Kegelschnitte in gedrehter Lage

(minimalistische Beschreibung)

Arno Fehringer, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik

Neujahr 2024

Wie möglicherweise aus der Schulmathematik bekannt ist, genügen **Kegelschnitte** folgenden algebraischen Darstellungen :

Ellipse : $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbel : $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabel : $$y = p\,x^2$$

Drehung der Ellipse und der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$A x^2 + C y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\underline{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} [M] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} =: [D] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: [D]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}^T [D]^{-1\ T}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} [D]}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} [M] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} [D][M][D]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\cos(\varphi) & A\sin(\varphi) \\ -C\sin(\varphi) & C\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix} A\cos^2(\varphi) + C\sin^2(\varphi) & (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & A\sin^2(\varphi) + C\cos^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A\cos^2(\varphi) + C\sin^2(\varphi) & (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & A\sin^2(\varphi) + C\cos^2(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A\cos^2(\varphi)+C\sin^2(\varphi) & (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & A\sin^2(\varphi)+C\cos^2(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A\cos^2(\varphi)+C\sin^2(\varphi) & (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ (A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & A\sin^2(\varphi)+C\cos^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}\,\bar{x}+\bar{B}\,\bar{y} \\ \bar{B}\,\bar{x}+\bar{C}\,\bar{y} \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\boxed{\bar{A}\,\bar{x}^2 + 2\bar{B}\,\bar{x}\,\bar{y} + \bar{C}\,\bar{y}^2 - 1 = 0}$$

Gleichung der gedrehten Ellipse/Hyperbel

Gegeben sei nun umgekehrt eine **Gleichung 2. Ordnung** der Form

$$\overline{\overline{A}}\,\overline{x}^2 + 2\overline{\overline{B}}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{\overline{C}}\,\overline{y}^2 + \overline{\overline{\overline{F}}} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \overline{\overline{A}}\,,\ \overline{\overline{C}}\,,\ \overline{\overline{\overline{F}}} \neq 0$$

Wir zeigen, dass die Lösungsmenge eine gedrehte Ellipse/Hyperbel ist, indem wir deren **Koeffizienten** A , C und den zugehörigen **Drehwinkel** φ berechnen.

$$\overline{\overline{A}}\,\overline{x}^2 + 2\overline{\overline{B}}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{\overline{C}}\,\overline{y}^2 + \overline{\overline{\overline{F}}} = 0 \qquad \mid \, : -\overline{\overline{\overline{F}}}$$

$$-\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}\,\overline{x}^2 - 2\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}\,\overline{x}\,\overline{y} - \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}\,\overline{y}^2 - 1 = 0$$

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + 2\overline{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\,\overline{y}^2 - 1 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \overline{A}\,,\overline{B}\,,\overline{C} = -\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}\,, -\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}\,, -\frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\overline{F}}}}$$

Notwendig muss gelten :

$$A\cos^2(\varphi)+C\sin^2(\varphi) = \overline{A} \qquad \Rightarrow \qquad (A-C)\left(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\right) = \overline{A}-\overline{C}$$

$$A\sin^2(\varphi)+C\cos^2(\varphi) = \overline{C} \qquad \qquad \underline{(A-C)\cos(2\varphi) = \overline{A}-\overline{C}}$$

$$(A-C)\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \overline{B} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{(A-C)\sin(2\varphi) = 2B}$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\overline{B}}{\overline{A}-\overline{C}}$$

$$\boxed{\tan(2\varphi) = \frac{2\overline{\overline{\overline{B}}}}{\overline{\overline{\overline{A}}}-\overline{\overline{\overline{C}}}}}$$

$$A\cos^2(\varphi)+C\sin^2(\varphi) = \overline{A} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{\overline{A}\cos^2(\varphi)-\overline{C}\sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi)-\sin^4(\varphi)}$$

$$A\sin^2(\varphi)+C\cos^2(\varphi) = \overline{C} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\overline{C}\cos^2(\varphi)-\overline{A}\sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi)-\sin^4(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{\overline{A}\cos^2(\varphi) - \overline{C}\sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) - \sin^4(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{\overline{C}\cos^2(\varphi) - \overline{A}\sin^2(\varphi)}{\cos^4(\varphi) - \sin^4(\varphi)}$$

$$\boxed{A = \frac{\overline{\overline{A}}\cos^2(\varphi) - \overline{\overline{C}}\sin^2(\varphi)}{-\overline{\overline{F}}\left(\cos^4(\varphi) - \sin^4(\varphi)\right)}}$$

$$\boxed{C = \frac{\overline{\overline{C}}\cos^2(\varphi) - \overline{\overline{A}}\sin^2(\varphi)}{-\overline{\overline{F}}\left(\cos^4(\varphi) - \sin^4(\varphi)\right)}}$$

Determinantenbedingung für die Ellipse und die Hyperbel :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \bar{\bar{F}} = 0}$$

$$\mathrm{Det}\left[M\right] = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = AC \quad \left\{\begin{matrix} > 0 & \text{für} & \text{Ellipse} \\ < 0 & \text{für} & \text{Hyperbel} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} = \bar{\bar{F}}^2 \;\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} \end{bmatrix} = \bar{\bar{F}}^2 \;\mathrm{Det}\left(\left[D\right]\left[M\right]\left[D\right]^{-1}\right)$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} = \bar{\bar{F}}^2 \;\mathrm{Det}\left[D\right]\mathrm{Det}\left[M\right]\mathrm{Det}\left[D\right]^{-1}$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} = \bar{\bar{F}}^2 \cdot 1 \cdot \mathrm{Det}\left[M\right] \cdot 1$$

$$\boxed{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} = \bar{\bar{F}}^2 \;\mathrm{Det}\left[M\right] \quad \left\{\begin{matrix} > 0 & \text{für} & \text{Ellipse} \\ < 0 & \text{für} & \text{Hyperbel} \end{matrix}\right\}}$$

Drehung der Parabel

$$y = p\,x^2$$

$$-px^2 + y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} [M] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} =: [D] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: [D]^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}^T [D]^{-1\ T}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} [D]$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}[D][M][D]^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-p\cos(\varphi) & -p\sin(\varphi)\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[D][M][D]^{-1} = \begin{bmatrix}-p\cos^2(\varphi) & -p\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ -p\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -p\sin^2(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-p\cos^2(\varphi) & -p\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ -p\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -p\sin^2(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-p\cos^2(\varphi) & -p\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ -p\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -p\sin^2(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{B} & \bar{C}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}-p\cos^2(\varphi) & -p\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ -p\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -p\sin^2(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{B} & \bar{C}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\bar{y}\\ \bar{B}\bar{x}+\bar{C}\bar{y}\end{bmatrix} - \sin(\varphi)\bar{x} + \cos(\varphi)\bar{y} = 0 \qquad | \quad \cdot v \neq 0$$

$$\boxed{\bar{\bar{A}}\bar{x}^2 + 2\bar{\bar{B}}\bar{x}\bar{y} + \bar{\bar{C}}\bar{y}^2 + D\bar{x} + E\bar{y} = 0} \quad , \qquad \bar{\bar{A}} = v\bar{A} \quad \bar{\bar{B}} = v\bar{B} \quad \bar{\bar{C}} = v\bar{C}$$

Gleichung der gedrehten Parabel $\Rightarrow$ $\boxed{-\dfrac{D}{E} = \tan(\varphi)}$

Determinantenbedingung für die Parabel :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} [M] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = 0}$$

$$\mathrm{Det}[M] = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} -p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} = v^2 \ \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} = v^2 \ \mathrm{Det}\left([D][M][D]^{-1}\right)$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} = v^2 \ \mathrm{Det}[D]\mathrm{Det}[M]\mathrm{Det}[D]^{-1}$$

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} = v^2 \cdot 1 \cdot \mathrm{Det}[M] \cdot 1$$

$$\boxed{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ \overline{\overline{B}} & \overline{\overline{C}} \end{bmatrix} = v^2 \cdot \mathrm{Det}[M] = 0}$$

Berechnung des Drehwinkels und des Parameters der Parabel

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}}\\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}D & E\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0 \quad , \qquad \boxed{-\frac{D}{E} = \tan(\varphi)} \qquad \boxed{\varphi \; = \quad}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\bar{A}} & \bar{\bar{B}}\\ \bar{\bar{B}} & \bar{\bar{C}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}D & E\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0 \qquad | \quad \cdot -\frac{\sin(\varphi)}{D}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{B} & \bar{C}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}-\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{B} & \bar{C}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}-p\cos^2(\varphi) & -p\sin(\varphi)\cos(\varphi)\\ -p\sin(\varphi)\cos(\varphi) & -p\sin^2(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$-p\cos^2(\varphi) = \bar{A} \qquad \Rightarrow \qquad -p = \bar{A}+\bar{C}$$

$$-p\sin^2(\varphi) = \bar{C} \qquad\qquad \boxed{p = -\left(\bar{A}+\bar{C}\right)}$$