Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, Folgen, Reihen

Arno Fehringer

März 2024

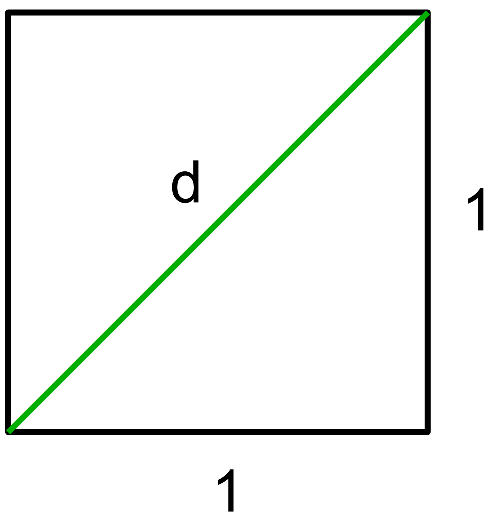
Quellen :

Forster, Otto : Analysis 1, Springer Spektrum, 12.Aufl.

Grüne, Lars : Analysis I und II , Vorlesungsskript Uni Bayreuth, Wi- und So-Semester 2021/2022

Die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat

Berechne die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats, also des Quadrats mit der Kantenlänge 1 !



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

Suche eine Zahl mit d mit $d^2 = 2$!

Die gesuchte Zahl d mit $d^2 = 2$ lässt sich durch die folgenden Ungleichungen mit Dezimalzahlen sukzessive eingrenzen, wie man durch Nachrechnen mit Hilfe des Taschenrechners bestätigt :

$$
\begin{array}{lcccl}
1 & < & d & < & 2 \\
1,4 & < & d & < & 1,5 \\
1,41 & < & d & < & 1,42 \\
1,414 & < & d & < & 1,415 \\
1,4142 & < & d & < & 1,4143
\end{array}
$$

usw.

Jedes Intervall enthält alle folgenden Intervalle, und die Intervalllängen werden immer kleiner :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
[1;2] & \supset & [1,4;1,5] & \supset & [1,41;1,42] & \supset & [1,414;1,415] & \supset & [1,4142;1,4143] & \supset & \ldots \\
1 & & 0,1 & & 0,01 & & 0,001 & & 0,0001 & &
\end{array}
$$

Offenbar kommen die Grenzen der Intervallschachtelung der gesuchten Zahl d immer näher, erreichen diese aber nicht .

Bereits die Mathematiker im Altertum konnten zeigen, dass d kein Bruch und damit keine Dezimalzahl ist .

Im **X. Buch** der **Elemente von Euklid (~300 v. Ch.)** wird hierzu folgender Widerspruchsbeweis geliefert :

Angenommen, d ist rational, etwa $d = \dfrac{Z}{N}$, maximal gekürzt . Dann folgt :

$$d^2 = 2$$

$$\frac{Z^2}{N^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 2N^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z = 2Z'}$$

$$\Rightarrow \quad 4Z'^2 = 2N^2 \quad \Rightarrow \quad 2Z'^2 = N^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{N = 2N'}$$

$\Rightarrow$ Der Bruch $d = \dfrac{Z}{N} = \dfrac{2Z'}{2N'}$ ist durch 2 kürzbar, im Widerspruch zur Voraussetzung .

Die Zahl d ist also durch keine rationale Zahl darstellbar.
Dennoch gehen wir davon aus, dass die Diagonale im Einheitsquadrat eine Länge in Form einer Zahl hat .

Das Problem ist nur zu lösen, wenn man die Menge der Rationalen Zahlen **erweitert** oder **vervollständigt** durch Zahlen, die man über eine Intervallschachtelung eingrenzen kann .

Definition

Ein Folge von Intervallen $\left[a_n ; b_n\right]_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, mit den Eigenschaften

(1) $\left[a_n ; b_n\right] \supset \left[a_{n+1} ; b_{n+1}\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$

heißt **Intervallschachtelung** .

So wie wir verlangen, dass die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat als Zahl eindeutig existiert, fordern wir, dass jede Intervallschachtelung in eindeutiger Weise eine Zahl festlegt .
Eine solche Forderung heißt in der Mathematik **Axiom (gr. : Grundsatz, der als wahr angenommen wird)** :

Vollständigkeitsaxiom (IS)

Jede **Intervallschachtelung** $\left[a_n;b_n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau ein **Zentrum**, das heißt eine Zahl z mit $z \in \left[a_n;b_n\right]$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Es gilt speziell :

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq z \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \quad ,$$

$$z = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \ , \quad a_n \leq z \leq b_n \ \text{ für alle } \ n\in\mathbb{N}$$

Es gibt mehrere äquivalente Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms. Eine häufig verwendete Form ist das sich auf beschränkte Mengen beziehende

Vollständigkeitsaxiom (BM)

Jede nach unten und oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ mit $s \le m \le S$ für alle $m \in M$ besitzt eine **größte untere Schranke** und eine **kleinste obere Schranke**, genannt **Infimum** und **Supremum** der Menge M, geschrieben $\inf M$ und $\sup M$:

$$s \le \inf M \le m \le \sup M \le S \qquad \text{für alle } m \in M$$

Wir zeigen nun, dass beide Axiome äquivalent sind !

Beweis : (IS) $\Rightarrow$ (BM)

Es gelte also das **Vollständigkeitsaxiom (IS)** .
Sei M eine beschränkte Menge mit $s \leq m \leq S$ für alle $m \in M$.

Wir konstruieren eine **Intervallschachtelung** $[a_n; b_n]_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt :

$$[a_0; b_0] := [s; S]$$

Ist das n-te Intervall $[a_n; b_n]$ bereits definiert, zerlegt man es in zwei Intervallhäften $[a_n; b_n] = \left[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n\right]$ und definiert :

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] := \left[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}\right] \quad \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke}$$

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] := \left[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n\right] \quad \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ keine obere Schranke}$$

Nach Voraussetzung hat die Intervallschachtelung $[a_n ; b_n]_{n \in \mathbb{N}}$ das Zentrum $z \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass $z = \sup M$ ist .

Dazu ist zu zeigen

(1) z ist obere Schranke : $m \leq z$ für alle $m \in M$.

(2) Es gibt keine kleinere obere Schranke als z .

Zu **(1)** :

Nach Konstruktion der Intervallschachtelung sind die oberen Grenzen $b_n \; , \; n \in \mathbb{N}$ der Intervalle immer obere Schranken :
Sei $m \in M$ beliebig. Dann gilt $b_n \geq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es folgt $z = \lim\limits_{n \to \infty} b_n \geq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist z eine obere Schranke !

Zu **(2)** :

Sei $z' < z$ eine obere Schranke von M . Da die Folge der unteren Intervallgrenzen $a_{n\ ,\ n \in \mathbb{N}}$ keine oberen Schranken sind und $z = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ und $m_{n_0} \in M$ mit $z' < a_{n_0} < z$ und $z' < a_{n_0} < m_{n_0}$.
Damit ist z' keine obere Schranke .

Dass die Menge M ein Infimum besitzt, zeigt man in analoger Weise .

Beweis : (BM) $\Rightarrow$ (IS)

Es gelte das **Vollständigkeitsaxiom (BM)** .
Sei $\left[a_n ; b_n\right]_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung .
Wir betrachten die Menge $M = \left\{a_o , a_1 , a_{2,} ...\right\}$.
Für alle $m \in M$ gilt : $m \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das heißt, die Menge ist nach oben beschränkt, hat ein Supremum $\sup M$,

und es gilt $\underline{\sup M \le b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Andererseits gilt nach Definition des Supremums als kleinste obere Schranke auch $\underline{a_n \le \sup M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Deshalb ist $\sup M$ in allen Intervallen enthalten und somit das Zentrum der Intervallschachtelung $\left[a_n ; b_n\right]_{n \in \mathbb{N}}$!

Eine weitere (äquivalente) Formulierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist die über Cauchyfolgen .

Vollständigkeitsaxiom (CF)

Jede Cauchyfolge hat einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Wir zeigen : (BM) $\Rightarrow$ (CF)

Sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\left|a_n - a_m\right| < 1$ für alle $n\ ,\ m \geq n_1$.

Speziell ist

$$\left|a_n - a_{n_1}\right| < 1$$

$$-\epsilon < a_n - a_{n_1} < 1$$

$$a_{n_1} - \epsilon < a_n < a_{n_1} + 1$$

und

$$a_n \leq \max\left(a_{n_1} + 1\ ,\ a_0\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n_1 - 1}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Damit ist die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, die Menge $M = \left\{a_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ hat ein Supremum $\sup M = a$, und es gilt :

$a_n \le a \quad$ für alle $\; n \in \mathbb{N}$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben .

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a-\epsilon < a_n \le a < a+\epsilon \quad \text{für alle } \; n \ge n_0$$

$$-\epsilon < a_n-a < \epsilon \quad \text{für alle } \; n \ge n_0$$

$$|a_n-a| < \epsilon \quad \text{für alle } \; n \ge n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Wir zeigen : (CF) $\Rightarrow$ (IS)

Sei $[a_n b_n]_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$b_n - a_n < \epsilon \quad \text{für alle } \; n \ge n_0$$

Wegen $a_n \;,\; a_m \in \left[a_{n_0}; b_{n_0}\right]$ für alle $n \;,\; m \geq n_0$ folgt

$\left| a_n - a_m \right| < \epsilon$ für alle $n \;,\; m \geq n_0$

Damit ist die Folge $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = z$.

Da die Folge $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, folgt

$a_n \leq z$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Wegen $a_n \leq b_k$ für alle $n \;,\; k \in \mathbb{N}$ ist

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = z \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

also $a_n \leq z \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Intervallschachtelung $\left[a_n b_n\right]_{n \in \mathbb{N}}$ hat das Zentrum z .

Bezüglich der Aussagen **(IS)**, **(BM)**, **(CF)** haben wir nun folgenden logischen Zusammenhang :

$$\begin{tikzcd} & \textbf{(IS)} \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ \textbf{(CF)} \arrow[ur, Rightarrow] & & \textbf{(BM)} \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Das bedeutet, dass alle drei Aussagen **äquivalent** sind, und **jeweils die Vollständigkeit von** $\mathbb{R}$ darstellen .

Die Vollständigkeit des Zahlenkörpers $\mathbb{C}$

Die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ erhält man relativ schnell aus dem **Vollständigkeitsaxiom (CF)** für $\mathbb{R}$, wenn man erstens folgende Ungleichungen

$$|x|\ ,\ |y| \leq |z| \leq |x| + |y| \quad \text{für alle } z = x + iy \quad ,$$

welche elementargeometrisch klar sind, und zweitens die Festlegung, dass für jede Folge $\left(z_n = x_n + iy_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt :

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

berücksichtigt .

Wir zeigen nun :

$$\left(z_n = x_n + iy_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } \left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}$$

Beweis „ $\Leftarrow$ “ :

Seien $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen und sei $\epsilon > 0$ gegeben .

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x_n - x_m\right| \;,\; \left|y_n - y_m\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \;,\; m \geq n_0$$

$$\left|z_n - z_m\right| \leq \left|x_n - x_m\right| + \left|y_n - y_m\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{für alle } n \;,\; m \geq n_0$$

$\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge .

Beweis „ $\Rightarrow$ “ :

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und sei $\epsilon > 0$ gegeben .

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$|z_n - z_m| = |x_n - x_m + i(y_n - y_m)| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$

$|x_n - x_m|, |y_n - y_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen .

q.e.d.

Satz :
Jede Cauchyfolge $\left(z_n = x_n + i\,y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist konvergent in $\mathbb{C}$, das heißt,
der Körper der komplexen Zahlen ist vollständig.

Beweis :

$\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Dies ist äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + iy_n = x + iy = z$$

Damit ist $\left(z_n = x_n + i\,y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent .

q.e.d.

Eine reelle Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen die Zahl a, wenn die Folge der Partialsummen gegen a konvergiert .

Schreibweisen :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = a \quad , \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$$

Jede reelle konvergente Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$ ist auch eine Cauchyfolge, denn :

Sei $\epsilon > 0$ gegeben . Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i - a \right| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i - a \right| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{m} a_i \right| = \left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq m \geq n_0$$

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq m \geq n_0$$ **Cauchyfolge-Eigenschaft**

Speziell auch :

$$\left| \sum_{i=n_0}^{n} a_i \right| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \right| \leq \epsilon$$ **Summenrest wird beliebig klein !**

Eine Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **absolut konvergent** , wenn die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist .

Satz :

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

Beweis :

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| = a$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq m \geq n_0 \quad .$$

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq m \geq n_0$$

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=m}^{n} |a_i| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq m \geq n_0$$

Damit stellt die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge dar und ist nach dem **Vollstänigkeitsaxiom (CF)** konvergent .

q.e.d.

Geometrische Folgen :

Sei $\left(a_n = q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $q \in \mathbb{R}^+$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} q^n = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{matrix} q < 1 \\ q = 1 \\ q > 1 \end{matrix} \right\}$$

Beweis :

Für $q > 1$, etwa $q = 1+x$, ist

$$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx \ .$$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es zu jedem $S \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$1+nx > S \text{ für alle } n \geq n_0 \ .$$

Dann folgt

$$q^n > S \text{ für alle } n \geq n_0 \quad \text{und damit } \lim_{n \to \infty} q^n = \infty \ .$$

Für $q < 1$ ist $\frac{1}{q} > 1$.

Zu jedem $\epsilon > 0$ folgt analog wie oben, es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$\frac{1}{q^n} > \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq n_0$.

Dann folgt

$q^n < \epsilon$ alle $n \geq n_0$ und damit $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

q.e.d.

Geometrische Reihen

Sei $\left(a_n = \sum_{i=0}^{n} q^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $q \in \mathbb{R}^+$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1-q} \\ \infty \\ \infty \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{c} q < 1 \\ q = 1 \\ q > 1 \end{array} \right\}$$

Beweis :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1-q} \\ \infty \\ \infty \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{c} q < 1 \\ q = 1 \\ q > 1 \end{array} \right\}$$

q.e.d.

Konvergenzkriterien für Reihen

Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine Reihe $\left(a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\left|\sum_{i=m}^{n} a_i\right| < \epsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$.

Beweis :
Der Beweis folgt direkt aus der Tatsache, dass eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Cauchy-Bedingung erfüllt ist, das heißt, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\left|a_n - a_m\right| < \epsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$.

q.e.d.

Majorantenkriterium

Sei $\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $|a_i| \le c_i$ für alle $i\in\mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut .

Beweis :

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{i=m}^{n} c_i\right| < \epsilon$ für alle $n \ge m \ge n_0$.

Daher ist $\sum_{i=m}^{n} |a_i| \le \sum_{i=m}^{n} c_i < \epsilon$ für alle $n \ge m \ge n_0$, und die Reihe

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ konvergiert nach dem **Cauchyschen** absolut .

q.e.d.

Quotientenkriterium

Sei $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $a_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gebe eine Zahl $0 < q < 1$ mit $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < q$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut .

Beweis :

$$\left|\frac{a_i}{a_{i-1}}\right| \ \cdots \ \left|\frac{a_1}{a_0}\right| < q^i$$

$$\left|\frac{a_i}{a_0}\right| < q^i$$

$$|a_i| < |a_0|\,q^i$$

Nach dem **Majorantenkriterium**

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i| < \sum_{i=0}^{n} |a_0|\,q^i$$

konvergiert die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut .

q.e.d.

Wurzelkriterium

Sei $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $a_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gebe eine Zahl $0 < q < 1$ mit $\sqrt[i]{a_i} < q$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut .

Beweis :

Aus $\sqrt[i]{a_i} < q$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $a_i < q^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Nach dem **Majorantenkriterium** ist dann $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent .

q.e.d.

Satz :

Sei $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$.

Sei $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Umordnung .

Dann ist die Reihe $\left(\sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} = a$.

Beweis :

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq m \geq n_0$$

Speziell ist $\sum_{i=n_0}^{n} |a_i| < \frac{\epsilon}{2}$, also $\underline{\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \frac{\epsilon}{2}}$.

Wegen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$ ist $\left| \sum_{i=n_0}^{n} a_i \right| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$, also $\underline{\left| \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \right| \leq \frac{\epsilon}{2}}$.

Weiterhin sei $n_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{\tau(0), \ldots \tau(n_1)\} \supset \{0, \ldots n_0-1\}$ und $n_1 \geq n_0$:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 2 & \ldots & n_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\tau(0) & \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n_1)
\end{array}
$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| = \left| \sum_{i=m}^{n} a_{\tau(i)} - \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i + \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i - a \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \left| \sum_{i=m}^{n} a_{\tau(i)} - \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i \right| + \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i - a \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \left| \sum_{i=m}^{n} a_{\tau(i)} - \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i \right| + \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i - a \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \left| \sum_{i=n_0}^{n} a_{\tau(i)} \right| + \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \sum_{i=n_0}^{n} \left| a_{\tau(i)} \right| + \left| \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} \left| a_i \right| + \left| \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| + \left| \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \right| \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{\tau(i)} - a \right| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_1$$

q.e.d.

Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen

Seien $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergente Reihen mit

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = a$ und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j = b$.

Dann ist jedenfalls $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{N} b_j\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{N} a_i\right) \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{N} b_j\right) = ab$.

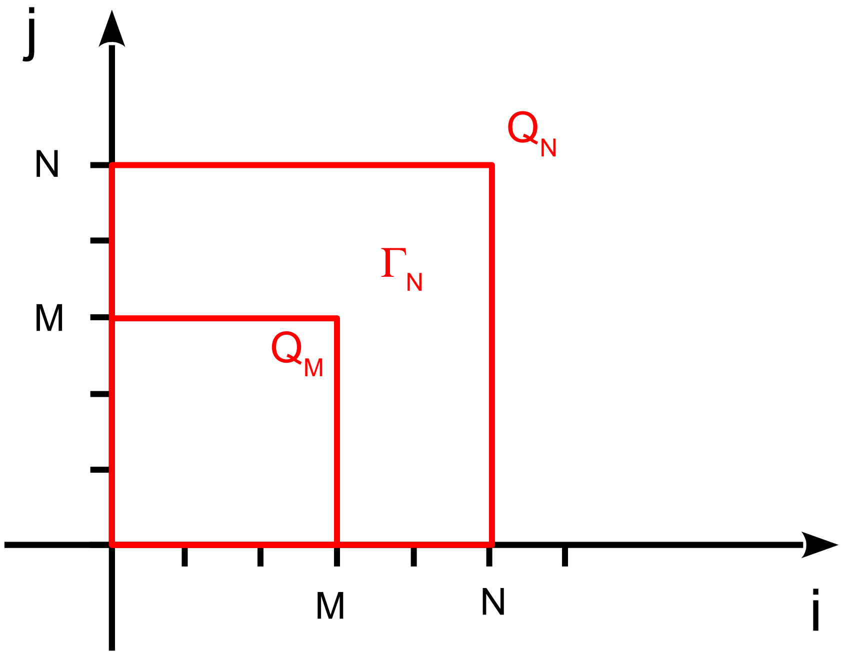
Andere Schreibweise :

$\left(\sum\limits_{i=0}^{N} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{N} b_j\right) = \sum\limits_{i,\, j\in Q_N} a_i b_j$, $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i,\, j\in Q_N} a_i b_j = ab$ mit

$Q_N = \left\{ (i\,,j) \;\mathrm{I}\; 0\le i\le N \text{ und } 0\le j\le N \right\}$

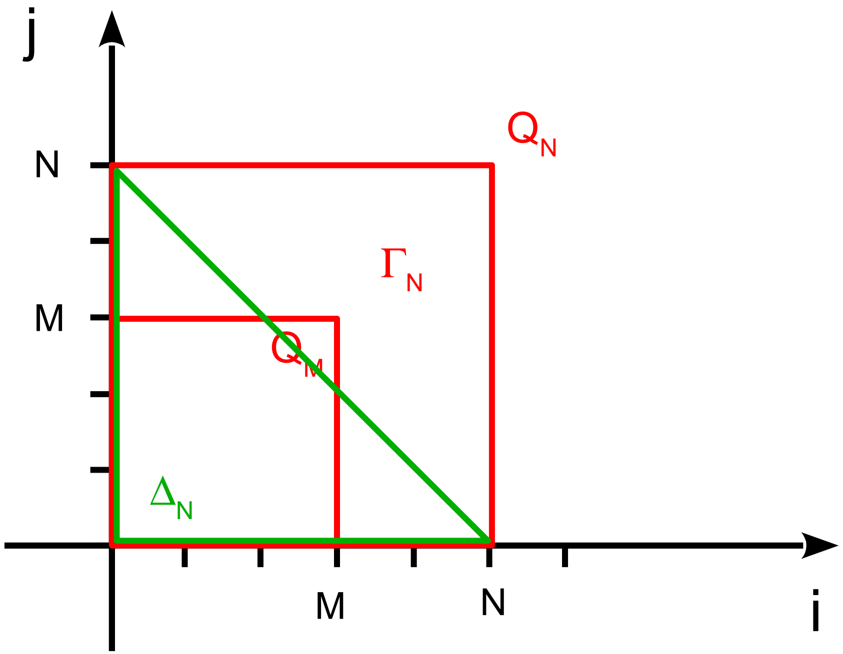
Wegen der Konvergenz von $\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) = \sum_{i,j\in Q_N} |a_i b_j|$ gilt nach dem Cauchykrierium :

$$\left| \sum_{i,j\in Q_N} a_i b_j - \sum_{i,j\in Q_M} a_i b_j \right| = \left| \sum_{i,j\in \gamma_{NM}} a_i b_j \right| \leq \sum_{i,j\in \gamma_{NM}} |a_i b_j| < \epsilon \quad \text{für große } N \geq M$$



Das Cauch-Produkt zweier Reihen $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ wird definiert

durch $\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i,\,j\in\Delta_N} a_i b_j$ mit $\underline{\Delta_N = \left\{ (i,j) \mid i+j=k \text{ und } 0\le k\le N \right\}}$



Jetzt könnte man vermuten, dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i,j\in Q_N} a_i b_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{i,j\in \Delta_N} a_i b_j \quad ,$$

da ja in beiden Fällen über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ summiert wird .

Tatsächlich kann man dies zeigen, indem man im Folgenden nachweist, dass

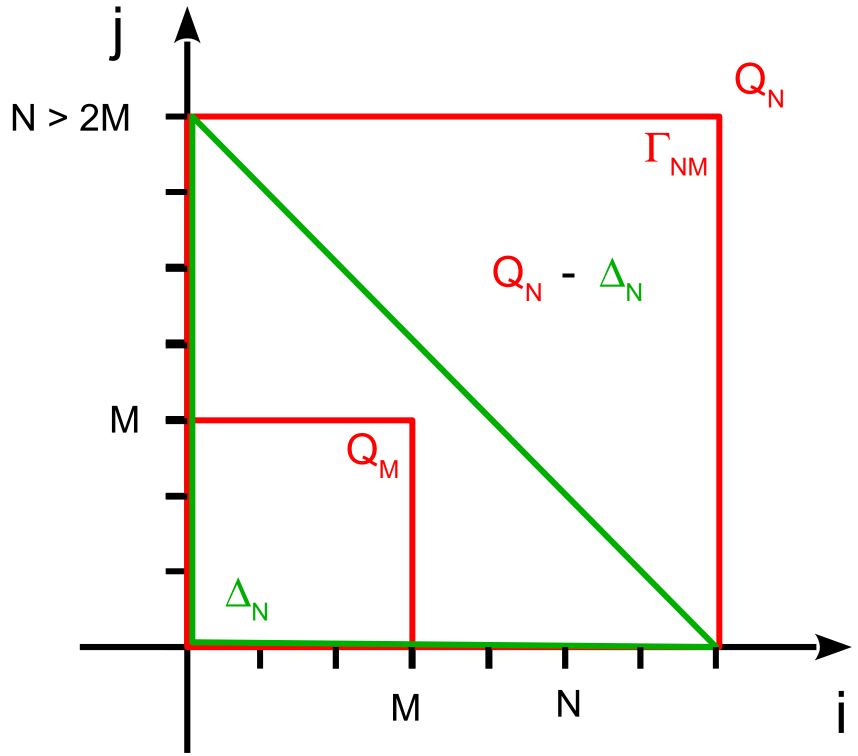
$$\left(\left| \sum_{i,j\in Q_N} a_i b_j - \sum_{i,j\in \Delta_N} a_i b_j \right| \right)_{N\in\mathbb{N}}$$

eine Nullfolge ist, womit gälte, dass

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{i,j\in Q_N} a_i b_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{i,j\in \Delta_N} a_i b_j = ab}$$

ist .

Wählt man nämlich $N > 2M$, ist $Q_N - \Delta_M \subset \Gamma_{NM}$, also folgt :



$$\left| \sum_{i,j \in Q_N} a_i b_j - \sum_{i,j \in \Delta_N} a_i b_j \right| = \left| \sum_{i,j \in Q_N - \Delta_N} a_i b_j \right| \leq \sum_{i,j \in Q_N - \Delta_N} \left| a_i b_j \right| \leq \sum_{i,j \in \Gamma_N} \left| a_i b_j \right| < \epsilon$$

q.e.d.

Folgen und Reihen von Funktionen und gleichmäßige Konvergenz

Sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf dem Intervall $[a;b]$ definierter Funktionen . Die Folge $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion f genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ existiert mit

$$\sup \left|\left(f_n - f\right)\right|_{[a;b]} < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Anders gesagt :

Die Folge $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion f genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\left(f_n(x) - f(x)\right)\right| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ für alle } x \in [a;b]$$

Satz :

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **stetiger** Funktionen auf $[a;b]$, die **gleichmäßig** gegen eine Funktion f **konvergiert** . **Dann ist** f **stetig .**

Beweis :

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\underline{\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}} \qquad \text{für alle } x \in [a;b]$$

Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} gibt es zu $x_0 \in [a;b]$ ein $\delta > 0$ mit

$$\underline{\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3}} \qquad \text{für alle } x \in [a;b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$$\underline{\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}} \qquad \text{für alle} \ \ x \in [a;b]$$

$$\underline{\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3}} \qquad \text{für alle} \ \ x \in [a;b] \ \text{mit} \ \ |x - x_0| < \delta$$

Dann folgt :

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right|$$

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right|$$

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \epsilon \qquad \text{für alle} \ \ x \in [a;b] \ \text{mit} \ \ |x - x_0| < \delta$$

Die Grenzfunktion f ist stetig .

q.e.d

Satz über Integration und Limesbildung :

Sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **stetiger** Funktionen auf $\left[a;b\right]$, die **gleichmäßig** gegen eine Funktion f **konvergiert** . Dann gilt :

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis :

Nach dem vorigen Satz ist die Grenzfunktion f stetig und damit integrierbar .
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup \left| f(x)dx - f_n(x) \right|_{[a;b]} < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \ .$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b f(x)dx - f_n(x)dx \right| \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x)dx - f_n(x) \right| dx \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \sup \left| f(x)dx - f_n(x) \right|_{[a;b]} dx \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \sup \left| f(x)dx - f_n(x) \right|_{[a;b]} (b-a) \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) < \epsilon \quad \text{f ür alle} \quad n \geq n_0$$

Also : $\displaystyle \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx$

q.e.d

Satz über Differentiation und Limesbildung :

Sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **stetig-differenzierbarer** Funktionen auf $[a;b]$, die **gleichmäßig** gegen eine Funktion f **konvergiert** .

Sei die Folge der Ableitungsfunktionen $\left(f_n{}'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion f^* . Dann gilt :

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n\right)'(x) \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n\right)'(x)$$

Beweis :

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\left(f_n{}'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Grenzfunktion f^* stetig und damit integrierbar .

$$f_n(x) = f(a) + \int_a^x \left(f_n\right)'(t)\,dt$$

Nach dem **Satz über die Integration und Limesbildung** ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x (f_n)'(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} (f_n)'(t)\,dt = \int_a^x f^*(t)\,dt$$

und es folgt :

$$f_n(x) = f(a) + \int_a^x (f_n)'(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(a) + \lim_{n\to\infty} \int_a^x (f_n)'(t)\,dt$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^*(t)\,dt$$

$$f'(x) = f^*(x)$$

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

q.e.d.

Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i$, $c_i \in \mathbb{C}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ konvergiere in einem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$.

Sei r eine reelle Zahl mit $0 < r < |z_1 - a|$ und $B_r(a)$ die abgeschlossene Kreisscheibe.

Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf $B_r(a)$.

Ebenso konvergiert die Reihe der Ableitungen $\sum_{i=1}^{\infty} i c_i (z-a)^{i-1}$ absolut und gleichmäßig auf $B_r(a)$.

Beweis :

Da die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z_1 - a)^i$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge

$\left(c_i\left(z_1-a\right)^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und beschränkt, etwa

$$\left|c_i\left(z_1-a\right)^i\right| \leq S \quad \text{für alle } i\in\mathbb{N} \text{ .}$$

Dann folgt :

$$\left|c_i\left(z-a\right)^i\right| = \left|c_i\left(z_1-a\right)^i \left(\frac{(z-a)}{(z_1-a)}\right)^i\right| \qquad \text{für alle } i\in\mathbb{N}$$

$$\left|c_i\left(z-a\right)^i\right| = \left|c_i\left(z_1-a\right)^i\right| \left|\frac{(z-a)}{(z_1-a)}\right|^i$$

und mit $\left|\dfrac{z-a}{z_1-a}\right| \leq \dfrac{r}{|z_1-a|} = \theta < 1$

$$\left|c_i\left(z-a\right)^i\right| \leq S\,\theta^i$$

$$\left|c_i(z-a)^i\right| \leq S\theta^i$$

$$\sup \left|c_i(z-a)^i\right|_{B_{ar}(a)} \leq S\theta^i \qquad \text{für alle } i\in\mathbb{N}$$

Die **geometrische Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} S\theta^i$ ist eine **konvergente Majorante** der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}\left|c_i(z-a)^i\right|$, weshalb die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i$ auf $B_r(a)$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Für die Reihe der Ableitungen $\sum_{i=1}^{\infty} i c_i(z-a)^{i-1}$ zeigt man analog, dass

$$\sup \left|i c_i(z-a)^{i-1}\right|_{B_{ar}(a)} \leq iS\theta^{i-1} \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N}\setminus\{0\} .$$

Man kann leicht zeigen, dass es ein $i_0\in\mathbb{N}$ gibt mit

$$\frac{iS\theta^{i-1}}{(i-1)S\theta^{i-2}} = \frac{i}{i-1}\,\theta < q < 1 \qquad \text{für alle } i \geq i_0$$

Nach dem **Quotientenkriterium** folgt , dass die Reihe $\sum_{i=i_0}^{\infty} iS\theta^{i-1}$ und damit die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} iS\theta^{i-1}$ konvergiert, weshalb auch die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} ic_i(z-a)^{i-1}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \left|ic_i(z-a)^{i-1}\right|$ **absolut und gleichmäßig** auf $B_r(a)$ konvergieren .

q.e.d.

Kurz zusammengefasst :

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i$ kann gliedweise abgeleitet werden :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} ic_i(z-a)^{i-1}$$