

Potenzen, Exponential- und Logarithmusfunktion

Arno Fehringer , Juli 2023

Quellen :

Kaballo, Winfried : Einführung in die Analysis I ; Spektrum Akademischer Verlag 1995

Wittstock, G. : Vorlesungsskript zu Analysis 1 ; Universität Saarbrücken , WS2000-2001

math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS00/analysis1/

Reelle Zahlen

Die **Existenz der n-ten Wurzel** von positiven rationalen Zahlen wird durch das **Axiom der Intervallschachtelung** gesichert .

Axiom der Intervallschachtelung

Jede rationale Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, also eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$, hat genau ein

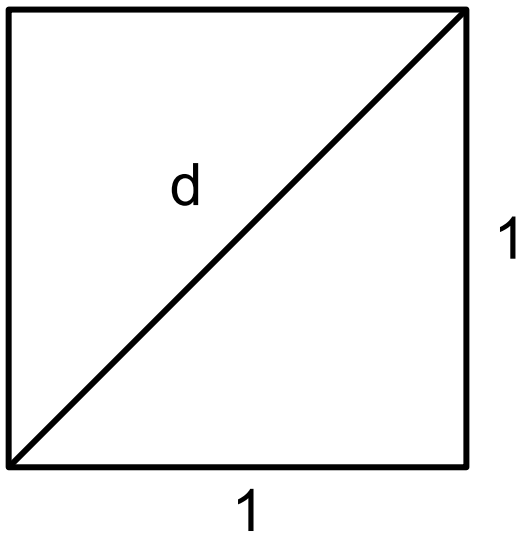
Zentrum x , eine Zahl, für die gilt $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das Zentrum kann eine rationale oder eine neue Art von Zahl, eine sogenannte reelle Zahl sein.

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$.

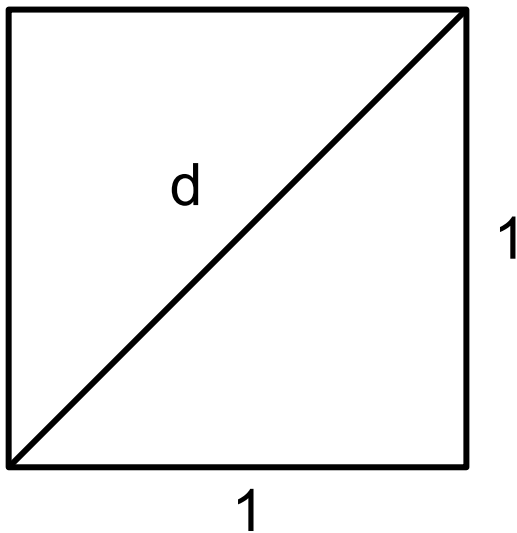
Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !



Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !

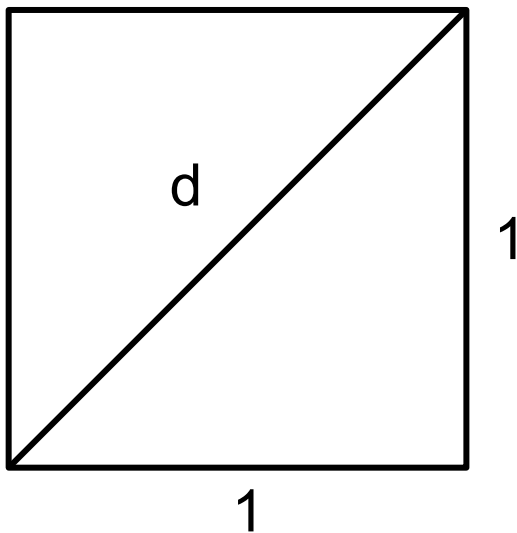


$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$1 < d < 2$$

$$1,4 < d < 1,5$$

$$1,41 < d < 1,42$$

$$1,414 < d < 1,415$$

Intervallschachtelung :

$$[1;2] \supset [1,4;1,5] \supset [1,41;1,42] \supset [1,414;1,415] \supset \dots$$

Die Intervalllängen nehmen monoton ab :

$$1 > 0,1 > 0,01 > 0,001 > \dots$$

Die Diagonale d im Einheitsquadrat ist keine rationale Zahl .

Beweis :

Angenommen, $d = \frac{Z}{N}$ maximal gekürzt .

Wegen $d^2 = 2$ gilt $\left(\frac{Z}{N}\right)^2 = 2$.

$$\frac{Z^2}{N^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(2Z')^2}{N^2} = 2$$

$$Z^2 = 2N^2 \text{ gerade}$$

$$2Z'^2 = N^2 \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow Z \text{ gerade, } Z = 2Z'$$

$$\Rightarrow N \text{ gerade, } N = 2N'$$

Der Bruch $\frac{Z}{N}$ wäre also durch 2 kürzbar, im Widerspruch zur Annahme !

q.e.d.

Ergebnis :

Man kann die Existenz der Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat nur über eine Intervallschachtelung wie angegeben axiomatisch sichern !

Die durch Intervallschachtelungen definierten Zahlen fügt man den rationalen Zahlen hinzu und erhält so die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen !

Eigenschaft der reellen Zahlen :

Jede reelle Zahl ist durch eine rationale Intervallschachtelung festgelegt .

Alle Grundrechenarten übertragen sich auf die Menge der reellen Zahlen.

Außerdem fordert man, dass das **Axiom der Intervallschachtelung** entsprechend für **reelle Intervallschachtelungen** gilt !

Rechnen mit reellen Zahlen

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $[c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann definiert man mit Hilfe der **Grenzwertsätze** die Grundrechenarten für reelle Zahlen wie folgt :

$$x + y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_n$$

$$x - y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n$$

$$x \cdot y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n$$

$$x : y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : c_n, \text{ falls } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$$

Potenzrechnung

Definition :

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $b > 0$ heißt die Zahl b^n die n -te **Potenz zur Basis** b . Die Zahl n heißt **Exponent** .

$b^n := b \cdot \dots \cdot b$ Produkt bestehend aus n Faktoren b

Für $n, m \in \mathbb{N}$, $b > 0$ gelten folgende Regeln :

I $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

II $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, falls $n \geq m$

III $(b^n)^m = b^{n \cdot m}$

Möchte man, dass die **Divisionsregel II** auch für den Fall $n < m+2$ gilt muss man Folgendes definieren :

$$n = m+1 : \quad b = \frac{b^{m+1}}{b^m} = b^{m+1-m} = b^1 \quad \text{also } \underline{b^1 := b}$$

$$n = m : \quad 1 = \frac{b^m}{b^m} = b^{m-m} = b^0 \quad \text{also } \underline{b^0 := 1}$$

$$n < m : \quad \frac{1}{b^{(m-n)}} = \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} = b^{-(m-n)} \quad \text{also } \underline{b^{-n} := \frac{1}{b^n}}$$

Man muss nun prüfen, ob für Potenzen b^q , $q \in \mathbb{Q}$ ebenfalls die Rechenregeln I , II, III gelten .

Man muss nun prüfen, ob für Potenzen b^n , $n \in \mathbb{Z}$ ebenfalls die Rechenregeln I, II, III gelten?

I $b^{-n} \cdot b^{-m} =$

$$b^n \cdot b^{-m} =$$

$$b^{-n} \cdot b^m =$$

II $\frac{b^{-n}}{b^{-m}} =$

$$\frac{b^n}{b^{-m}} =$$

$$\frac{b^{-n}}{b^m} =$$

$$\text{III} \quad \left(b^{-n}\right)^{-m} =$$

$$\left(b^n\right)^{-m} =$$

$$\left(b^{-n}\right)^m =$$

Man muss nun prüfen, ob für Potenzen b^n , $n \in \mathbb{Z}$ ebenfalls die Rechenregeln I, II, III gelten?

$$\text{I} \quad b^{-n} \cdot b^{-m} = \frac{1}{b^n} \frac{1}{b^m} = \frac{1}{b^{n+m}} = b^{-(n+m)} = b^{-n + (-m)}$$

$$b^n \cdot b^{-m} = b^n \frac{1}{b^m} = \left\{ \begin{array}{ll} b^{n-m} = b^{n + (-m)} & \text{für } n \geq m \\ \frac{1}{b^{m-n}} = b^{-(m-n)} = b^{n+(-m)} & \text{für } n < m \end{array} \right\}$$

Analog :

$$b^{-n} \cdot b^m = b^{-n + m}$$

Analog :

$$\text{II} \quad \frac{b^{-n}}{b^{-m}} = b^{-n - (-m)}$$

$$\frac{b^n}{b^{-m}} = b^{n - (-m)}$$

$$\frac{b^{-n}}{b^m} = b^{-n-m}$$

$$\text{III} \quad (b^{-n})^{-m} = b^{(-n)(-m)}$$

$$(b^n)^{-m} = b^{n(-m)}$$

$$(b^{-n})^m = b^{(-n)m}$$

Nachdem **Potenzen mit ganzzahligen Exponenten** erklärt wurden, kann man sich an die Erklärung von **Potenzen mit gebrochenen Exponenten** machen :

$$b^q = ? , q \in \mathbb{Q}$$

$$\left(b^{\frac{1}{N}}\right)^N = b^{\frac{1}{N} \cdot N}$$

$$b^{\frac{Z}{N}} = b^{\frac{1}{N} \cdot Z}$$

$$b^{\frac{Z}{N}} = b^{Z \cdot \frac{1}{N}}$$

$$\left(b^{\frac{1}{N}}\right)^N = b$$

$$b^{\frac{Z}{N}} = \left(b^{\frac{1}{N}}\right)^Z$$

$$b^{\frac{Z}{N}} = \left(b^Z\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$\underline{b^{\frac{1}{N}} := \sqrt[N]{b}}$$

$$\underline{b^{\frac{Z}{N}} := \sqrt[N]{b^Z}}$$

$$\underline{b^{\frac{Z}{N}} := \sqrt[N]{b^Z}}$$

Zu Zeigen : $\sqrt[N]{b^Z} = \sqrt[N]{b^Z} , \quad \sqrt[v]{\sqrt[N]{b}}^{vZ} = \sqrt[N]{b^Z}$

Zu Zeigen : $\sqrt[N]{b^z} = \sqrt[N]{b^z}$, $\sqrt[vN]{b^{vz}} = \sqrt[N]{b^z}$

Beweis :

$$\sqrt[N]{b^z} = \sqrt[N]{b^z}$$

$$\sqrt[vN]{b^{vz}} = \sqrt[N]{b^z}$$

$$\left(\sqrt[N]{b^z}\right)^N = \left(\sqrt[N]{b^z}\right)^N$$

$$\sqrt[vN]{b^{vz}} = \sqrt[N]{b^z}$$

$$\sqrt[N]{b^{zN}} = b^z$$

$$\left(\sqrt[vN]{b^{vz}}\right)^{vN} = \left(\sqrt[N]{b^z}\right)^{vN}$$

$$\sqrt[N]{b^{Nz}} = b^z$$

$$b^{vz} = \left(\sqrt[N]{b^N}\right)^{vz}$$

$$\left(\sqrt[N]{b^N}\right)^z = b^z$$

$$b^{vz} = b^{vz} \text{ [wahr]}$$

$$b^z = b^z \text{ [wahr]}$$

Entsprechend muss man prüfen, ob für Potenzen $b^{\frac{z}{N}}$, $\frac{z}{N} \in \mathbb{Q}$ ebenfalls die Rechenregeln I, II, III gelten ?

I $b^{\frac{z_1}{N}} \cdot b^{\frac{z_2}{N}} =$

II $\frac{b^{\frac{z_1}{N}}}{b^{\frac{z_2}{N}}} =$

III $\left(b^{\frac{z_1}{N}}\right)^{\frac{z_2}{N}} =$

Entsprechend muss man prüfen, ob für Potenzen $b^{\frac{Z}{N}}$, $\frac{Z}{N} \in \mathbb{Q}$ ebenfalls die Rechenregeln I, II, III gelten?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien zum Nachweis der Multiplikations- und Divisionsregel die Brüche nennergleich!

$$\text{I} \quad b^{\frac{Z_1}{N}} \cdot b^{\frac{Z_2}{N}} = \sqrt[N]{b^{Z_1}} \cdot \sqrt[N]{b^{Z_2}} = \sqrt[N]{b^{Z_1+Z_2}} = b^{\frac{Z_1+Z_2}{N}} = b^{\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N}}$$

$$\text{II} \quad \frac{b^{\frac{Z_1}{N}}}{b^{\frac{Z_2}{N}}} = b^{\frac{Z_1}{N} - \frac{Z_2}{N}} \quad \text{analoger Beweis}$$

$$\text{III} \quad \left(b^{\frac{Z_1}{N_1}} \right)^{\frac{Z_2}{N_2}} = \sqrt[N_1]{\sqrt[N_2]{b^{Z_1 Z_2}}} = \sqrt[N_1 N_2]{b^{Z_1 Z_2}} = \sqrt[N_1 N_2]{b^{Z_1 Z_2}} = b^{\frac{Z_1 Z_2}{N_1 N_2}} = b^{\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2}}$$

Die Fortsetzung der Exponentialfunktion von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$

Man kann zeigen, dass es für die Exponentialfunktion $y = b^q$, $q \in \mathbb{Q}$ stetig erweitert werden kann zu einer Funktion $y = b^x$, $x \in \mathbb{R}$, indem man definiert :

Sei $[a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$ eine rationale Intervallschachtelung zu $x \in \mathbb{R}$.

$$b^x := \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n}$$

Bemerkung :

Ausführliche Erklärungen hierzu findet man im **Mathematischen Anhang** ab **Seite 47** des Skripts !

Die Potenzgesetze für die fortgesetzte Exponentialfunktion $y = b^x$, $b > 1$, $x \in \mathbb{R}$ gelten ebenfalls :

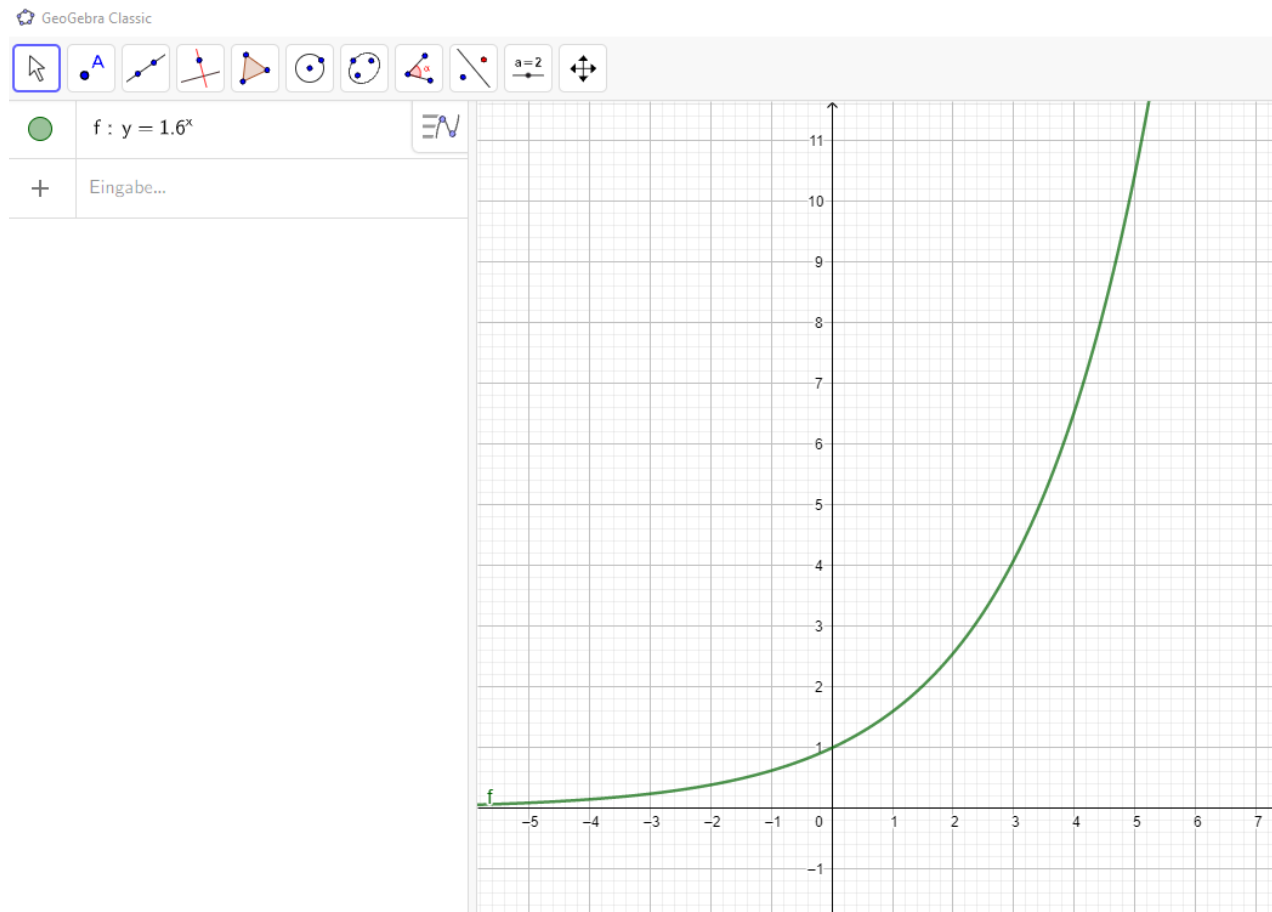
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $[c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad b^x \cdot b^y &= \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} \cdot b^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n + c_n} = \\ &= b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x + y} \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad \frac{b^x}{b^y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{a_n}}{b^{c_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n - c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x - y}$$

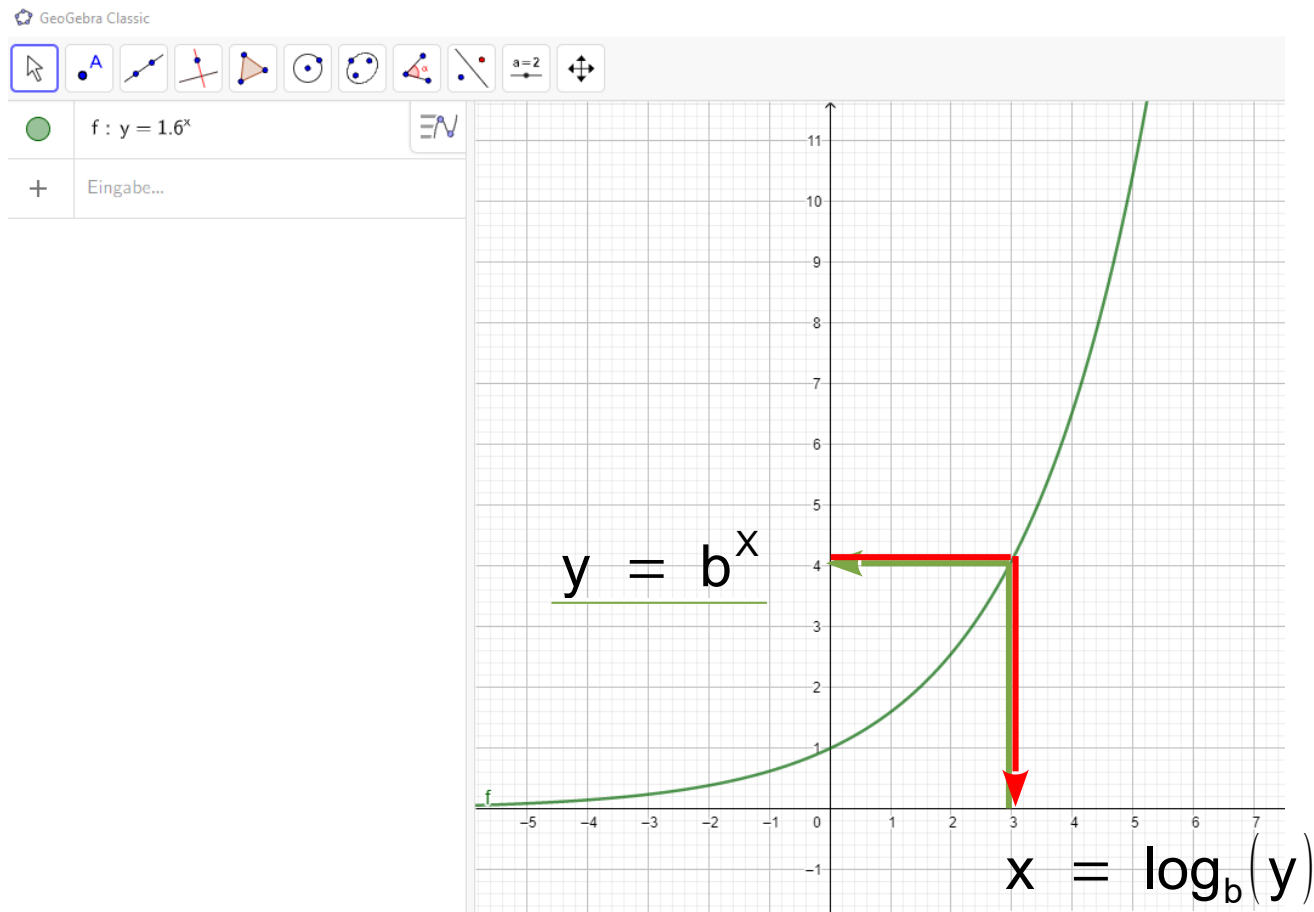
$$\text{III} \quad (b^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{a_n})^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n \cdot c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x \cdot y}$$

Das Schaubild der Exponentialfunktion $y = b^x$, $b > 1$, $x \in \mathbb{R}$



Man kann zeigen , dass die Funktion $y = b^x$, $b > 1$, $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und surjektiv ist, und deshalb eine Umkehrfunktion $x = \log_b(y)$, nämlich die Logarithmusfunktion zur Basis b , besitzt .

(Vgl. Mathematischer Anhang ab **Seite 47** des Skripts)



Es gelten folgende Logarithmengesetze :

Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion sind Umkehrfunktionen voneinander :

$$b^{\log_b(y)} = y \quad \log_b(b^x) = x$$

I $\log_b(y_1 \cdot y_2) = \log_b(y_1) + \log_b(y_2)$

II $\log_b\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_b(y_1) - \log_b(y_2)$

III $\log_b(y^n) = n \cdot \log_b(y)$

Beweis :

Seien $y_1 = b^{x_1}$, $y_2 = b^{x_2}$ gegeben .

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \log_b(y_1 \cdot y_2) &= \log_b(b^{x_1} \cdot b^{x_2}) = \log_b(b^{x_1 + x_2}) = x_1 + x_2 = \\ &= \log_b(y_1) + \log_b(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad \log_b\left(\frac{y_1}{y_2}\right) &= \log_b\left(\frac{b^{x_1}}{b^{x_2}}\right) = \log_b(b^{x_1 - x_2}) = x_1 - x_2 = \\ &= \log_b(y_1) - \log_b(y_2) \end{aligned}$$

$$\text{III} \quad \log_b(y^n) = \log_b((b^x)^n) = \log_b(b^{n \cdot x}) = n \cdot x = n \cdot \log_b(y)$$

Die Eulersche Zahl e

(Leonhard Euler , 1707 – 1783, Schweizer Mathematiker)

Man betrachtet die unterjährig Zinseszinsung Kapitals $K_0 = 1$ zum Zinssatz $p = 100\% = 1$ pro Jahr in n Zinsperioden:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n$$

$$K = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Gibt es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$?

Behauptung:

Die Intervallfolge $\left[e_n ; f_n \right]_{n \in \mathbb{N}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ; \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right]_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung und hat demzufolge das Zentrum

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} .$$

Beweis:

Die Folge $e_n := \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ ist monoton steigend, was man durch Abschätzung mit Hilfe der **Bernoullischen Ungleichung** $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$, für zeigen kann:

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \\
&= \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \geq \left(1 - (n+1) \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1
\end{aligned}$$

Die Folge $f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend :

$$\begin{aligned}
 \frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \\
 &= \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2 - 1 + 1}{(n+1)^2 - 1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + (n+2) \frac{1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1
 \end{aligned}$$

Außerdem sind

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und

$$\begin{aligned} f_n - e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) , \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{n} \end{aligned}$$

das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n - e_n = 0$.

Also haben wir eine Intervallschachtelung mit dem Zentrum e

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

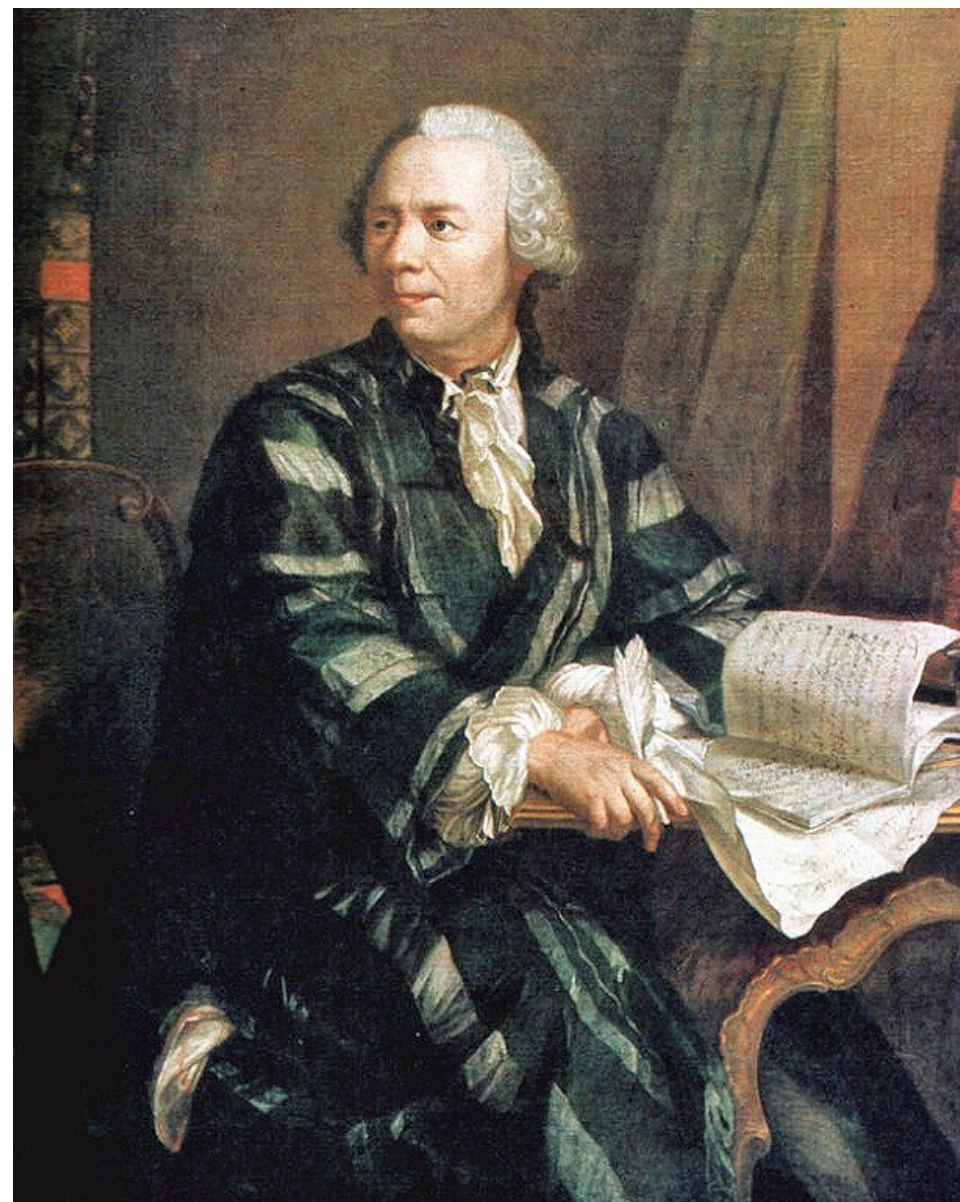
$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

Die Zahl e heißt **Eulersche Zahl**, nach **Leonhard Euler** , 1707 – 1783, Schweizer Mathematiker .

Ein Näherungswert ist $e \approx 2,718$.

Leonhard Euler (1707 - 1783),
Pastell von Emanuel Handmann, 1756

https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler



Stetige Verzinsung allgemein

Man betrachtet die unterjährig Zinseszinsung eines Kapitals $K_0 = 1$ zum Zinssatz p pro Jahr in n Zinsperioden:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n, \quad p \in \mathbb{Q}, \quad p \geq 0$$

$$K = \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n, \quad p \in \mathbb{Q}, \quad p \geq 0$$

Gibt es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n$?

Gibt es den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$?

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass

$$0 \leq \frac{p}{n} \leq 1 \text{ ist, also } \frac{n}{p} \geq 1 .$$

Zu jedem n gibt es dann ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$k_n \leq \frac{n}{p} \leq k_n + 1 , \text{ also } \frac{1}{k_n + 1} \leq \frac{p}{n} \leq \frac{1}{k_n} .$$

Dann folgt:

$$1 + \frac{1}{k_n + 1} \leq 1 + \frac{p}{n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}$$
$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1}\right)^p \leq \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \leq \left(\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)\right)^p$$

Die linke und die rechte Seite streben wegen der Stetigkeit der Funktion $y = x^p$, $p \in \mathbb{Q}$ jeweils gegen $(e \cdot 1)^p = e^p$.

Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p$.

Definition :

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ für $x \geq 0$, und $f(x) = \frac{1}{e^{-x}}$ für $x < 0$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis e** oder **Natürliche Exponentialfunktion** .

Die Ableitung der Natürlichen Exponentialfunktion

Man kann annehmen, dass die Natürliche Exponentialfunktion stetig fortgesetzt ist durch die Funktion $f(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$(e^x)' = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Frage : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = ?$

Frage : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = ?$

Setzt man speziell $h = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, so folgt :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}$$

$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1}$$

$$1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n-1} = 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$.

Setzt man speziell $h = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, so folgt :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \\ \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} &< e^{-1} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} &< e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ \frac{n-1}{n} &< e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{n-1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1}$$

$$1 - \frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < -\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

$$1 - \frac{1}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

$$1 - \frac{1}{n+1} < \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} < 1$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = 1$.

Sei nun $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $h_n > 0$, eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$.

Dann gilt nacheinander :

$$|h_n| \leq 1 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$k_n \leq \frac{1}{h_n} \leq k_n + 1 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{k_n + 1} \leq |h_n| \leq \frac{1}{k_n}, \quad k_n \in \mathbb{N} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{1}{k_n} \leq h_n \leq -\frac{1}{k_n + 1} < 0 \text{ oder } 0 < \frac{1}{k_n + 1} \leq h_n \leq \frac{1}{k_n}, \quad k_n \in \mathbb{N} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

$-\frac{1}{k_n} \leq h_n \leq -\frac{1}{k_n+1} < 0$ oder $0 < \frac{1}{k_n+1} \leq h_n \leq \frac{1}{k_n}$, $k_n \in \mathbb{N}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$.

Dann folgt :

$$-\frac{1}{k_n} \leq h_n \leq -\frac{1}{k_n+1} \quad \text{oder} \quad e^{\frac{1}{k_n+1}} \leq e^{h_n} \leq e^{\frac{1}{k_n}}$$

$$e^{-\frac{1}{k_n}} - 1 \leq e^{h_n} - 1 \leq e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1 \quad \text{oder} \quad e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1 \leq e^{h_n} - 1 \leq e^{\frac{1}{k_n}} - 1$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{h_n} \quad \text{oder} \quad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{h_n}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{-\frac{1}{k_n+1}} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{-\frac{1}{k_n}} \quad \text{oder} \quad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{\frac{1}{k_n+1}} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{\frac{1}{k_n}}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{k_n}} - 1}{-\frac{1}{k_n}} \cdot \frac{k_n+1}{k_n} \geq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \geq \frac{e^{-\frac{1}{k_n+1}} - 1}{-\frac{1}{k_n+1}} \cdot \frac{k_n}{k_n+1}$$

$$\text{oder} \quad \frac{e^{\frac{1}{k_n+1}} - 1}{\frac{1}{k_n+1}} \leq \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{k_n}} - 1}{\frac{1}{k_n}}$$

Das heißt, die Grenzwerte sind in beiden Fällen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{h_n} - 1}{h_n} = 1$, und es folgt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ und $(e^x)' = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$.

Ergebnis :

Die Ableitung der Funktion $y = e^x$ ist gleich der Funktion $y = e^x$.

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \quad .$$

q.e.d.

Die Umkehrfunktion der Natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$ ist die **Natürliche Logarithmusfunktion** $x = \log_e(y) =: \ln(y)$.

Die Ableitung der Exponentialfunktion $y = b^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$y = b^x$$

$$y = \left(e^{\ln(b)}\right)^x$$

$$y = e^{\ln(b) \cdot x}$$

$$y' = e^{\ln(b) \cdot x} \cdot \ln(b)$$

$$y' = b^x \cdot \ln(b)$$

Mathematischer Anhang

Reelle Zahlen

Die Existenz der n -ten Wurzel von positiven rationalen Zahlen wird durch das Axiom der Intervallschachtelung gesichert .

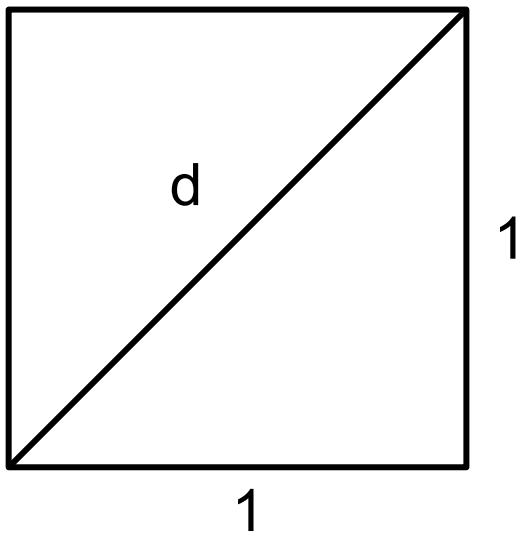
Axiom der Intervallschachtelung

Jede rationale Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, also eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$, hat genau ein Zentrum x , eine Zahl, für die gilt $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das Zentrum kann eine rationale oder eine neue Art von Zahl, nämlich eine reelle Zahl sein. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

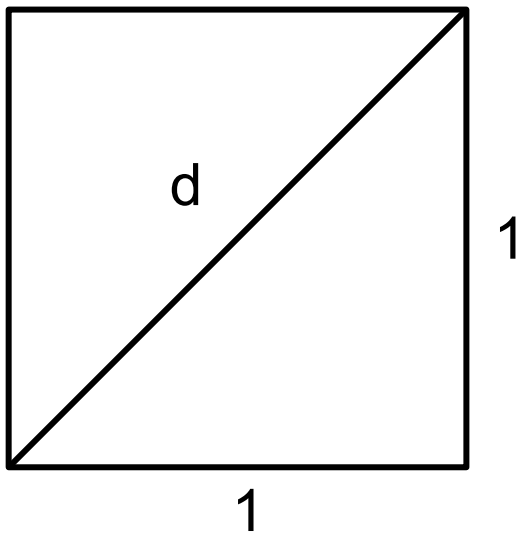
Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !



Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !

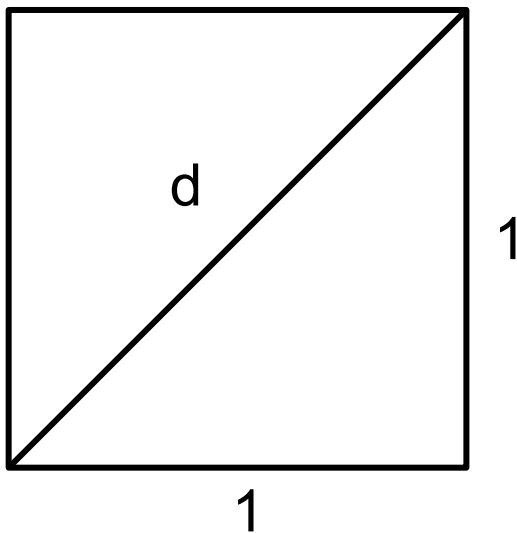


$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

Beispiel :

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge 1 . Man berechne die Länge d der Diagonalen !



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$1 < d < 2$$

$$1,4 < d < 1,5$$

$$1,41 < d < 1,42$$

$$1,414 < d < 1,415$$

Intervallschachtelung :

$$[1;2] \supset [1,4;1,5] \supset [1,41;1,42] \supset [1,414;1,415] \supset \dots$$

Die Intervalllängen nehmen monoton ab :

$$1 > 0,1 > 0,01 > 0,001 > \dots$$

Die Diagonale d im Einheitsquadrat ist keine rationale Zahl .

Beweis :

Angenommen, $d = \frac{Z}{N}$ maximal gekürzt .

Wegen $d^2 = 2$ gilt $\left(\frac{Z}{N}\right)^2 = 2$.

$$\frac{Z^2}{N^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(2Z')^2}{N^2} = 2$$

$$Z^2 = 2N^2 \text{ gerade}$$

$$2Z'^2 = N^2 \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow Z \text{ gerade, } Z = 2Z'$$

$$\Rightarrow N \text{ gerade, } N = 2N'$$

Der Bruch $\frac{Z}{N}$ wäre also durch 2 kürzbar, im Widerspruch zur Annahme !

q.e.d.

Ergebnis :

Man kann die Existenz der Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat nur über eine Intervallschachtelung wie angegeben axiomatisch sichern !

Die durch Intervallschachtelungen definierten Zahlen fügt man den rationalen Zahlen hinzu und erhält so die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen !

Eigenschaft der reellen Zahlen :

Jede reelle Zahl ist durch eine rationale Intervallschachtelung festgelegt .

Alle Grundrechenarten übertragen sich auf die Menge der reellen Zahlen.

Außerdem fordert man, dass das **Axiom der Intervallschachtelung** entsprechend für **reelle Intervallschachtelungen** gilt !

Rechnen mit reellen Zahlen

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $[c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben.

Dann definiert man mit Hilfe der **Grenzwertsätze** die Grundrechenarten für reelle Zahlen wie folgt :

$$x + y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n$$

$$x - y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n$$

$$x \cdot y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$$

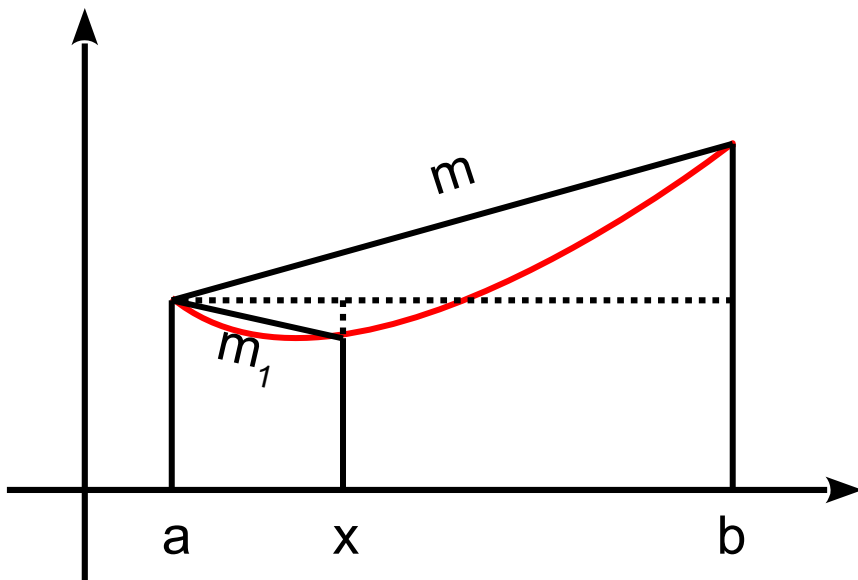
$$x : y := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : b_n, \text{ falls } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

Konvexe Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **in einem Intervall** $[a, b]$ **konvex**, falls gilt: $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ für alle $a < x < b$.

Der Graph der Funktion verläuft in $[a, b]$ unterhalb der „Sehne“.

Alternative Definition: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ für alle $a < x < b$



$$y = f(x)$$

$$m_1 = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

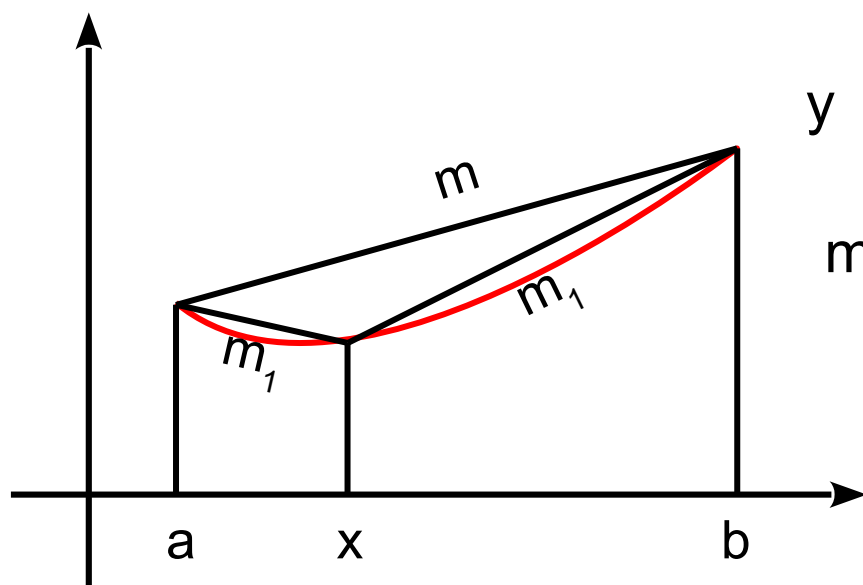
$$m_1 < m$$

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls sie in jedem Intervall $[a, b]$ konvex ist .

Wir zeigen, dass für konvexe Funktionen sogar gilt :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad \text{für alle } [a, b] \text{ und } a < x < b$$



Beweis :

$$m_1 = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad , \quad m_2 = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

Nach Voraussetzung ist $m_1 < m$. Wir müssen zeigen : $m < m_2$

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$m(b-a) = f(b)-f(a)$$

$$m(b-x + x-a) = f(b)-f(x) + f(x)-f(a)$$

$$m(b-x) + m(x-a) = m_2(b-x) + m_1(x-a)$$

$$(m-m_1)(x-a) = (m_2-m)(b-x)$$

Weil beide Faktoren der linken Seite und der Faktor $(b-x)$ positiv sind, muss auch m_2-m positiv, also $m < m_2$ sein !

q.e.d.

Für konvexe Funktionen gilt weiterreichend :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(d)-f(x_2)}{d-x_2} < \frac{f(b)-f(d)}{b-d} ,$$

für $a < c < x_1 < x_2 < d < b$, also

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(b)-f(d)}{b-d}$$

und damit

$$\left| \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \right| < \max \left\{ \left| \frac{f(b)-f(d)}{b-d} \right| , \left| \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \right| \right\}$$

Die konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genügt also auf $[c,d] \subset [a,b]$ folgender **Lipschitz-Bedingung** :

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < \max \left\{ \left| \frac{f(b) - f(d)}{b - d} \right|, \left| \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right| \right\} := L$$

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < L \quad \text{für alle } x, y \in [c,d] \subset [a,b]$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| < L |x_2 - x_1| \quad \text{für alle } x, y \in [c,d] \subset [a,b]$$

Der Fortsetzungssatz von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$

Jede Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, die in jedem Intervall $[c, d]$ einer **Lipschitz-Bedingung** unterliegt, ist **stetig** und **läßt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen** !

Beweis :

Eine Funktion ist streng monoton wachsend, wenn gilt :

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Intervallschachtelung $x = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir zeigen, dass $y = [f(a_n), f(b_n)]_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Intervallschachtelung ist :

Wegen der **Monotonie** gilt $[f(a_{n+1}), f(b_{n+1})] \subset [f(a_n), f(b_n)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der **Lipschitz-Eigenschaft** gilt $f(b_n) - f(a_n) < L(b_n - a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Deshalb ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) - f(a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L(b_n - a_n) = 0$.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ y & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die fortgesetzte Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genügt der gleichen Lipschitz-Bedingung :

Seien $x_1 = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $x_2 = [c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$ mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen gegeben.

Seien $x_1 = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $x_2 = [c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$ mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen gegeben. Dann folgt :

$$|f(a_n) - f(c_n)| < L |a_n - c_n|$$

$$|f(a_n) - f(c_n)| < L |a_n - c_n|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - f(c_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L |a_n - c_n|$$

$$|\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

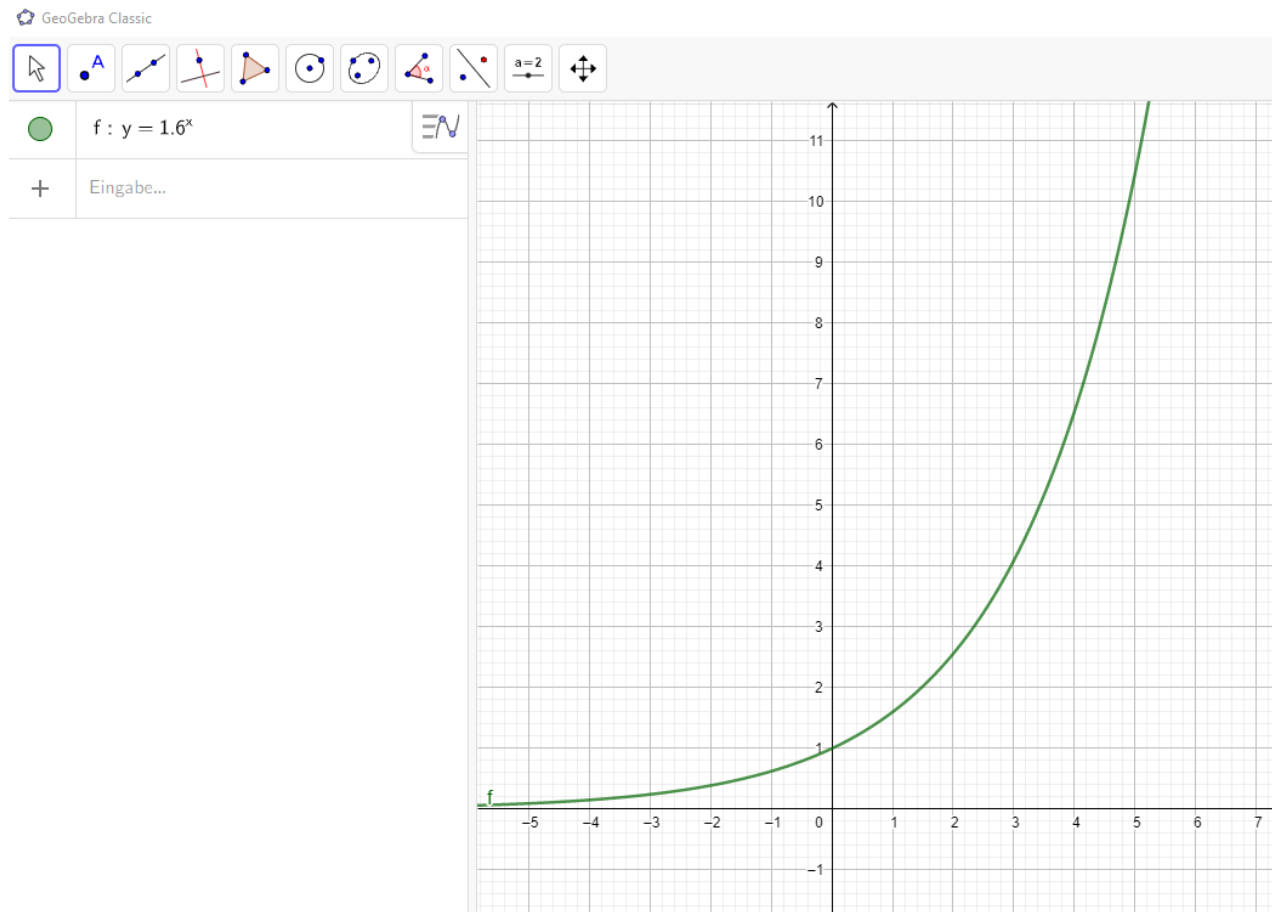
Jede Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist stetig :

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Dann ist $|f(x_n) - f(x)| < L |x_n - x|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L |x_n - x| = 0$

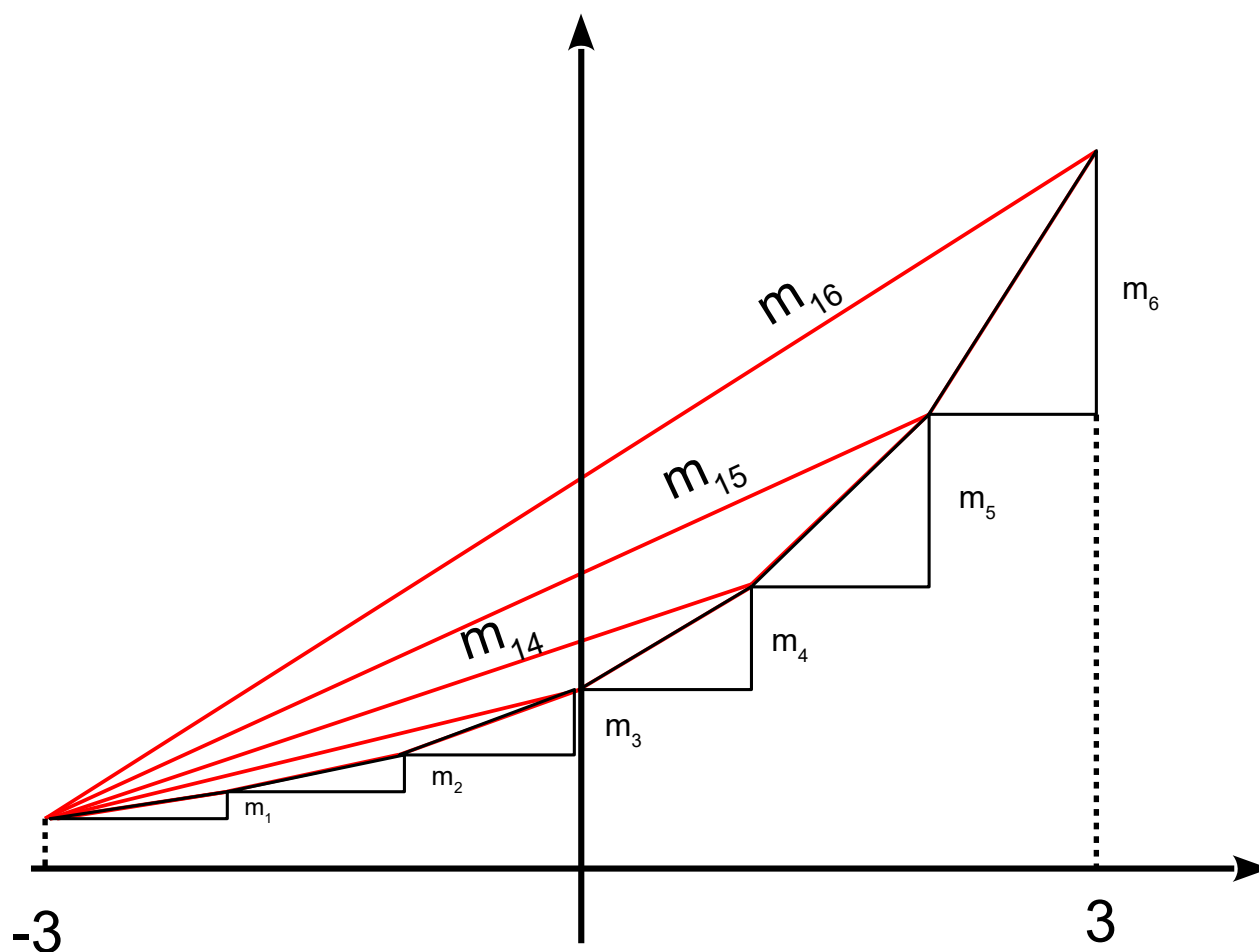
q.e.d.

Die Exponentialfunktion $y = b^q$, $b > 1$ für $q \in \mathbb{Q}$



(1) Die Funktion $y = b^n$, $b > 1$ ist für $n \in \mathbb{N}$ **konvex**.





$$m_1$$

$$m_{12} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k$$

$$m_{13} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 m_k$$

$$m_{14} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 m_k$$

$$m_{15} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 m_k$$

$$m_{16} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 m_k$$

Wenn man die Konvexität der Funktion $y = b^n$ für $n \in \mathbb{N}$ etwa auf dem Intervall $[-3; 3]$ nachweisen will, muss man zeigen, dass $m_1 < m_{12} < m_{13} < m_{14} < m_{15} < m_{16}$.

$$m_1 = b^{-2} - b^{-3}$$

$$m_1 = m_1$$

$$m_2 = b^{-1} - b^{-2} = b(b^{-2} - b^{-3}) = b m_1$$

$$m_2 = b m_1$$

$$m_3 = b^0 - b^{-1} = b(b^{-1} - b^{-2}) = b m_2 = b^2 m_1$$

$$m_3 = b^2 m_1$$

$$m_4 = b^1 - b^0 = b(b^0 - b^{-1}) = b m_3 = b^3 m_1$$

$$m_4 = b^3 m_1$$

$$m_5 = b^2 - b^1 = b(b^1 - b^0) = b m_4 = b^4 m_1$$

$$m_5 = b^4 m_1$$

$$m_6 = b^3 - b^2 = b(b^2 - b^1) = b m_5 = b^5 m_1$$

$$m_6 = b^5 m_1$$

$$m_{16} = \frac{1}{6} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

$$m_{16} = \frac{1}{6} (m_1 + b m_1 + b^2 m_1 + b^3 m_1 + b^4 m_1 + b^5 m_1)$$

$$m_{16} = \frac{1}{6} m_1 (1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5)$$

Analog :

$$m_{15} = \frac{1}{5} m_1 (1 + b + b^2 + b^3 + b^4)$$

$$m_{14} = \frac{1}{4} m_1 (1 + b + b^2 + b^3)$$

$$m_{13} = \frac{1}{3} m_1 (1 + b + b^2)$$

$$m_{12} = \frac{1}{2} m_1 (1 + b)$$

Behauptung : $m_1 < m_{12} < m_{13} < m_{14} < m_{15} < m_{16}$

$$m_{12} < m_{13}$$

$$\frac{1}{2} m_1(1+b) < \frac{1}{3} m_1(1+b+b^2)$$

$$3(1+b) < 2(1+b+b^2)$$

$$3+3b < 2+2b+2b^2$$

$$1+b < 2b^2 \text{ wahre Aussage, wegen } 1 < b < b^2$$

Die anderen Ungleichungen beweist man entsprechend !

Wir haben damit gezeigt, dass die Funktion $y = b^n$ für $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[-3;3]$ konvex ist.

Entsprechend würde man zeigen, dass die Konvexität auf jedem beliebigen Intervall $[-N;N]$ gegeben ist .

(2) Die Funktion $y = b^q$, $b > 1$, $q \in \mathbb{Q}$ ist **konvex**.

Wir wählen ein Intervall $[-N; N]$ und eine rationale Zahl $\frac{s}{t}$ mit

$$\frac{s}{t} \in [-N; N] = \left[-\frac{Nt}{t}; \frac{Nt}{t} \right] .$$

Man muss zeigen, dass
$$\frac{b^{\frac{s}{t}} - b^{-\frac{Nt}{t}}}{\frac{s}{t} - \frac{Nt}{t}} < \frac{b^{\frac{Nt}{t}} - b^{-\frac{Nt}{t}}}{\frac{Nt}{t} - \frac{Nt}{t}} \text{ ist !}$$

$$\frac{b^{\frac{s}{t}} - b^{-\frac{Nt}{t}}}{\frac{s}{t} - -\frac{Nt}{t}} < \frac{b^{\frac{Nt}{t}} - b^{-\frac{Nt}{t}}}{\frac{Nt}{t} - -\frac{Nt}{t}}$$

$$\frac{\left(b^{\frac{1}{t}}\right)^s - \left(b^{\frac{1}{t}}\right)^{-Nt}}{s - -Nt} < \frac{\left(b^{\frac{1}{t}}\right)^{Nt} - \left(b^{\frac{1}{t}}\right)^{-Nt}}{Nt - -Nt}$$

Die letzte Aussage ist wahr, da die Funktion $y = \left(b^{\frac{1}{t}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ konvex auf $[-N; N]$ ist !

Also ist auch die Funktion $y = b^q$, $q \in \mathbb{Q}$ konvex auf $[-N; N]$!

q.e.d.

(3) Die Funktion $y = b^q$, $b > 1$ ist für $q \in \mathbb{Q}$ **konvex** und genügt daher in jedem Intervall $[a, b]$ einer **Lipschitz-Bedingung** !

(4) Die Funktion $y = b^q$, $q \in \mathbb{Q}$ ist **streng monoton wachsend** !

Beweis :

Sei $\frac{r}{t} < \frac{\bar{r}}{t}$ mit $r < \bar{r}$. Dann folgt $b^{\frac{r}{t}} = \sqrt[t]{b^r} < \sqrt[t]{b^{\bar{r}}} = b^{\frac{\bar{r}}{t}}$.

(5) Die Funktion $y = b^q$, $q \in \mathbb{Q}$ genügt in jedem Intervall $[a, b]$ einer **Lipschitz-Bedingung**, ist also **stetig** und **lässt sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen** !

q.e.d.

(6) Die Funktion $y = b^x$, $b > 1$ ist für $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend !

Beweis :

Seien $x = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}} < \bar{x} = [\bar{a}_n, \bar{b}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ derart gegeben, dass sich die rationalen Schachtelungen nicht überschneiden .

Dann gilt $x = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}} \leq b_0 < a_0 \leq [\bar{a}_n, \bar{b}_n]_{n \in \mathbb{N}} = \bar{x}$.

Wegen der strengen Monotonie der Funktion $y = b^q$, $q \in \mathbb{Q}$ überschneiden sich die Bildschachtelung $y = [b^{a_n}, b^{b_n}]_{n \in \mathbb{N}}$, $\bar{y} = [b^{\bar{a}_n}, b^{\bar{b}_n}]_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls nicht und es gilt

$b^x = [b^{a_n}, b^{b_n}]_{n \in \mathbb{N}} \leq b^{b_0} < b^{a_0} \leq [b^{\bar{a}_n}, b^{\bar{b}_n}]_{n \in \mathbb{N}} = b^{\bar{x}}$, also nach der Grenzwertbildung $b^x < b^{\bar{x}}$.

q.e.d.

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$.

Dann gibt es zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

Beweis :

Wir konstruieren ein Intervallschachtelung wie folgt :

$$I_0 = [a_0, b_0] := [a, b] , \quad |I_0| = b - a .$$

$$I_1 = [a_1, b_1] := \begin{cases} \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2} \right] & \text{falls } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > c \\ \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0 \right] & \text{falls } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < c \end{cases} , \quad |I_1| = \frac{1}{2} |I_0|$$

Wenn man das Verfahren weiter denkt, erhält man eine Intervallschachtelung

$$I_n = [a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}} \quad , \quad |I_n| \leq \frac{1}{2^n} |I_0|$$

mit dem Zentrum $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n < c \quad , \quad b_n > c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x \quad .$$

Wegen der Stetigkeit folgt :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c \quad , \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq c \quad , \quad f(x) = c$$

q.e.d

Nun betrachten wir die stetige **Exponentialfunktion** $y = b^x$, $b > 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Es sei irgend ein $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Da $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} b^x = \infty$ gibt es wegen der Monotonie Zahlen $a < b$ mit $f(a) < y_0 < f(b)$

Nach dem Zwischenwertsatz und wegen der Monotonie gibt es genau ein x_0 mit $f(x_0) = y_0$.

Deshalb gilt :

(7) Die Funktion $y = b^x$, $x \in \mathbb{R}$ ist **surjektiv** und die Funktion $y = b^x$, $x \in \mathbb{R}$ hat deshalb eine **Umkehrfunktion**, die sogenannte **Logarithmusfunktion zu Basis b** , $x = \log_b(y)$

(8) Die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden stetigen Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig, also folgt das **streng monotone Wachstum** und die **Stetigkeit der Logarithmusfunktion** $x = \log_b(y)$!

Beweis :

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Man muss zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y) = x$.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f monoton wachsend und stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz $f((x-\epsilon, x+\epsilon)) = (f(x-\epsilon), f(x+\epsilon))$.

Es gibt nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit :

$$|y_n - y| < \min(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y) =: \delta, \quad \delta > 0, \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$y - \delta < y_n < y + \delta \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$y - \delta < y_n < y + \delta \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$x - \epsilon \leq f^{-1}(y - \delta) < f^{-1}(y_n) < f^{-1}(y + \delta) \leq x + \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$x - \epsilon \leq f^{-1}(y - \delta) < f^{-1}(y_n) < f^{-1}(y + \delta) \leq x + \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

Also :

$$x - \epsilon < f^{-1}(y_n) < x + \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$|f^{-1}(y_n) - x| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y)$$

q.e.d.

Die Potenzgesetze für die erweiterte Exponentialfunktion $y = b^x$, $b > 1$, $x \in \mathbb{R}$ gelten ebenfalls :

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben mit entsprechenden rationalen Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]_{n \in \mathbb{N}}$, $[c_n, d_n]_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad b^x \cdot b^y &= \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} \cdot b^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n + c_n} = \\ &= b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x + y} \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad \frac{b^x}{b^y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{a_n}}{b^{c_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n - c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x - y}$$

$$\text{III} \quad (b^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^{a_n})^{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n \cdot c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n} = b^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = b^{x \cdot y}$$

Es gelten folgende Logarithmengesetze :

Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion sind Umkehrfunktionen voneinander :

$$b^{\log_b(y)} = y \quad \log_b(b^x) = x$$

I $\log_b(y_1 \cdot y_2) = \log_b(y_1) + \log_b(y_2)$

II $\log_b\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_b(y_1) - \log_b(y_2)$

III $\log_b(y^n) = n \cdot \log_b(y)$

Beweis :

Seien $y_1 = b^{x_1}$, $y_2 = b^{x_2}$ gegeben .

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \log_b(y_1 \cdot y_2) &= \log_b(b^{x_1} \cdot b^{x_2}) = \log_b(b^{x_1 + x_2}) = x_1 + x_2 = \\ &= \log_b(y_1) + \log_b(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad \log_b\left(\frac{y_1}{y_2}\right) &= \log_b\left(\frac{b^{x_1}}{b^{x_2}}\right) = \log_b(b^{x_1 - x_2}) = x_1 - x_2 = \\ &= \log_b(y_1) - \log_b(y_2) \end{aligned}$$

$$\text{III} \quad \log_b(y^n) = \log_b((b^x)^n) = \log_b(b^{n \cdot x}) = n \cdot x = n \cdot \log_b(y)$$