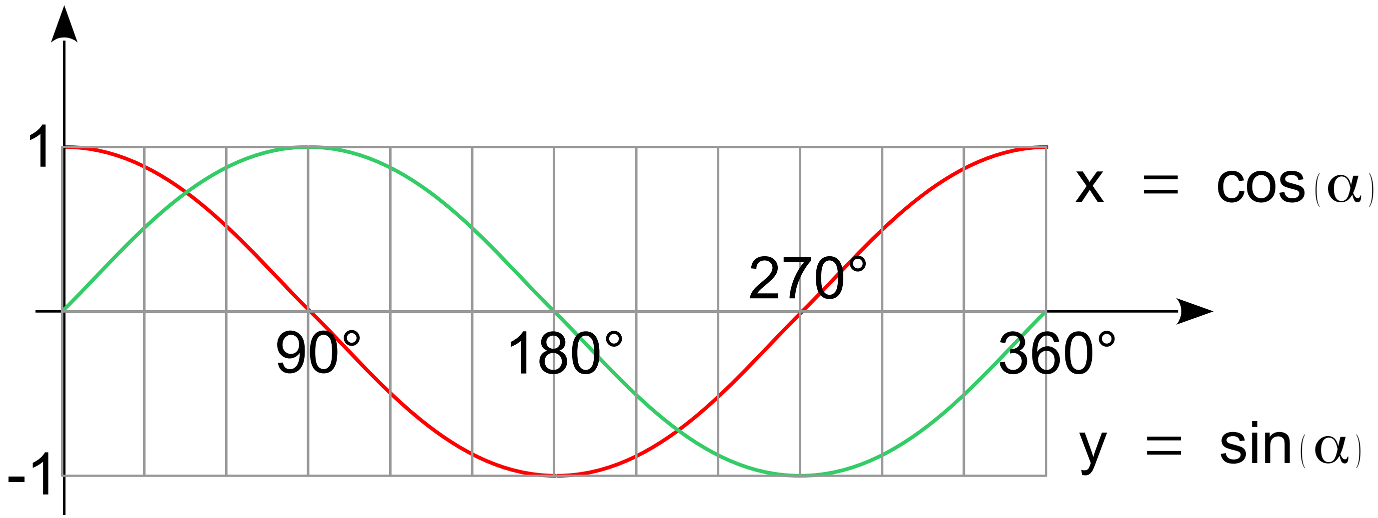
Die Koordinaten sind Funktionen des Winkels, nämlich die Kosinus- und Sinusfunktion :

$\underline{x = \cos(\alpha)}$ $\underline{y = \sin(\alpha)}$

Es gilt :

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Schaubilder der trigonometrischen Funktionen :

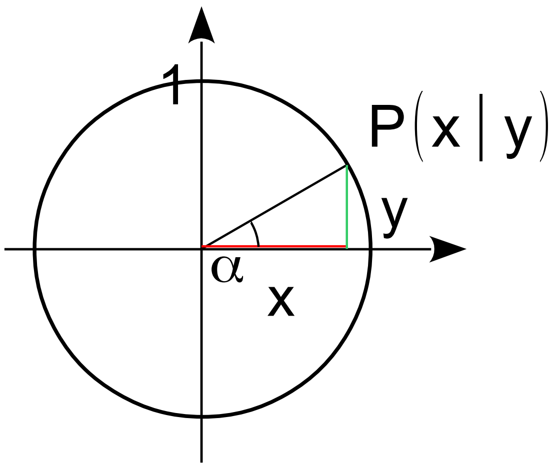


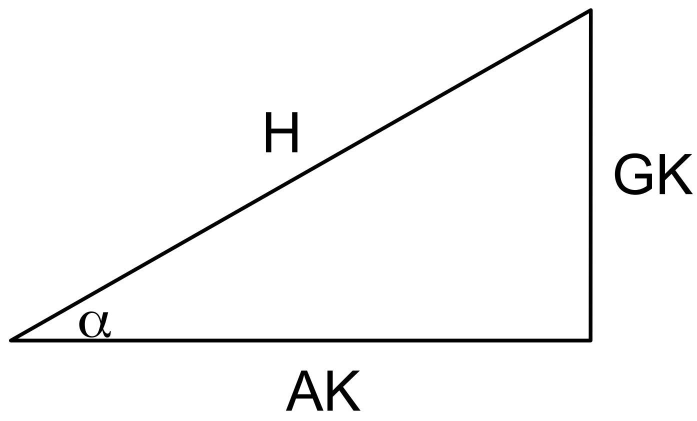
Die Funktionswerte der Sinus- und der Kosinus-Funktionen kann man dem Taschenrechner entnehmen.

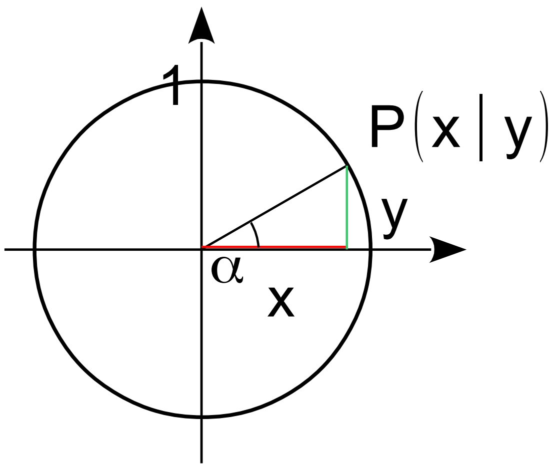
Trigonometrie

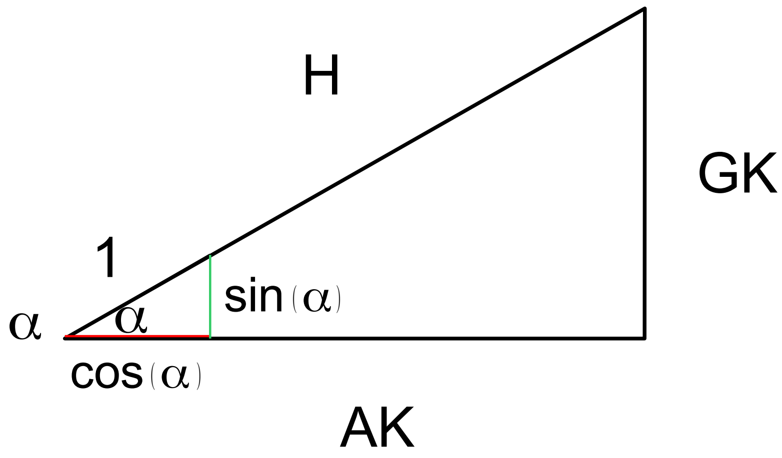
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit dem Winkel α , der Hypotenuse H und die auf den Winkel bezogene **Ankathete** AK und die **Gegenkathete** GK .

Kombiniert man dieses Dreieck mit dem entsprechenden Dreieck im Einheitskreis, erhält man die **Strahlensatzfigur** :









Nach den Strahlensätzen gilt :

$$\frac{AK}{\cos(\alpha)} = \frac{H}{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{H}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{GK}{AK}}$$

$$\frac{H}{1} = \frac{GK}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin(\alpha) = \frac{GK}{H}}$$