Kreismessung nach Archimedes

Skriptum erstellt von

Arno Fehringer

April 2023

Quellen :

Deissler, Rainer : Einführung in die Geometrie SS05; PH Freiburg
http://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/geometrie/export_pdf_ss05/skript05.pdf

Ruppert, Markus : Archimedes, der Kreis und die Kugel; ML-Heft Nr. 165 (2011), S. 48-53
http://www.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/mitarbeiterfiles/ruppert/ml_165/Archimedes_ungekuerzt.pdf

Rudio, Ferdinand : Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung; Teubner, Leipzig 1892

Lexikon der Mathematik : Bände 1 – 5 ; Springer Spektrum 2. Aufl. , 2016

Statue des Archimedes (287 – 212 v. Chr.) in Syrakus

http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Statue_des_Archimedes_in_Syrakus_2022.JPG

Archimedes von Syrakus, Mathematiker, Physiker und Techniker, geb. um 287 v. Chr. Syrakus, gest. 212 v. Chr. Syrakus.
Über das Leben des Archimedes wissen wir wenig. Sein Vater war der Astronom Phidias. Bei ihm hat Archimedes wohl auch seine Ausbildung erhalten. Wahrscheinlich hat er auch einige Zeit in Alexandria verbracht. Die Mehrzahl seiner erhaltenen Schriften ist uns in Form von Briefen an alexandrinische Mathematiker, u. a. Eratosthenes, erhalten. Archimedes, möglicherweise verwandt mit König Hieron II. von Syrakus, leitete vermutlich über zwei Jahre die Verteidigung von Syrakus und unterstützte diese durch die Konstruktion von Steinschleudern und anderen Waffen. Er starb bei der Einnahme seiner Heimatstadt durch die Römer. Um Leben und Tod des Archimedes kamen schon in der Antike Legenden auf, die nachhaltig zu seinem Ruhm bis in die Jetztzeit beitrugen. Von Archimedes sind 11 Werke erhalten. Sie lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Arbeiten über die Inhaltsbestimmung von Flächen und Körpern. Dazu gehören Untersuchungen über Kugel und Zylinder, über den Kreis und die Parabel, über Spiralen, Rotationsparaboloide und -hyperboloide, und Sphäroide (Rotationsellipsoide). In diesen Arbeiten wurden die Berechnung von Oberfläche und Volumen von Kugel, Kugelsegment und Kugelsektor vorgeführt. Der Zusammenhang zwischen Kugel- und Zylindervolumen wurde geometrisch gezeigt. Der Inhalt von

Segmenten von Rotationsparaboloiden und -hyperboloiden, von Rotationsellipsoiden wurde bestimmt. In der Arbeit über Spiralen wurden Flächenstücke bestimmt, die durch Geraden von der archimedischen Spirale abgeschnitten werden. Die berühmte Untersuchung über die „Quadratur der Parabel“ ermittelte mit zwei grundsätzlich unterschiedlichen Methoden den Inhalt eines Parabelsegmentes. Einerseits führte Archimedes die Inhaltsbestimmung auf eine unendliche geometrische Reihe zurück (Einbeschreibung einer Reihe von Dreiecken in das Parabelsegment), dabei auch durchaus nicht offensichtliche Sätze über die Parabel verwendend, andererseits benutzte er eine Art mechanisches Verfahren unter Verwendung von Hebelgesetz und Lage des Schwerpunktes bei Dreieck und Trapez. Beide Herleitungen und die Beweise sind auch aus heutiger Sicht korrekt. Die Grundlage des zweiten Verfahrens bildeten die Ergebnisse der archimedischen Schrift „Über den Schwerpunkt ebener Flächen“, in der wiederum das Hebelgesetz formuliert, allerdings nicht einwurfsfrei zur Schwerpunktbestimmung benutzt wurde.

2. Archimedes gilt als Begründer der Statik und Hydrostatik. In seiner Schrift „Über schwimmende Körper“ untersuchte er das Schwimmen, Schweben und Sinken von Körpern in Flüssigkeiten, da-bei an Aristoteles anknüpfend. Er formulierte eine Vorform des archimedischen Prinzips.

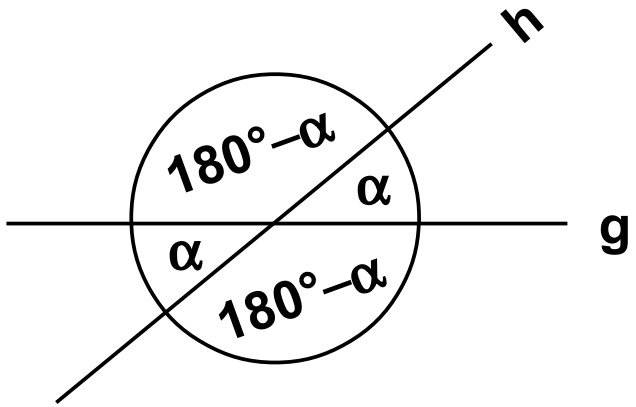
3. In seiner Arbeit „Der Sandrechner“ erweiterte Archimedes Notation und Begriff der natürlichen Zahlen, ausdrücklich betonend, daß die Zahlenreihe bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann. Dabei ging er von der Frage aus, wieviel Sandkörner in die Fixsternsphäre passen, wozu er Größenvorstellungen über astronomische Entfernungen entwickeln mußte. Sekundärquellen berichten über archimedische Berechnungen der Länge des tropischen Jahres und des scheinbaren Durchmessers der Sonne und der Konstruktion eines Planetariums. Weitere Arbeiten des Archimedes befaßten sich mit einer speziellen Pellschen Gleichung („Rinderproblem“) und mit halbregulären Polyedern.

[Lexikon der Mathematik]

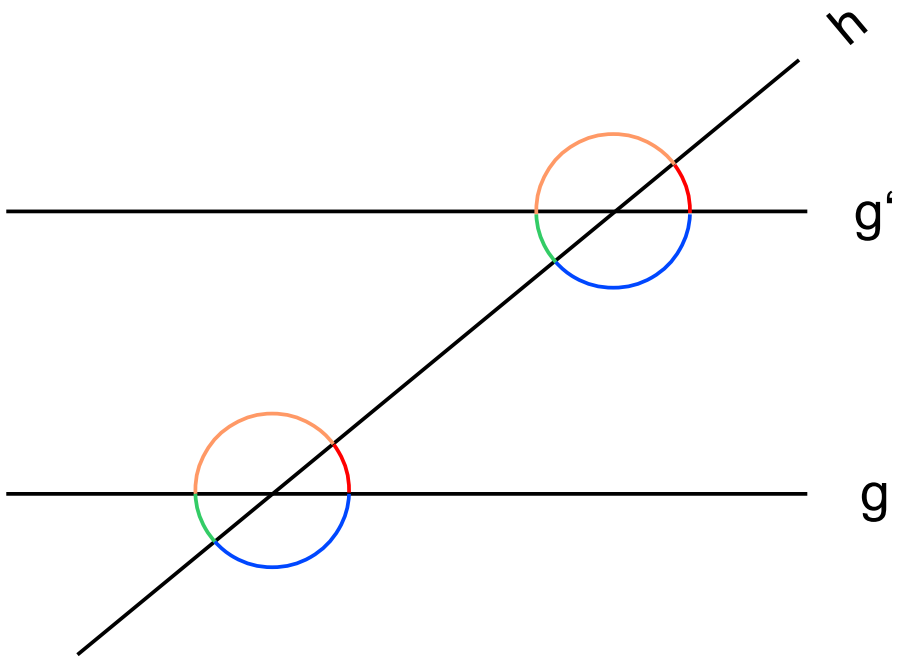
Nebenwinkel-, Gegenwinkel-, Stufenwinkelsatz

Nebenwinkelsatz:
Nebenwinkel sind zusammen 180° .

Gegenwinkelsatz :
Gegenwinkel sind gleich groß .



Stufenwinkelsatz:
Werden zwei parallele Geraden g und g‘ von einer Geraden h geschnitten, so sind Stufenwinkelpaare gleich groß .



g‘ II g

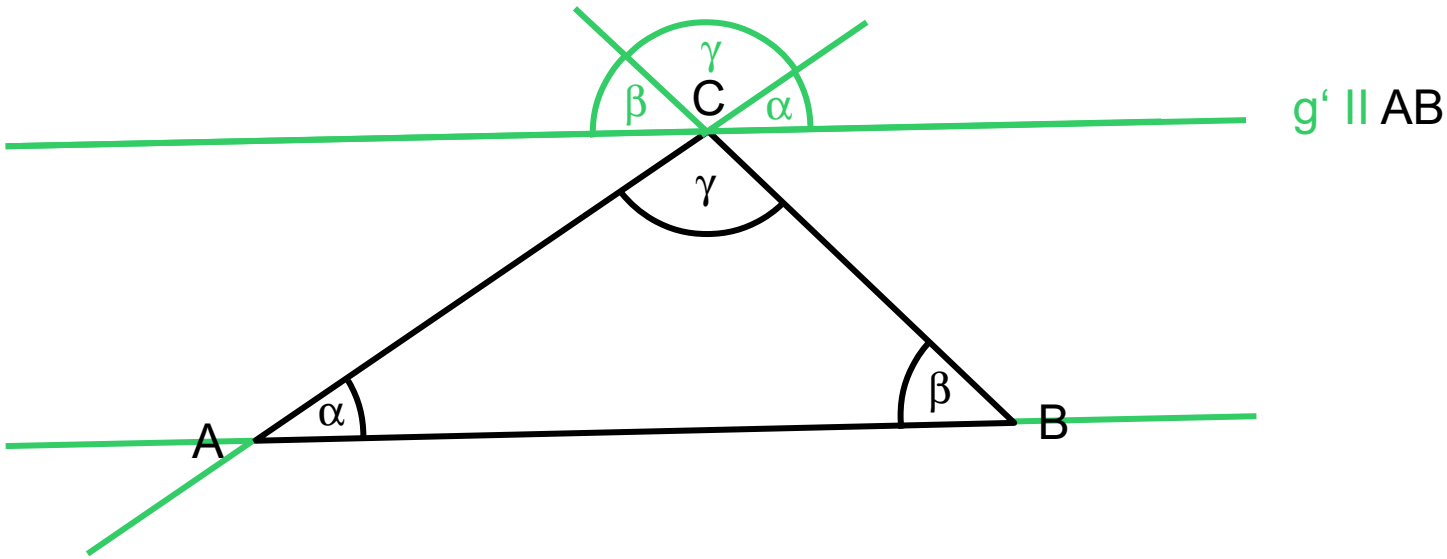
Bemerkung : Stufenwinkelpaare haben hier jeweils gleiche Farbe !

Winkelsummensatz im Dreieck

In jedem Dreieck ΔABC gilt : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

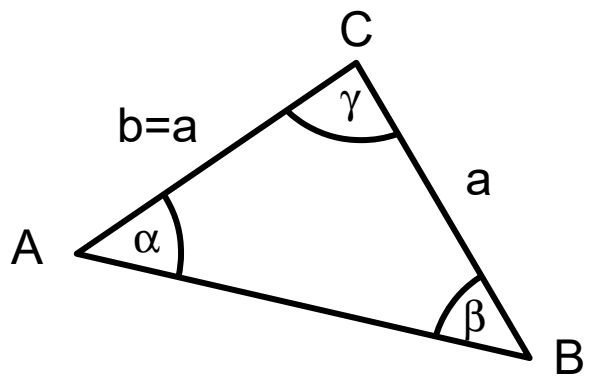
Beweis :

Man zeichnet durch C die Parallele g‘ zu AB . Nach dem Stufen- und dem Gegenwinkelsatz folgt dann die Behauptung .



Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke

In jedem gleichschenkligen Dreieck ΔABC mit den gleichen Schenkeln a und $b=a$, den Basiswinkeln α, β und dem Winkel γ gilt: $\alpha = \beta$

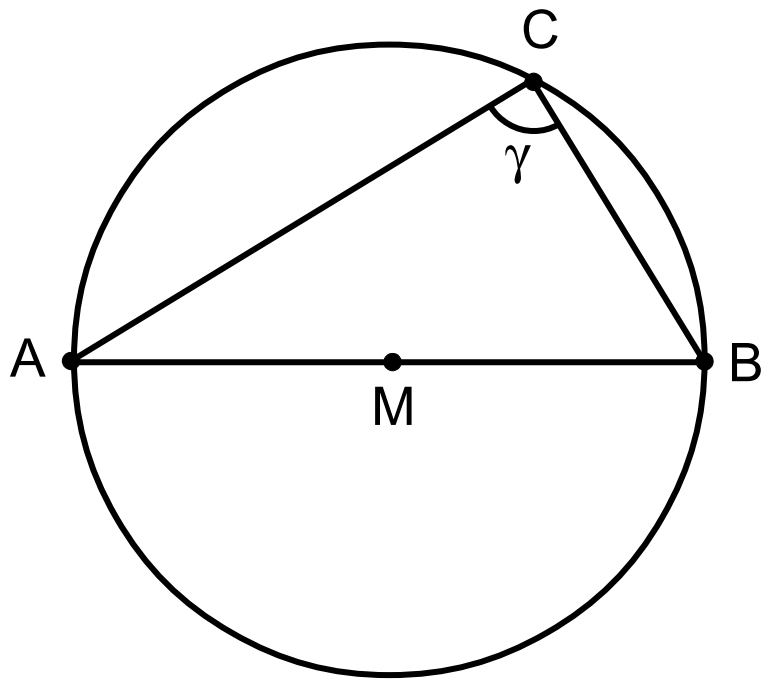


Beweis :

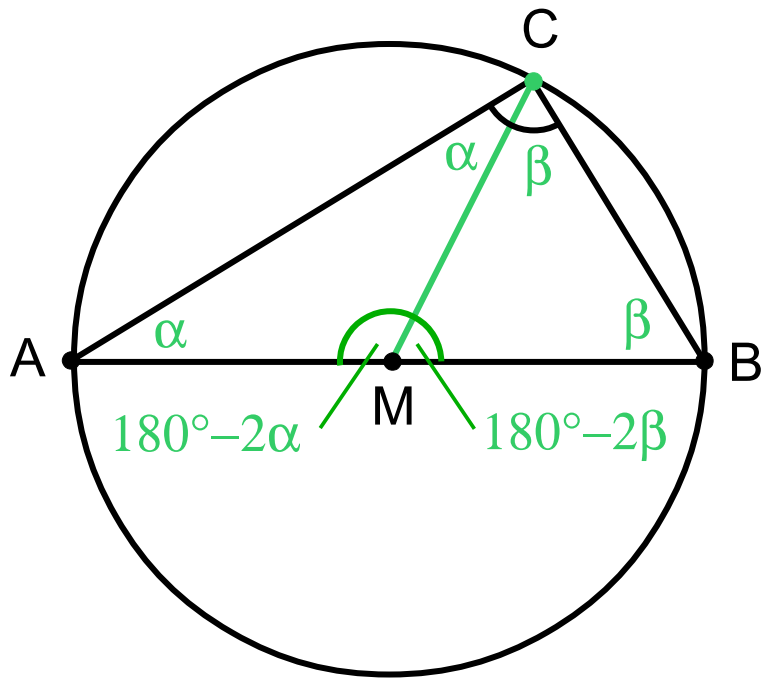
Die Dreiecke ΔACB und ΔBCA stimmen im Winkel γ und den anliegenden Seiten a und $b=a$ überein, und sind deshalb kongruent .
Daraus folgt speziell die Übereinstimmung in den entsprechenden Winkeln α und β, also $\alpha = \beta$.

Satz des Thales (~ 600 v. Chr.)

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel : $\gamma = 90°$



Beweis :

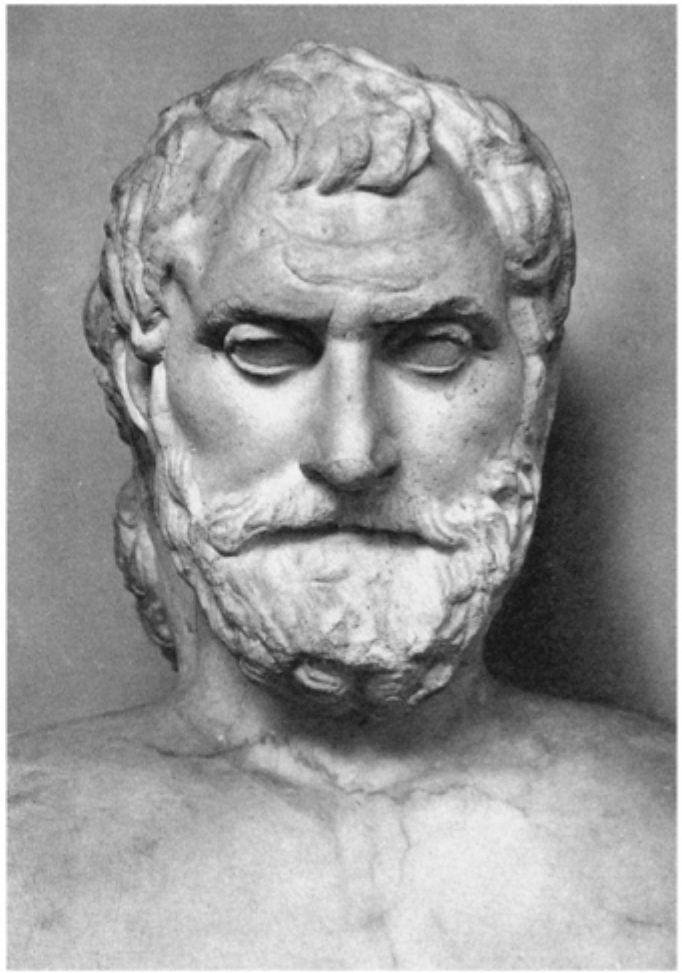


$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$$

$$180° - 2(\alpha + \beta) = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{180°}{2}$$

$$\gamma = 90°$$



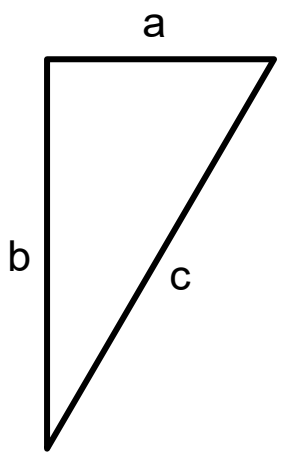
Thales von Milet
(~ 623 – 548 v. Chr.)

Thales aranged with Bias of Priene in a double herm.
Roman copy of a 4th century B.C. Greek original. Vatican, Galleria Geografica Inv. 2892
(photo G. Lippold, Die Skulpturen des Vaticanischen Museums III 2, Berlin, 1956, pl. 198, 18 [right])

Le Mort dans la ville - Burying A Sage: The Heroon Of Thales In The Agora Of Miletos - Institut français d'études anatoliennes (openedition.org)

Satz des Pythagoras (~ 500 v. Chr.)

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat .

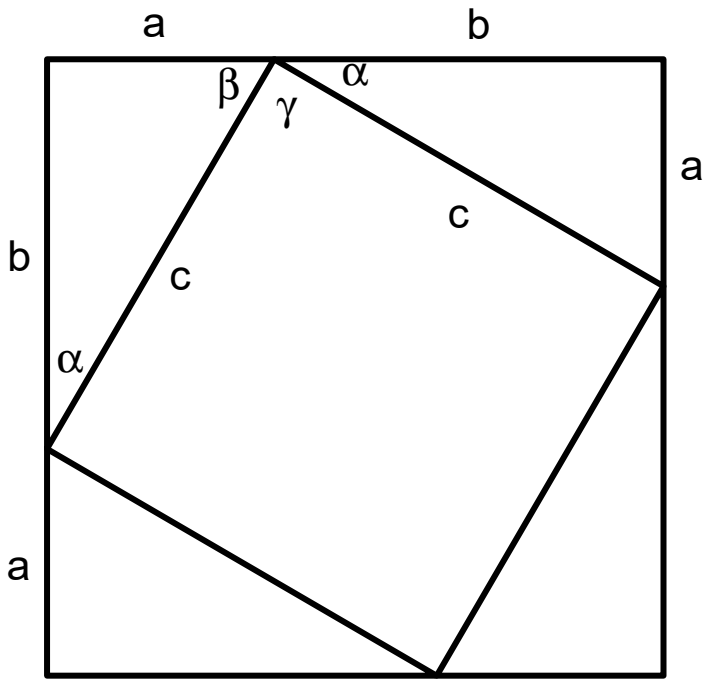


a, b sind die **Katheten**
c ist die **Hypotenuse**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bemerkung :
Sind in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt, kann man die dritte Seite berechnen !

Beweis :



Winkelbetrachtung :

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$90° + \gamma = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \gamma = 90°$$

Flächenbetrachtung :

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\,\frac{ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

https://scienceblogs.de/planeten/2013/02/17/buchbesprechung-kitty-ferguson-pythagoras-his-lives-and-the-legacy-of-a-rational-universe/

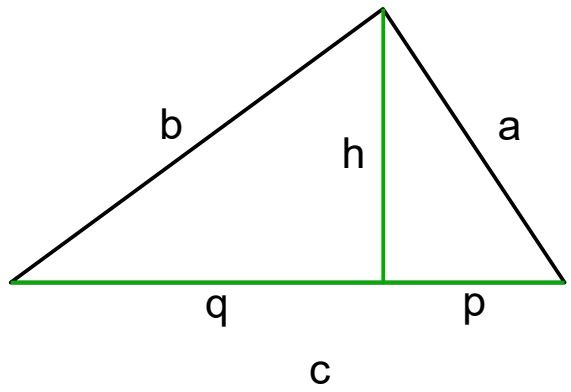
Fotograf : Lakey, Die Pythagoras-Statue auf der griechischen Insel Samos.

Höhensatz und Kathetensätze von Euklid (~ 300 v. Chr.)

Im rechtwinkligen Dreieck gelten :

$$\boxed{h^2 = pq}$$

Höhensatz



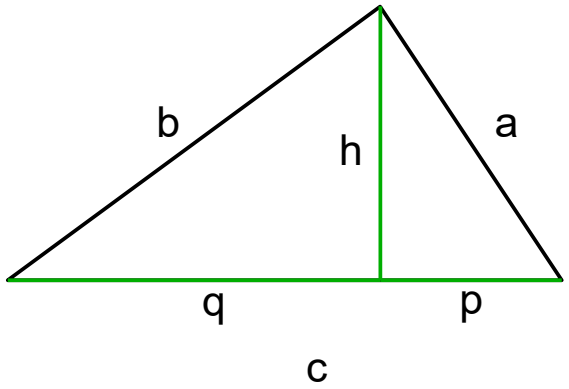
$$\boxed{a^2 = pc}$$

Kathetensätze

$$\boxed{b^2 = qc}$$

Beweis :

$$\left.\begin{aligned} h^2 + p^2 &= a^2 \\ h^2 + q^2 &= b^2 \end{aligned}\right\} \quad 2h^2 + p^2 + q^2 = a^2 + b^2$$



$$(p + q)^2 = a^2 + b^2$$

$$(p + q)^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$$

$$p^2 + 2pq + q^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$$

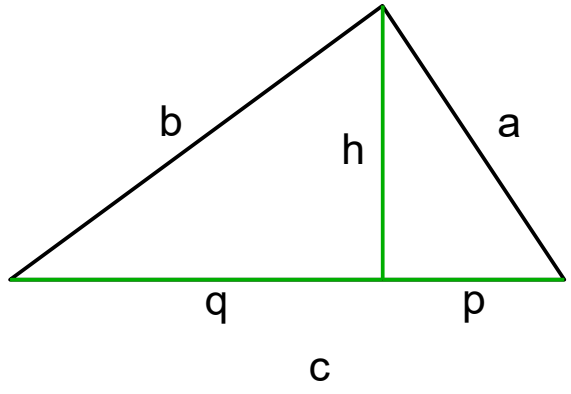
$$2pq = 2h^2$$

$$pq = h^2$$

$$\boxed{h^2 = pq}$$

$$a^2 = h^2 + p^2$$

$$h^2 = pq$$



$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$a^2 = p^2 + pq$$

$$a^2 = p(p + q)$$

$$\boxed{a^2 = pc}$$

Analog : $\boxed{b^2 = qc}$

Statue des Euklid an der Universität Oxford

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:EuclidStatueOxford.jpg

Strahlensätze

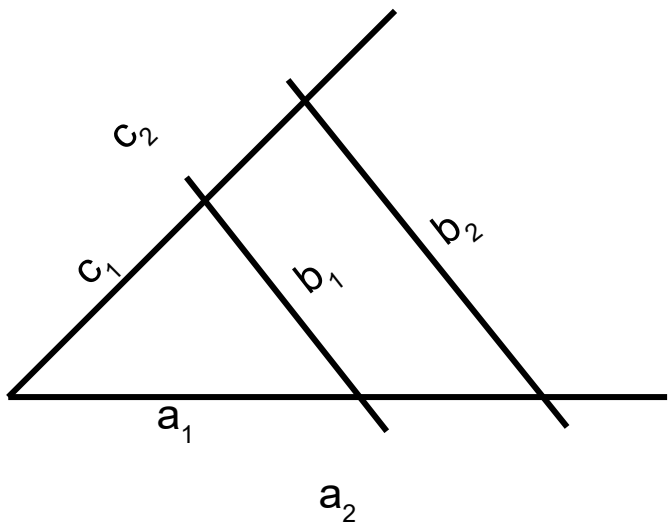
Werden zwei Halbgeraden (Strahlen) mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei parallelen Geraden geschnitten, so gelten für die entsprechenden Abschnitte auf den Strahlen bzw. Parallelen folgende Gleichungen :

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

1. Strahlensatz

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}} \qquad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

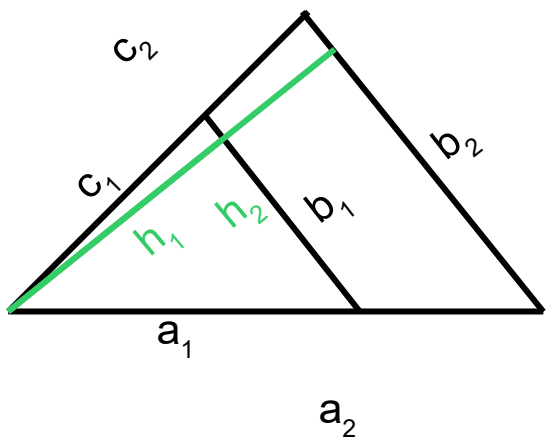
2. Strahlensatz



Kurzversion :

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

1. Beweis :



Flächenbetrachtung der Dreiecke $\Delta a_2 b_2 c_2$, $\Delta a_1 b_1 c_1$ und des Trapezes :

$$\frac{b_2 h_2}{2} = \frac{b_1 h_1}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2}\left(h_2 - h_1\right)$$

$$b_2 h_2 = b_1 h_1 + \left(b_1 + b_2\right)\left(h_2 - h_1\right)$$

$$b_2h_2 = b_1h_1 + (b_1+b_2)(h_2-h_1)$$

$$b_2h_2 = b_1h_1 + b_1h_2 - b_1h_1 + b_2h_2 - b_2h_1$$

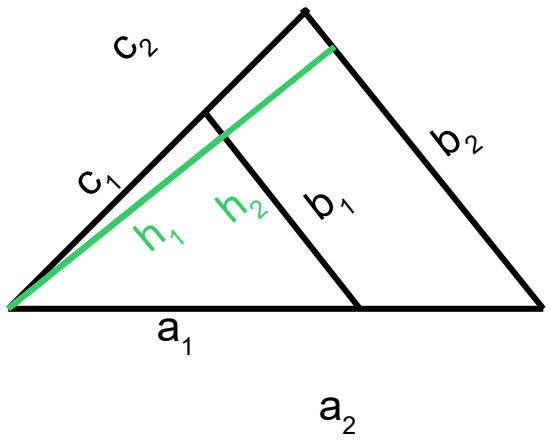
$$\cancel{b_2h_2} = \cancel{b_1h_1} + b_1h_2 - \cancel{b_1h_1} + \cancel{b_2h_2} - b_2h_1$$

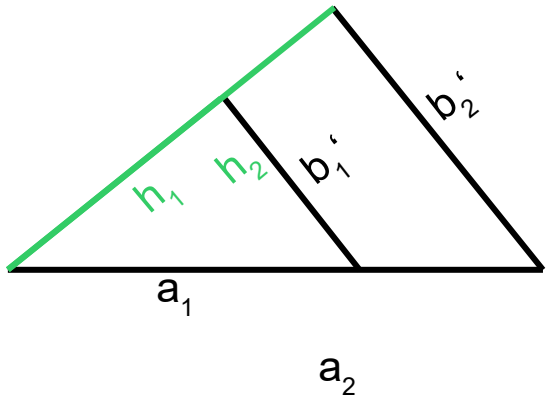
$$0 = b_1h_2 - b_2h_1$$

$$b_2h_1 = b_1h_2$$

$$\boxed{\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1}}$$

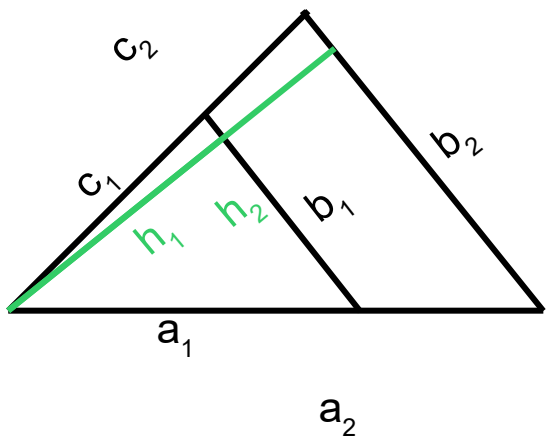
Die **Flächenbetrachtung** der Dreiecke $\Delta a_2 b_2' h_2$, $\Delta a_1 b_1' h_1$ und des entsprechenden Trapezes liefert :

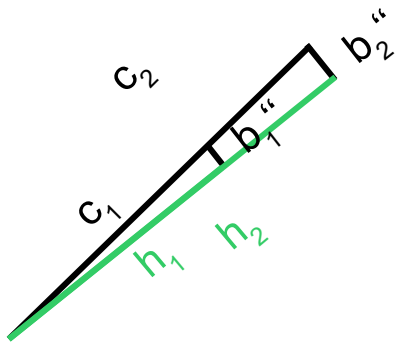




$$\boxed{\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{h_2}{h_1}}$$

Die **Flächenbetrachtung** der Dreiecke $\Delta c_2 b_2'' h_2$ $\Delta c_1 b_1'' h_1$ und des entsprechenden Trapezes liefert :



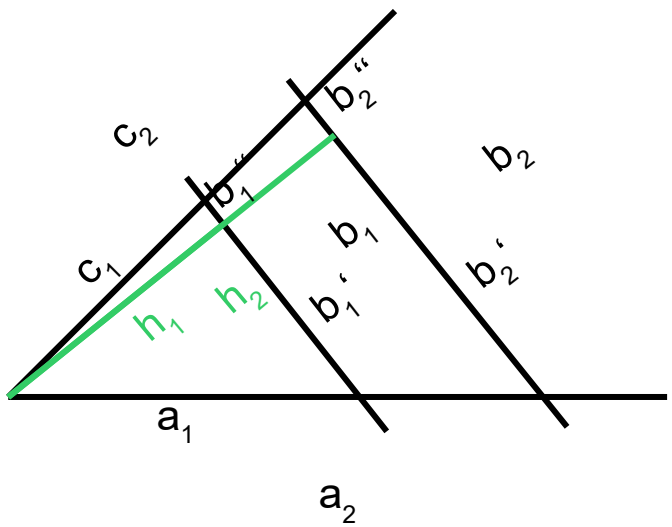


$$\boxed{\frac{b_2''}{b_1''} = \frac{h_2}{h_1}}$$

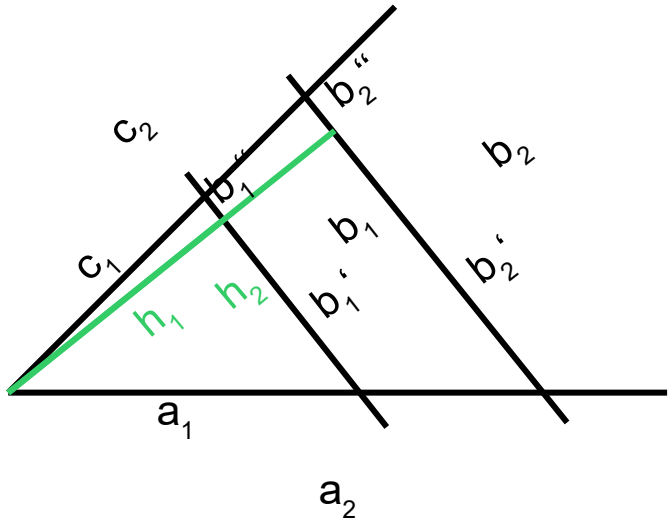
Insgesamt hat man jetzt folgende Gleichungen :

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2'}{b_1'} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2''}{b_1''} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \qquad b_2' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1' \qquad b_2'' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1''$$



$$b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \qquad b_2' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1' \qquad b_2'' = \frac{h_2}{h_1}\, b_1''$$



Mit dem Satz des Pythagoras folgt :

$$a_2 = \sqrt{h_2^{\,2} + b_2'^{\,2}}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\, h_1\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\, b_1'\right)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\ h_1\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\ b_1'\right)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 h_1^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 b_1'^2}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left(h_1^2 + b_1'^2\right)}$$

$$a_2 = \frac{h_2}{h_1}\ \sqrt{\left(h_1^2 + b_1'^2\right)}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{h_2}{h_1}\ a_1}$$

Analog $\boxed{c_2 = \frac{h_2}{h_1}\ c_1}$

Man hat nun drei Gleichungen

$$a_2 = \frac{h_2}{h_1}\, a_1 \quad , \quad b_2 = \frac{h_2}{h_1}\, b_1 \quad , \quad c_2 = \frac{h_2}{h_1}\, c_1 \quad ,$$

die man wie folgt umformen kann :

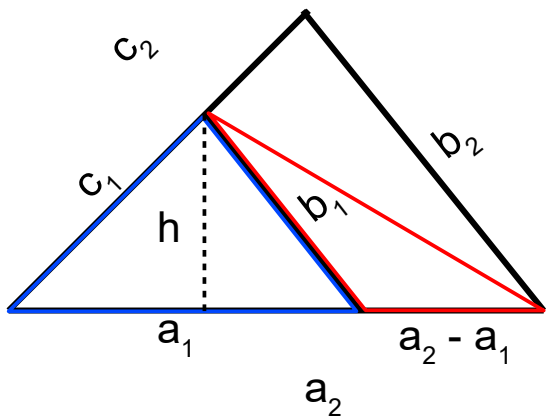
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} \qquad \frac{c_2}{c_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

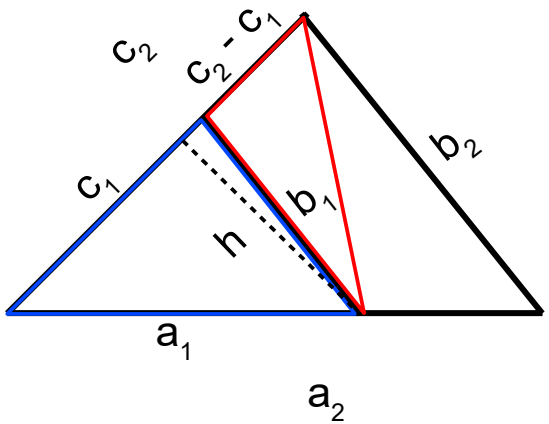
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}} \qquad \boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}} \qquad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

1. Strahlensatz **2. Strahlensatz**

2. Beweis :





Die beiden roten Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt Δ , weil Grundseite und Höhe gleich sind. Für das Verhältnis Δ zu Δ folgt :

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\frac{(a_2 - a_1)h}{2}}{\frac{a_1 h}{2}} \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\frac{(c_2 - c_1)h}{2}}{\frac{c_1 h}{2}}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

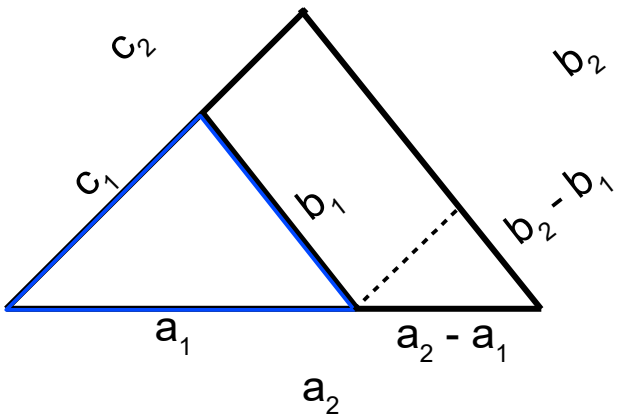
$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} \qquad \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

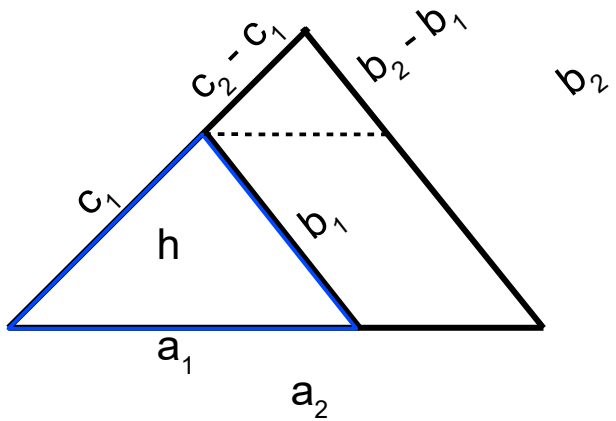
$$\Rightarrow \quad \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}}$$

1. Strahlensatz





$$\frac{a_2 - a_1}{a_2} = \frac{b_2 - b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{a_1}{a_2} = 1 - \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

$$\frac{c_2 - c_1}{c_2} = \frac{b_2 - b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{c_1}{c_2} = 1 - \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

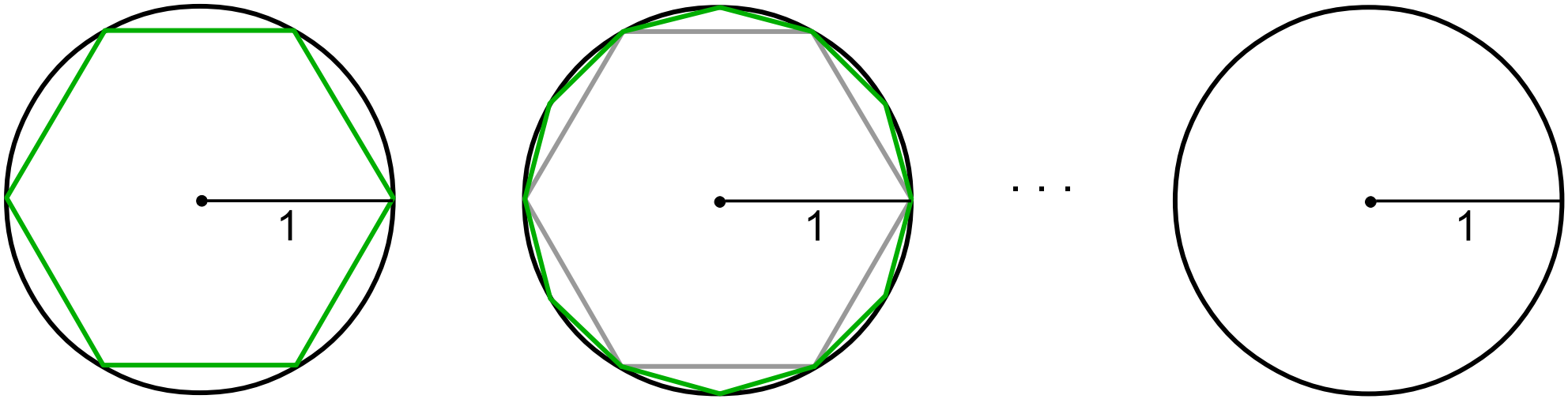
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_2}{b_1}}$$

2. Strahlensatz

Die Kreismessung des Archimedes

Zur näherungsweisen Bestimmung des Kreisumfangs betrachtet Archimedes zunächst einen Kreis mit Radius 1 **(Einheitskreis)** und eine **Folge von regulären Vielecken**, die dem Kreis einbeschrieben sind und diesen immer besser annähern .
Genauer gesagt betrachtete er die durch **Eckenverdopplung** erhaltene **Vieleckfolge**

6-Eck , **12-Eck** , **24-Eck** , **48-Eck** , **96-Eck** , ...



Für die Umfänge U_n der Vieleckfolge, die den Kreisumfang U immer besser annähern, gilt :

$$U_6 < U_{12} < U_{24} < U_{48} < U_{96} < \ldots < U_n < U_{2n} < U$$

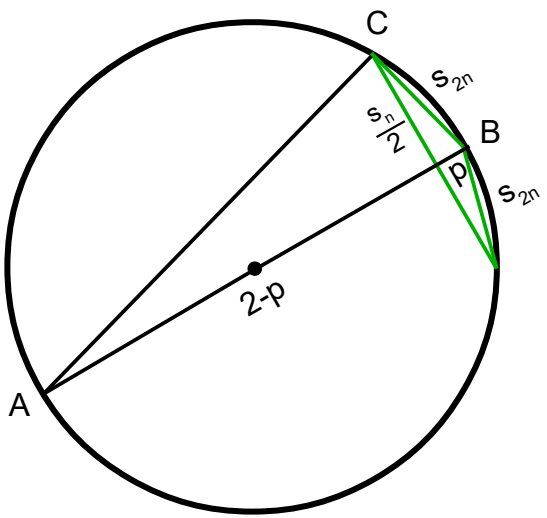
Die Folge der Vielecksumfänge strebt gegen den Kreisumfang :

$$U_n \longrightarrow U \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

Archimedes lieferte für den **Kreisumfang** U **des Einheitskreises** mittels einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecken bis zum 96-Eck folgende Abschätzung nach unten und oben :

$$\boxed{2 \cdot 3\frac{10}{71} < U < 2 \cdot 3\frac{10}{70}}$$

Man kann die Vieleckseite s_{2n} aus der Vieleckseite s_n berechnen :



Satz von Thales :

$$<C = 90°$$

Höhensatz :

$$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = p(2-p)$$

Kathetensatz :

$$s_{2n}^2 = 2p$$

$$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = p(2-p)$$

$$s_{2n}^2 = 2p$$

$$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 2p - p^2$$

$$p^2 - 2p + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = 0$$

$$p = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

$$s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{\frac{4 - s_n^2}{4}}$$

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$$

$$\boxed{s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

Sukzessive Berechnungen mit dem Taschenrechner

$$s_6 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_6 = 6 \cdot 1 = 6$$

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}}$$
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad u_{12} = 12 \cdot s_{12} = 6{,}211657082$$
$$s_{12}^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$$
$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{3}\right)}}$$
$$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \quad \Rightarrow \quad u_{24} = 24 \cdot s_{24} = 6{,}265257227$$
$$s_{24}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$$

$$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}}$$

$$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \quad \Rightarrow \quad u_{48} = 48 \cdot s_{48} = 6{,}278700406$$

$$s_{48}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$$

$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)}}$$

$$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \quad \Rightarrow \quad u_{96} = 96 \cdot s_{96} = ?$$

Hier streikt der **TI-30X PLUS MathPrint** !

$$s_{96}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Das Eingabeproblem am **TI-30X PLUS MathPrint** kann man wie folgt umgehen, indem man mit den Tasten [enter] und [2nd] [(-)] arbeitet :

$$s_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \quad \Rightarrow \quad u_{96} = 96 \cdot s_{96}$$

[2nd] [x^2] [3] [enter]

[2nd] [x^2] [2nd] [(-)] [+] [2] [enter]

[2nd] [x^2] [2nd] [+] [2] [enter]

[2nd] [x^2] [2nd] [(-)] [+] [2] [enter]

[2nd] [x^2] [(-)] [2nd] [(-)] [+] [2] [enter] 0.065438166

[9] [6] [x] [2nd] [(-)] [enter] 6,282063902

Sukzessive Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation

$$s_6 = 1$$

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad , \quad n = 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$$

n	s_n	$u_n = n * s_n$	$u_n / 2$
6	1,000000000	6,000000000	3,000000000
12	0,517638090	6,211657082	3,105828541
24	0,261052384	6,265257227	3,132628613
48	0,130806258	6,278700406	3,139350203
96	0,065438166	6,282063902	3,141031951
192	0,032723463	6,282904945	3,141452472
384	0,016362279	6,283115216	3,141557608
768	0,008181208	6,283167784	3,141583892
1536	0,004090613	6,283180926	3,141590463
3072	0,002045307	6,283184212	3,141592106

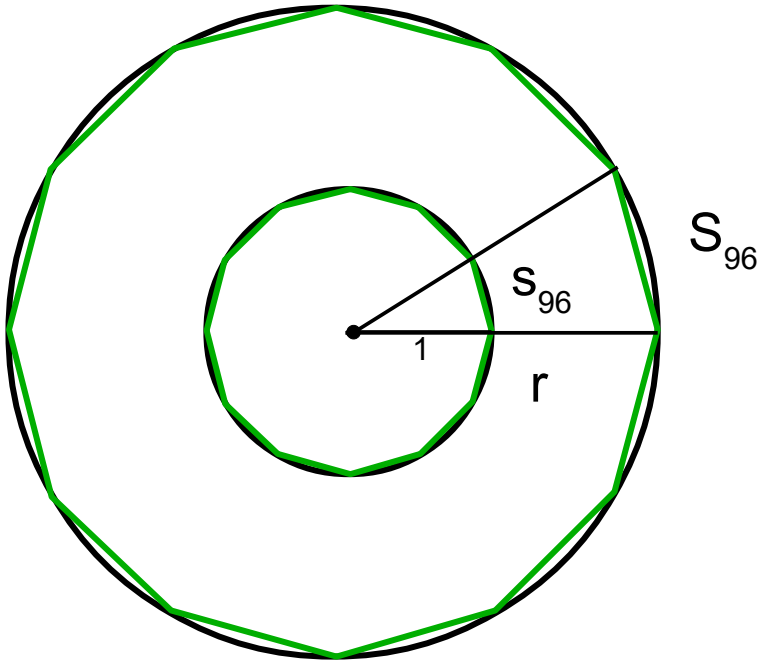
Der Umfang des regulären 96-Ecks im Einheitskreis ist :

$u_{96} = 6{,}282063902$

Die ersten beiden Nachkommastellen sind sicher, wie man aus der Tabelle sieht !

$u_{96} = 6{,}28$

Der Umfang des 96-Ecks in einem Kreis mit Radius r wird mit Hilfe der Strahlensätze bestimmt zu :



$$\frac{S_{96}}{s_{96}} = \frac{r}{1} \Rightarrow S_{96} = s_{96}\, r$$

$$U_{96} = 96\, S_{96}$$

$$U_{96} = 96\, s_{96}\, r$$

$$U_{96} = 6{,}28\, r$$

$$\boxed{U_{96} = 2 \cdot 3{,}14\ r}$$

$$\boxed{U_{96} = 3{,}14\ d}\ ,\quad d = 2r$$

Denkt man sich den Näherungsprozess für den **Umfang eines Kreises mit dem Radius** r unbeschränkt fortgesetzt , würde man schließlich den Ausdruck $U = 2 \pi r$ erhalten :

$$U_n \;,\; n = 6,\ 12,\ 24,\ \ldots \longrightarrow \boxed{U = 2 \pi r} \quad \text{mit} \quad \pi \approx 3{,}14 \quad \text{als Näherungswert}$$

Die Zahl π heißt Kreiszahl !

Der **Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius** r ist :

$$A_n = \frac{1}{2} U_n h_n \longrightarrow A = \frac{1}{2} U r = \frac{1}{2} 2 \pi r r$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} U r = \pi r^2}$$